ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι

Ενότητα 10: Προσομοίωση

Μιχάλης Δρακόπουλος

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Προσομοίωση

Κατάστρωση μοντέλων συστημάτων και διεξαγωγή υπολογιστικών πειραμάτων με τα μοντέλα αυτά για:

- πρόβλεψη μελλοντικής συμπεριφοράς του συστήματος (π.χ. μετεωρολογικά μοντέλα)·
- διερεύνηση εναλλακτικών σεναρίων λειτουργίας του συστήματος (π.χ. οικονομικά μοντέλα).

Η προσωμοίωση περιγράφει τη μεταβολή του συστήματος με το χρόνο. Η ποσοτική περιγραφή του συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή δίνει την κατάσταση του συστήματος, και οι μεταβλητές που την περιγράφουν ονομάζονται μεταβλητές κατάστασης.

Προσομοίωση (συνεχ.)

Βασικό πρόβλημα προσομοίωσης: πως οι μεταβλητές κατάστασεις μεταβάλλονται με το χρόνο.

Συνεχή μοντέλα: ζητείται η κατάσταση για κάθε t.

Διακριτά μοντέλα: κατάσταση σε διακριτές χρονικές στιγμές $(t + \delta t)$.

Τα συνεχή μοντέλα προσεγγίζονται από διακριτά.

Οι κανόνες μεταβολής της κατάστασης μπορεί να δίνουν:

- προκαθορισμένη (νομοτελειακή) εξέλιξη του συστήματος (η νέα κατάσταση καθορίζεται πλήρως από τις προηγούμενες).
- πιθανοτική (στοχαστική) εξέλιξη (από διαφορετικές δυνατές νέες καταστάσεις επιλέγεται μια, πιθανοτικά).

Δομή αλγορίθμων προσομοίωσης

1. **input** παραμέτρους προσομοίωσης και αρχικές καταστάσσεις
2. **while** δεν έχει επιτευχθεί το κριτήριο τερματισμού
   (α) $t \leftarrow t + \delta t$
   (β) Αλλαγή στις μεταβλητές κατάστασης — νέα κατάσταση
   end
3. Συμπεράσματα για συμπεριφορά του συστήματος

Το βήμα 2(β) είναι το σημαντικότερο και συνήθως απαιτεί πολλούς και πολύπλοκους υπολογισμούς.
Στο 3ο βήμα η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται συνοψίζοντας σημαντικές λειτουργίες είτε με κάποιο πίνακα είτε γραφικά.

Παράδειγμα επένδυσης

Μισθωτός με ετήσιο εισόδημα s και ετήσια αύξηση μισθού $100\alpha\%$ επενδύει κάθε χρόνο το $100\beta\%$ του προηγούμενου μισθού του με ετήσιο επιτόκιο $100\epsilon\%$. Ποιά η κατάσταση της επένδυσης σε 5, 10, 15, ..., 30 χρόνια?
Ο μισθός με το χρόνο:

$$s(t+1) = s(t) + \alpha s(t)$$

και η αποταμίευση p:

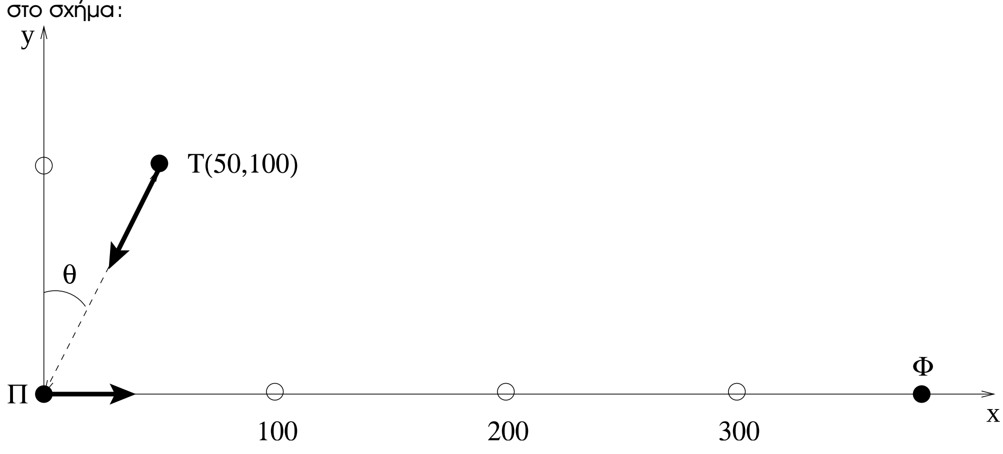
$$p(t+1) = p(t) + \epsilon p(t) + \beta s(t)$$

Επένδυση (συνεχ.)

```
s = input('Αρχικός μισθός?');
p = input('Αρχική αποταμίευση?');
alpha = input('Ετήσια αύξηση?');
beta = input('Ποσοστό επένδυσης?');
epsilon = input('Ετήσιο επιτόκιο?');
for t = 0:30
   p = p + epsilon*p + beta*s;
   s = s + alpha*s;
   if rem(t,5)==0,
      disp(t); disp(s); disp(p);
   end
end
```


Παράδειγμα καταδίωξης

Πεζοπόρος (Π) κινείται προς φράχτη (Φ) σε απόσταση 400m και καταδιώκεται από ταύρο (Τ) με αρχική κατάσταση όπως στο σχήμα:



Αν οι ταχύτητες των Π και Τ είναι αντίστοιχα v_{Π}=8m/sec και v_T=8.5m/sec, ποιά η κατάληξη της καταδίωξης?

Καταδίωξη (συνεχ.)

Η θέση του Τ εξαρτάται από τη θέση του Π. Για μικρά δt θεωρούμε ότι ο Τ κινείται σε ευθεία προς τον Π. Οι κινήσεις τους καθορίζονται από τις συντεταγμένες τους. Σε κάθε χρονική στιγμή η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$s(t) = \sqrt{(x_T(t) - x_\Pi(t))^2 + y_T(t)^2}$$

η κίνηση του Π:

$$x_\Pi(t + \delta t) = x_\Pi(t) + v_\Pi * \delta t$$

και η κίνηση του Τ:

$$x_T(t + \delta t) = x_T(t) + \delta t * v_T * \sin\theta = x_T(t) + \delta t * v_T * \frac{x_\Pi(t) - x_T(t)}{s(t)}$$

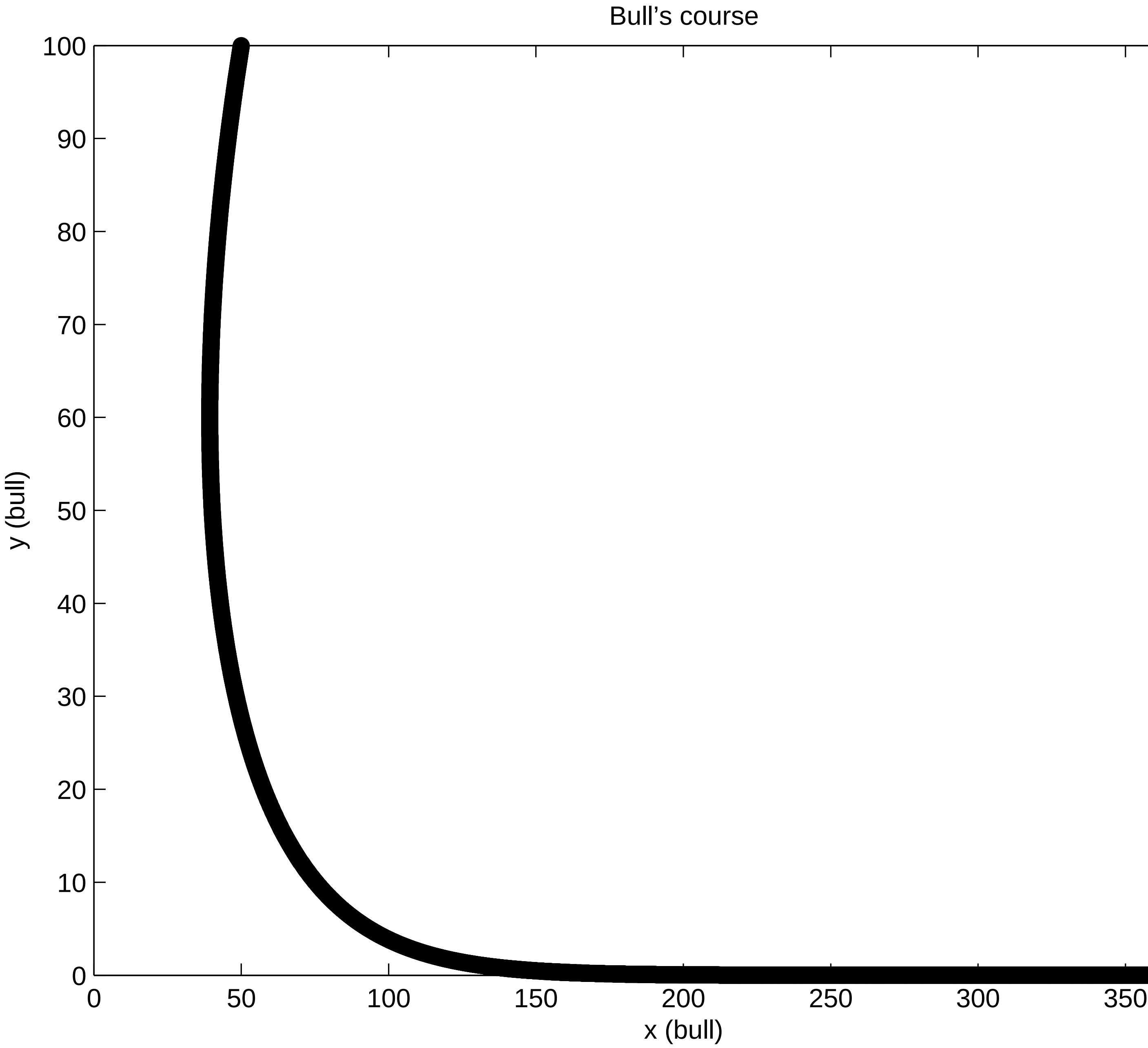
$$y_T(t + \delta t) = y_T(t) + \delta t * v_T * \cos\theta = y_T(t) + \delta t * v_T * \frac{-y_T(t)}{s(t)}$$

Αλγόριθμος καταδίωξης

```
% Αρχικές θέσεις ταύρου, οδοιπόρου και φράχτη
xb = input('x ταύρου?'); yb = input('y ταύρου?');
xh = input('x πεζοπόρου?'); xf = input('x φράχτη?');
dt = input('dt?');  vb = input('v ταύρου?');  vh = input('v πεζοπόρου?');
t = 0;  s = sqrt((xb-xh)^2+yb^2);
while xh<xf && s>1
   t = t + dt;
   xb = xb + (xh-xb)*vb*dt/s;
   yb = yb - yb*vb*dt/s;
   xh = xh + vh*dt;
   s = sqrt((xb-xh)^2+yb^2);
end
if xh >= xf,
   disp('Ο Π σώθηκε'); disp(s);
else
   fprintf('Ο Τ έφτασε τον Π μετά από %g m', xh);
end
```

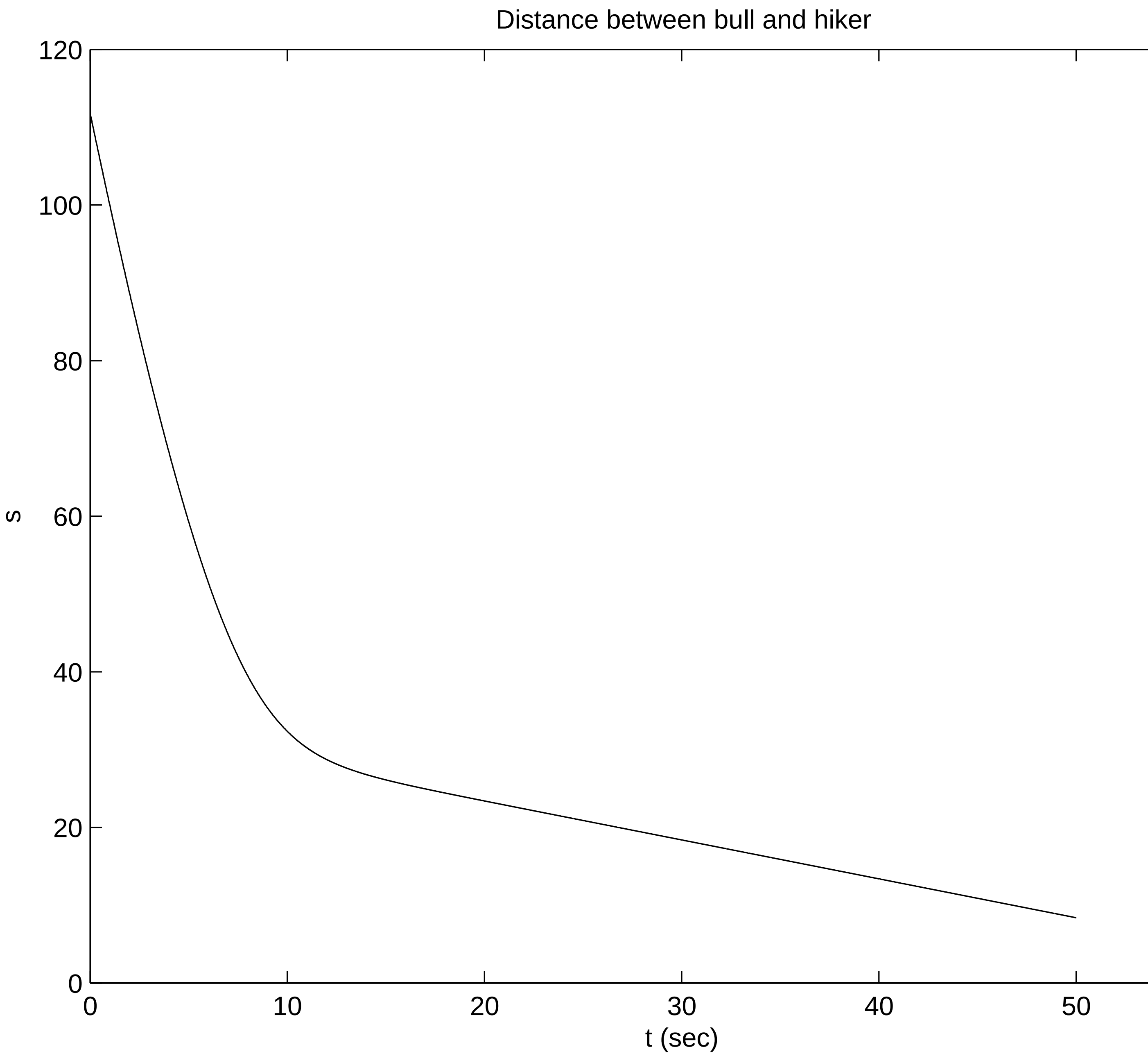
Η πορεία του ταύρου

Για ταχύτητες και αρχικές θέσεις όπως προηγουμένως:



Η απόσταση ταύρου - πεζοπόρου

Για ταχύτητες και αρχικές θέσεις όπως προηγουμένως:



Παράδειγμα δυναμικής

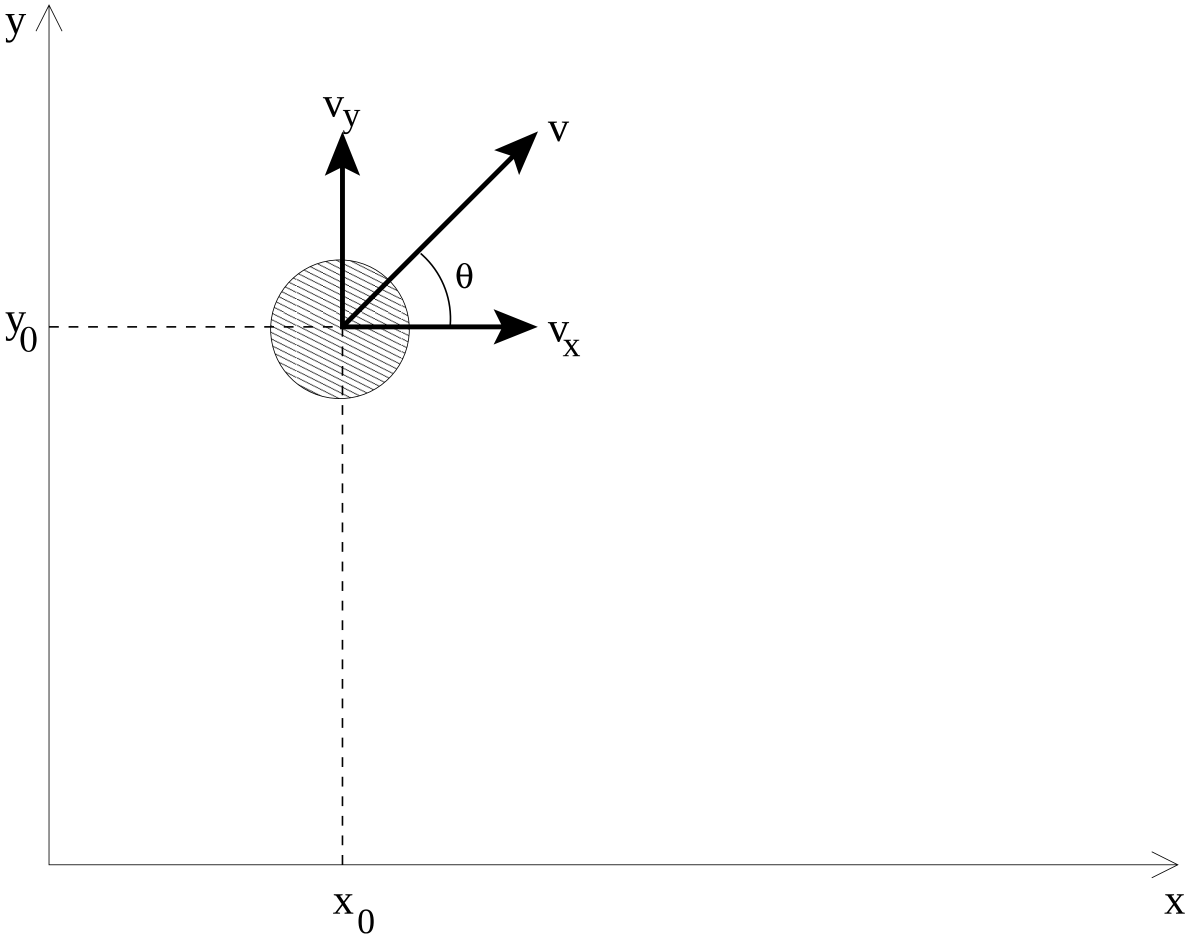
Κίνηση αντικειμένων υπό την επίδραση εξωτερικών δράσεων. Επιλέγεται σύστημα συντεταγμένων, χαράσεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος που έχει μάζα m, ταχύτητα v, επιτάχυνση γ και πάνω του ασκείται συνολική δύναμη F. Για την περιγραφή του μοντέλου χρησιμοποιούνται για κάθε κατεύθυνση x, y οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} F_x &= m\gamma_x, & F_y &= m\gamma_y \\ dv_x &= \bar{\gamma}_x dt, & dv_y &= \bar{\gamma}_y dt \\ dx &= \bar{v}_x dt, & dy &= \bar{v}_y dt. \end{aligned}$$

όπου $\bar{v}, \bar{\gamma}$ οι μέσες τιμές για ταχύτητα και επιτάχυνση αντίστοιχα.

Δυναμική (συνεχ.)

Αναπήδηση μπάλλας σε επίπεδο δάπεδο, με αρχική ταχύτητα v στη θέση (x_0, y_0) και επιτάχυνση βαρύτητας $g = 9.81\text{m/sec}^2$.



Σε κάθε αναπήδηση η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ελαπώνεται κατά 10%.

Δυναμική (συνεχ.)

Εξισώσεις κίνησης:

$$v_x(t) = \text{σταθ.}$$
$$v_y(t+\delta t) = v_y(t) - g * \delta t$$
$$x(t+\delta t) = x(t) + v_x(t) * \delta t$$
$$y(t+\delta t) = y(t) + \frac{v_y(t) + v_y(t+\delta t)}{2} * \delta t$$

Για την αναπήδηση:

if $y(t+\delta t) \leq 0$,
    $v_y(t+\delta t) \leftarrow |0.9 * v_y(t+\delta t)|$
end

Αλγόριθμος αναπήδησης

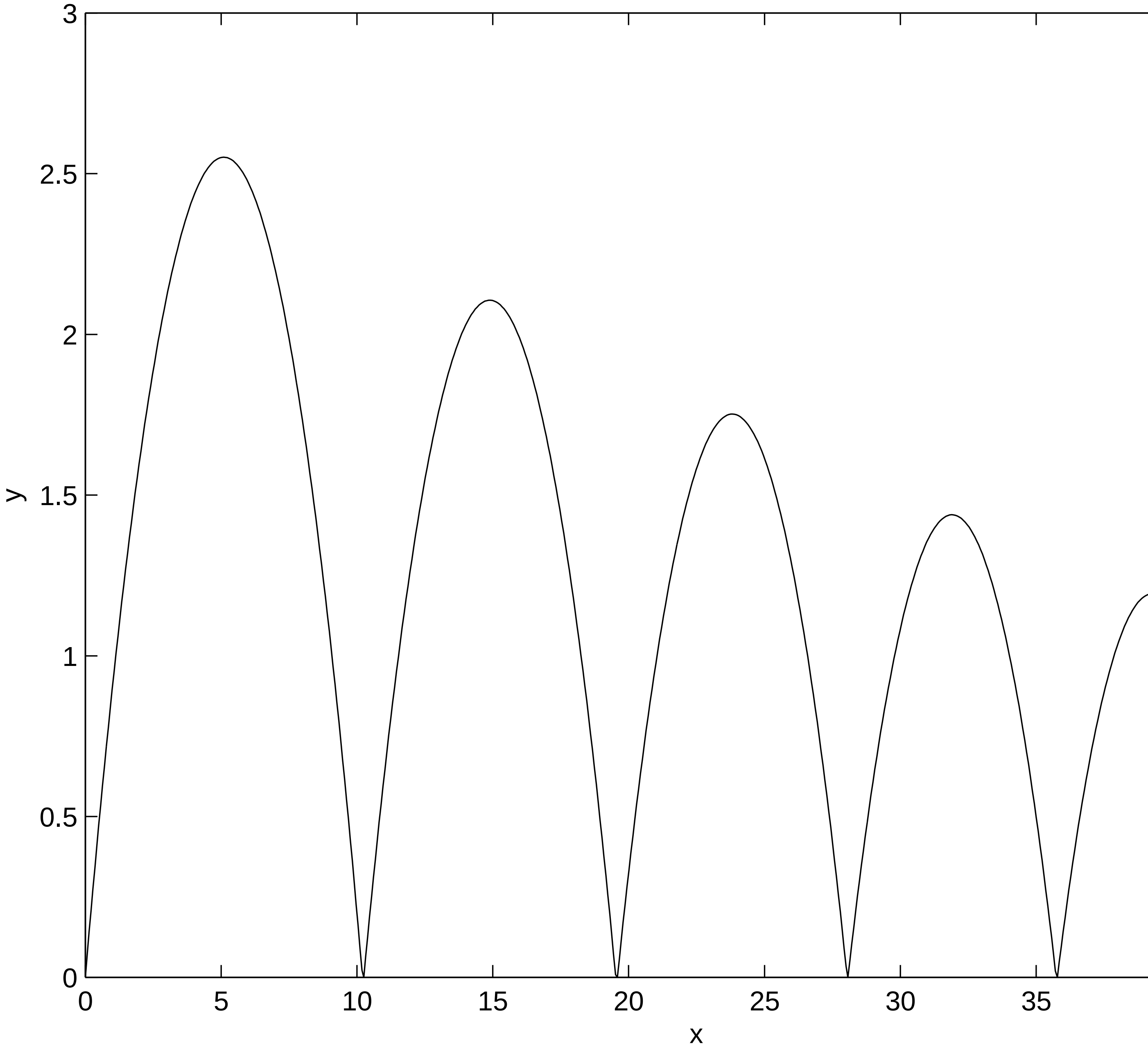
```
x = input('αρχικό x? ');
y = input('αρχικό y? ');
v = input('αρχική ταχύτητα (μέτρο)? ');
theta = input('γωνία βολής? ');
dt = input('dt?');
nmax = input('μέγιστος αριθμός αναπηδήσεων? ');
g = -9.8;
vx = v*cos(theta);
vy_old = v*sin(theta);
```


Αλγόριθμος αναπήδησης (συνεχ.)

```
n = 0;
t = 0;
while n<nmax,
   t = t + dt;
   x = x + vx*dt;
   vy_new = vy_old + g*dt;
   y = y + (vy_old + vy_new)*dt/2;
   vy_old = vy_new;
   if y<=0,
      vy_old = abs(0.9*vy_old);
      y = 0;
      n = n + 1;
   end
end
```

Γραφική παράσταση αναπήδησης

Για $x_0 = y_0 = 0, v = 10$m/sec$, \theta = \pi/4,$ nmax $= 5$ και $\delta t = 0.01$:



Πληροφορική Ι

Μ. Δρακόπουλος – 52

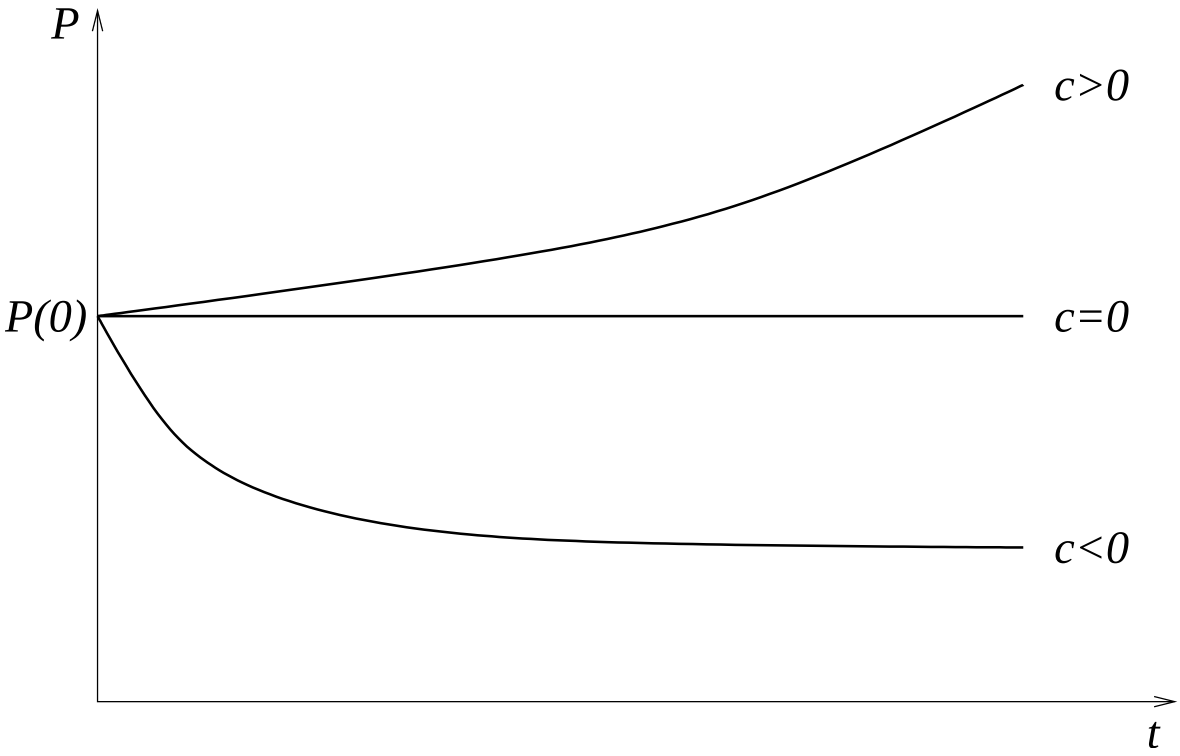
Δυναμική πληθυσμών

Αλληλεπίδραση πληθυσμών μεταξύ τους και με το περιβάλλον.
Ενα είδος - σταθερός ρυθμός ανάπτυξης
Ο πληθυσμός P σε χρόνο t:

$$P(t+\delta t) = P(t) + c * P(t) * \delta t = (1 + c * \delta t) * (P(t))$$

και για ισαπέχοντα χρονικά διαστήματα:

$$P(t) = P(0) * (1 + c * \delta t)^n, \qquad t = n * \delta t$$



Πληθυσμός με περιορισμένα αποθέματα τροφής

Το περιβάλλον μπορεί να υποστηρίξει μέχρι $P_{\max}$ άτομα. Ο ρυθμός ανάπτυξης προσεγγίζεται από:

$$c' = c * \frac{P_{\max} - P(t)}{P_{\max}}$$

που για $P(t) \to 0, \quad P(t) \to P_{\max}$ δίνει αντίστοιχα $c' = c$ και $c' = 0$.
Ο πληθυσμός στο χρόνο:

$$P(t+\delta t) = P(t) + c' * P(t) * \delta t$$

και με κανονικοποίηση $p(t) = P(t)/P_{\max}$ προκύπτει η θεμελιώδης εξίσωση της οικολογίας:

$$p(t+\delta t) = p(t) + c * (1 - p(t)) * p(t) * \delta t$$

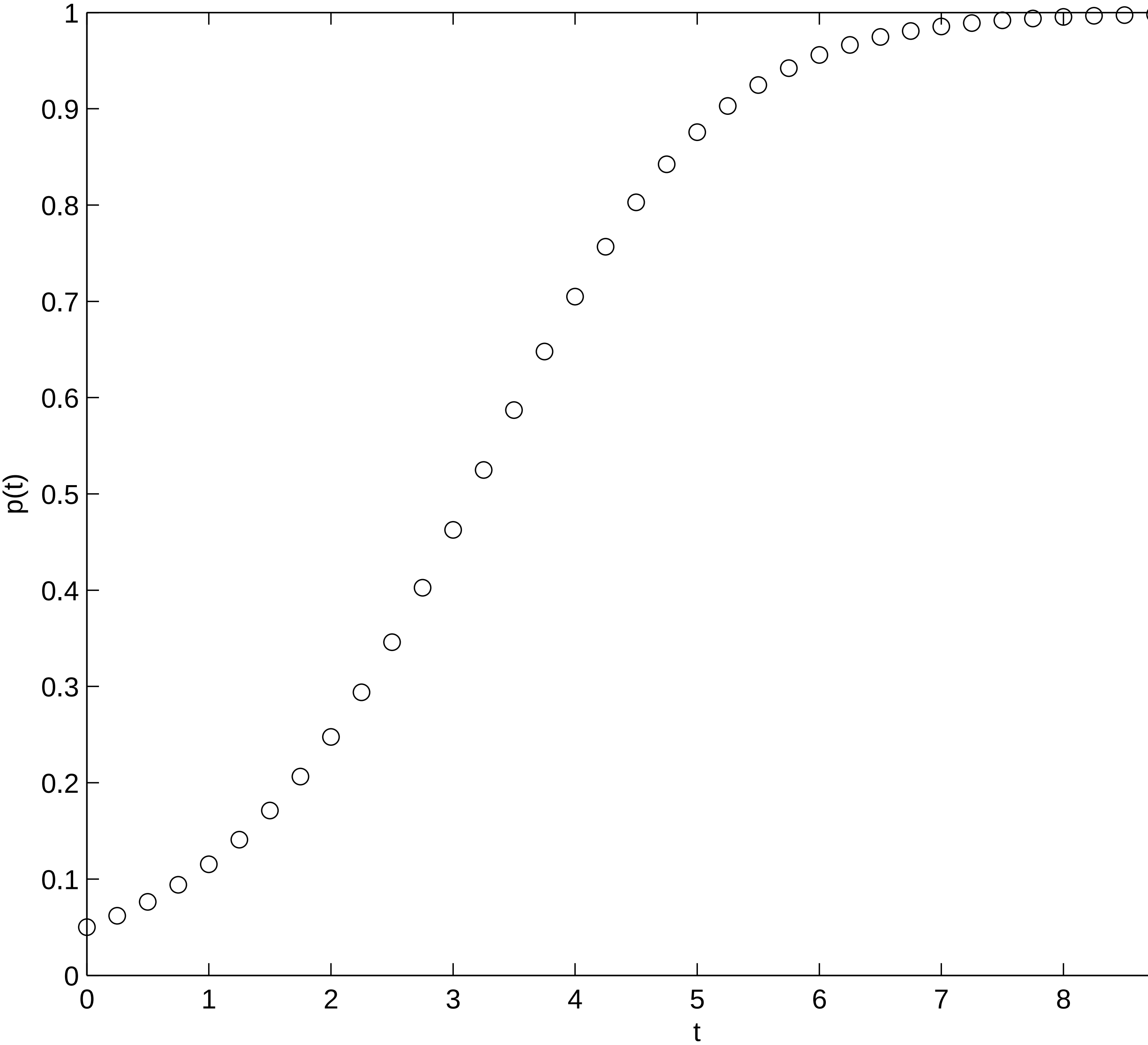
Αλγόριθμος για θεμελιώδη εξ. οικολογίας

```
function [p, t] = eco(c, dt, p0, tlimit)
nsteps = floor(tlimit/dt)+1;
t = zeros(1,nsteps);
p = zeros(1,nsteps);
p(1) = p0;
for i=2:nsteps
   t(i) = t(i-1) + dt;
   p(i) = p(i-1) + c*(1-p(i-1))*p(i-1)*dt;
end
```

Πληροφορική I — Μ. Δρακόπουλος – 55

Γραφική παράσταση

Για $c = 1, p_0 = 0.05, \delta t = 0.25, t_{\text{limit}} = 10$:



Αρπακτικά και λεία

Ενας πληθυσμός (λεία) αποτελεί τροφή για έναν άλλο (αρπακτικά):

Λαγοί $R(t)$**:** αναπαράγονται 4 λαγοί το μήνα από κάθε ζεύγος ($c = 2$).

$$R(t + \delta t) = R(t) + 2 * \delta t * \frac{R_{\max} - R(t)}{R_{\max}} * R(t) \qquad (1)$$

Αλεπούδες $F(t)$**:** αυξάνουν κατά 4 το χρόνο ανά ζεύγος (για ένα μήνα $c = 1/12 = 0.167$) όταν $R(t) = R_{\max}$ και $F(t) <<<$. Ελαπώνονται ανάλογα. ΄Οταν αντιστοιχούν 15 λαγοί ανά αλεπού, τότε οι αλεπούδες δεν αυξάνονται πλέον ($c' = 0$):

$$c' = \frac{R(t) - 15 * F(t)}{R_{\max}}$$

και για τον πληθυσμό των αλεπούδων:

$$F(t + \delta t) = F(t) + 0.167 * \delta t * \frac{R(t) - 15 * F(t)}{R_{\max}} * F(t)$$

Αρπακτικά και λεία (συνεχ.)

Αλλά οι λαγοί μειώνονται από τις αλεπούδες με ρυθμό ανάλογο του διαθέσιμου πληθυσμού τους, που αντιστοιχεί σε 15 λαγούς ανά αλεπού όταν $R(t) = R_{\max}$. Οπότε η (1) γίνεται:

$$R(t + \delta t) = R(t) + 2 * \delta t * \frac{R_{\max} - R(t)}{R_{\max}} * R(t) - 15 * \delta t * \frac{R(t)}{R_{\max}} * F(t)$$

Με κανονικοποίηση ως πρός $R_{\max}$, δηλ. $r(t) = R(t)/R_{\max}$ και $f(t) = F(t)/R_{\max}$ οι λαγοί:

$$r(t + \delta t) = r(t) + 2 * \delta t * r(t) * (1 - (r(t)) - 15 * \delta t * r(t) * f(t)$$

και οι αλεπούδες:

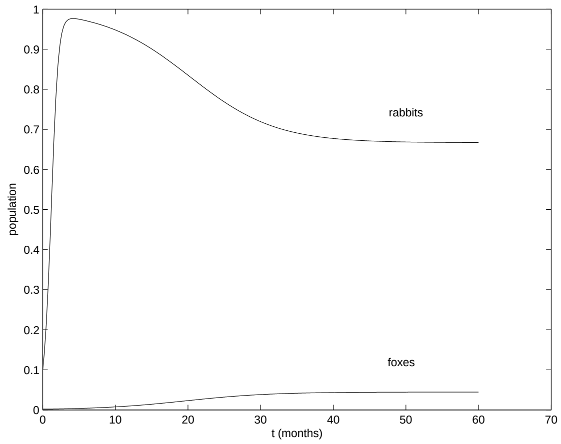
$$f((t + \delta t) = f(t) + 0.167 * \delta t * f(t) * (r(t) - 15 * f(t))$$

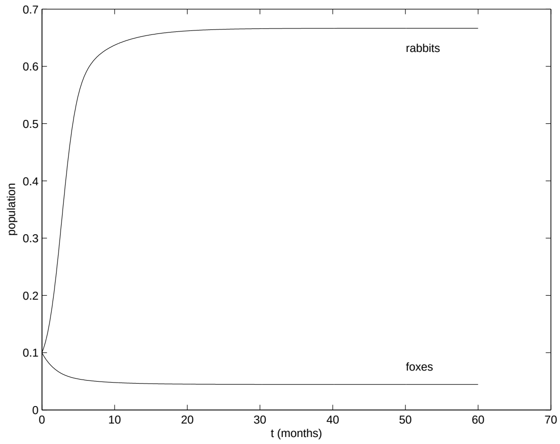
Αλγόριθμος αρπακτικών-λείας

```
function [r, f, t] = foxrabbit(tmax, nsteps, r0, f0)
% tmax   - διάρκεια παρατήρησης (σε μήνες)
% nsteps - βήματα χρόνου ανά μήνα
% r0, f0 - αρχικοί πληθυσμοί
t = zeros(1, tmax*nsteps+1);
f = zeros(1, tmax*nsteps+1);
r = zeros(1, tmax*nsteps+1);
f(1) = f0; r(1) = r0; dt = 1/nsteps; i = 1;
for m = 1:tmax
   for n = 1:nsteps
      i = i + 1;
      t(i) = t(i-1) + dt;
      f(i) = f(i-1)+0.167*dt*f(i-1)*...
             (r(i-1)-15*f(i-1));
      r(i) = r(i-1)+2*dt*r(i-1)*...
             (1-r(i-1))-15*dt*r(i-1)*f(i-1);
      if r(i)<0, r(i)=0; end
   end
end
```


Γραφικές παραστάσεις

Για `tmax` = 60 μήνες και `nsteps` = 10:





Το συγκεκριμένο οικοσύστημα ισορροπεί ανέξάρτητα από τους αρχικούς πληθυσμούς.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης