ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Ενότητα: Συμπάγεια

Γεώργιος Κουμουλλής

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

9 Συμπάγεια

9.1 Συμπαγείς Χώροι

Ήδη από τη μελέτη της τοπολογίας της ευθείας των πραγματικών αριθμών, είχε γίνει φανερό πως τα κλειστά διαστήματα είχαν μία συγκεκριμένη ιδιότητα, η οποία ήταν ουσιαστική για την απόδειξη ισχυρών θεωρημάτων του Απειροστικού Λογισμού, όπως το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής[1] ή το Θεώρημα Ομοιόμορφης Συνέχειας[2]. Όμως για πολύ καιρό δεν ήταν σαφές το πώς αυτή η ιδιότητα θα μπορούσε να διατυπωθεί στο αφηρημένο περιβάλλον μελέτης των τοπολογικών χώρων. Μία αρχική προσέγγιση θα ήταν να εστιάσει κανείς σε μία ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα των κλειστών διαστημάτων, η οποία είναι μάλιστα ισοδύναμη με το θεώρημα Bolzano-Weierstrass[3]:

Κάθε άπειρο υποσύνολο ενός κλειστού διαστήματος διαθέτει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο.

Όμως αργά ή γρήγορα θα γίνει εμφανές πως δεν είναι αυτή η ιδιότητα που βρίσκεται στην "καρδιά του ζητήματος". Στην πραγματικότητα χρειάζεται μία ισχυρότερη διατύπωση, η οποία περνά μέσα από την έννοια του ανοικτού καλύμματος.

Ορισμός 9.1.1. *Ένας τοπολογικός χώρος καλείται συμπαγής αν κάθε ανοικτό κάλυμμα $\{U_i : i \in I\}$ του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή αν υπάρχει $J \subseteq I$ πεπερασμένο, ώστε $X = \bigcup_{i\in J} U_i$. Ένα $F \subseteq X$ καλείται συμπαγές σύνολο, αν ο υπόχωρος F είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Παρατηρήσεις 9.1.2. *(α) Κάθε πεπερασμένος τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής. Πράγματι, αν $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \bigcup_{i\in I} U_i$, όπου κάθε U_i είναι ανοικτό, τότε για κάθε $k = 1, 2 \ldots, n$ υπάρχει $i_k \in I$ ώστε $x_k \in U_{i_k}$. Τότε $X = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$.*

(β) Ένας τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε βασικό ανοικτό κάλυμμα του X (δηλαδή κάθε ανοικτό κάλυμμα του X που αποτελείται από βασικά ανοικτά σύνολα) έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα (γιατί;).

Το να εξετάσει κανείς κατά πόσο ένας τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής είναι μία διαδικασία εξαιρετικά δύσκολη, στη γενική περίπτωση. Για το λόγο αυτό, θα αποδείξουμε κάποιες αρχικές προτάσεις που μας δείχνουν πώς να κατασκευάσουμε συμπαγείς τοπολογικούς χώρους από ήδη υπάρχοντες, αλλά και κάποια κεντρικά κριτήρια συμπάγειας ενός τοπολογικού χώρου.

Πρόταση 9.1.3. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $F \subseteq X$. Τότε το F είναι συμπαγές σύνολο αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό κάλυμμα $\{U_i : i \in I\}$ του F στο X (δηλαδή για κάθε οικογένεια $\{U_i : i \in I\}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $F \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$) έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση και αφήνεται ως άσκηση.

[1] Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λαμβάνει μέγιστη κι ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ τέτοια ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, για κάθε $x \in [a,b]$.

[2] Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής στα κλειστά διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

[3] Κάθε φραγμένη ακολουθία (πραγματικών αριθμών) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Πρόταση 9.1.4. *Αν X είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος και $F \subseteq X$ κλειστό, τότε το F είναι συμπαγές.*

Απόδειξη: Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ένα κάλυμμα του F από ανοικτά υποσύνολα του X. Η οικογένεια $(U_i)_{i\in I} \cup \{X \setminus F\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του (συμπαγούς) X. Άρα υπάρχουν $i_1, \dots i_k \in I$ ώστε $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup X \setminus F$. Τότε $F \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$, επομένως το F είναι συμπαγές σύνολο.

Μπορούμε να διατυπώσουμε ένα διαφορετικό κριτήριο για τη συμπάγεια ενός τοπολογικού χώρου, το οποίο εστιάζει στα κλειστά σύνολα αντί των ανοικτών.

Πρόταση 9.1.5. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει ότι $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

Απόδειξη: Ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $(U_i)_{i\in I}$ του X με $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, υπάρχει πεπερασμένο $J \subseteq I$ με $X = \bigcup_{i\in J} U_i$. Ισοδύναμα (θέτοντας $F_i = U_i^c$ για κάθε $i \in I$) για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, υπάρχει $J \subseteq I$ πεπερασμένο με $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$. Δηλαδή, για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, ισχύει ότι $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Κατά τη μελέτη της τοπολογίας μετρικών χώρων, μπορεί κανείς να αποδείξει ένα εύχρηστο κριτήριο συμπάγειας μέσω ακολουθιών. Συγκεκριμένα, ένας μετρικός χώρος είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο χώρο. Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί το ανάλογο του κριτηρίου αυτού στην κλάση των τοπολογικών χώρων.

Πρόταση 9.1.6. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής αν και μόνο αν καθε δίκτυο στο X έχει οριακό σημείο (ή ισοδύναμα, κάθε δίκτυο στο X έχει συγκλίνον υποδίκτυο).*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο στο X. Για κάθε $\mu \in \Lambda$ ορίζουμε το κλειστό σύνολο $F_\mu = \overline{\{x_\lambda : \lambda \geq \mu\}}$. Κάθε F_μ είναι μή κενό και $F_{\mu_1} \supseteq F_{\mu_2}$ αν $\mu_2 \geq \mu_1$. Επομένως, η οικογένεια $(F_\mu)_{\mu\in\Lambda}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, αφού αν $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \Lambda$, υπάρχει $\mu \in \Lambda$ με $\mu \geq \mu_1, \dots, \mu_n$, άρα $F_\mu \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} F_{\mu_i}$. Επειδή ο X είναι συμπαγής χώρος, από την Πρόταση 9.1.5, έχουμε ότι υπάρχει $x \in \bigcap_{\mu\in\Lambda} F_\mu$. Το x είναι οριακό σημείο του (x_λ). Πράγματι, αν $U \in \mathfrak{N}_x$ και $\mu \in \Lambda$, τότε έχουμε ότι $U \cap \{x_\lambda : \lambda \geq \mu\} \neq \emptyset$ (αφού $x \in F_\mu$), δηλαδή υπάρχει $\lambda \geq \mu$ ώστε $x_\lambda \in U$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $(F_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Από την Πρόταση 9.1.5, αρκεί να δείξουμε ότι $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο $H \subseteq I$ έχουμε ότι υπάρχει $x_H \in \bigcap_{i\in H} F_i$. Θέτουμε $\Lambda = \{H \subset I : H \text{ πεπερασμένο}\}$ και ορίζουμε στο Λ τη σχέση

$$H_1 \leq H_2 \iff H_1 \subseteq H_2.$$

Τότε, το $(\Lambda, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο και το $(x_H)_{H\in\Lambda}$ δίκτυο στο X. Από την υπόθεση, υπάρχει $x \in X$, οριακό σημείο του (x_H).

Έστω ένα $i_0 \in I$ και $U \in \mathfrak{N}_x$. Αφού το x είναι οριακό σημείο του δικτύου (x_H), υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $H \geq \{i_0\}$ ώστε $x_H \in U$. Έχουμε τότε ότι

$$x_H \in \bigcap_{i\in H} F_i \subseteq F_{i_0}.$$

Άρα, $x_H \in F_{i_0} \cap U$ κι επομένως $F_{i_0} \cap U \neq \emptyset$.Συνεπώς $x \in \overline{F}_{i_0} = F_{i_0}$ (αφού το F_{i_0} είναι κλειστό).Όμως, αυτό ισχύει για κάθε $i_0 \in I$, άρα $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$. Δηλαδή, $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ κι έτσι ο X είναι συμπαγής χώρος.

Ένα άμεσο πόρισμα της Πρότaασης 9.1.6 είναι το ακόλουθο Πόρισμα, του οποίου η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Πόρισμα 9.1.7. *Έστω X ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στο χώρο X με ακριβώς ένα οριακό σημείο. Τότε το δίκτυο (x_λ) συγκλίνει.*

Απο άποψης διαχωριστικών αξιωμάτων, η συμπάγεια προσδίδει στο χώρο ουσιαστικά πλουσιότερη δομή. Συγκεκριμένα, στους Hausdorff τοπολογικούς χώρους τα συμπαγή υποσύνολα έχουν τις ίδιες διαχωριστικές ιδιότητες με τα σημεία, όπως γίνεται φανερό από την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 9.1.8. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $K \subseteq X$ συμπαγές.*

(i) Αν $F \subseteq X$ ώστε για κάθε $x \in K$ τα x και F διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα, τότε τα K και F διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

(ii) Αν ο X είναι χώρος Hausdorff και ένα $L \subseteq X$ είναι συμπαγές και ξένο με το K, τότε τα K και L διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

(iii) Αν ο X είναι κανονικός χώρος και ένα $F \subseteq X$ είναι κλειστό και ξένο με το K, τότε τα K και F διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

Απόδειξη: (i) Έχουμε ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχουν ξένα, ανοικτά σύνολα U_x, V_x ώστε $x \in U_x$ και $F \subseteq V_x$. Τότε η οικογένεια $(U_x)_{x\in K}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου K. Επομένως, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in K$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Θέτουμε:

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \quad \text{και} \quad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

Τότε τα U,V είναι ανοικτά, $K \subseteq U$ και $F \subseteq V$. Αρκεί να δείξουμε ότι $U \cap V = \emptyset$. Αυτό όμως είναι εμφανές, αφού αν $x \in U$, τότε υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ ώστε $x \in U_{x_i}$ και $x \notin V_{x_i}$. Άρα $U \cap V = \emptyset$ κι επομένως τα F, K διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

(ii) Για κάθε $x \in K$ και $y \in L$ έχουμε $x \neq y$ και, αφού ο X είναι χώρος Hausdorff, τα x, y διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.Αφού το σύνολο L είναι συμπαγές, από το (i), έχουμε ότι για κάθε $x \in K$, τα x και L διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα. Αφού το K είναι συμπαγές, πάλι από το (i), έχουμε ότι τα K και L διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

(iii) Για κάθε $x \in K$, τα x, F διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα, αφού $x \neq F$ και ο χώρος X είναι T_3. Συνεπώς, από το (i) έχουμε ότι τα K και F διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

Πόρισμα 9.1.9. *Έστω X ένας Hausdorff χώρος.*

(i) Αν ο X είναι συμπαγής, τότε είναι φυσιολογικός.

(ii) Κάθε συμπαγές υποσύνολο του X είναι κλειστό.

Απόδειξη: (i) Έστω $F_1, F_2 \subseteq X$ ξένα και κλειστά υποσύνολα του X. Τότε, τα F_1 και F_2 είναι συμπαγή (Πρόταση 9.1.4) και επομένως, από την Πρόταση 9.1.8(ii), έχουμε ότι τα F_1, F_2 διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα. Άρα ο χώρος X είναι φυσιολογικός.

(ii) Έστω $K \subseteq X$ συμπαγές και $x \in X \setminus K$. Τότε τα $\{x\}$ και K είναι ξένα συμπαγή υποσύνολα του X. Άρα από την Πρόταση 9.1.8(ii), έχουμε ότι διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα. Δηλαδή, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V, ώστε

$$x \in U \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus K.$$

Έπεται ότι $X \setminus K \in \mathfrak{N}_x$, για κάθε $x \in X \setminus K$. Άρα το $X \setminus K$ είναι ανοικτό σύνολο και κατά συνέπεια, το K είναι κλειστό σύνολο.

Παρατήρηση 9.1.10. *Από το Πόρισμα 9.1.9 και την Πρόταση 9.1.4 έπεται ότι σε ένα συμπαγή Hausdorff χώρο, τα συμπαγή υποσύνολα είναι ακριβώς τα κλειστά υποσύνολα του χώρου.*

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη συμπεριφορά των συνεχών συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε συμπαγείς τοπολογικούς χώρους.

Πρόταση 9.1.11. *Έστω X ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και Y ένας τοπολογικός χώρος. Αν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση $f : X \to Y$, τότε και ο χώρος Y είναι συμπαγής. Δηλαδή, η συνεχής εικόνα ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου είναι συμπαγής χώρος.*

Απόδειξη: Έστω συνεχής και επί συνάρτηση $f : X \to Y$ κι έστω $(V_i)_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του Y. Αφού η f είναι συνεχής, η οικογένεια $\{f^{-1}(V_i) : i \in I\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του X. Ο X είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος, επομένως υπάρχουν $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$, ώστε

$$X = f^{-1}(V_{i_1}) \cup f^{-1}(V_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{i_k}).$$

Όμως η συνάρτηση f είναι επί, άρα $Y = V_{i_1} \cup V_{i_2} \cup \cdots \cup V_{i_k}$. Συνεπώς, ο Y είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.

Σημαντικές συνέπειες αυτής της Πρότασης είναι το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής (Πόρισμα 9.1.12) αλλά και ένα κριτήριο, το οποίο μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν μία απεικόνιση είναι ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων (Θεώρημα 9.1.13).

Πόρισμα 9.1.12. *Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος και μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε η f είναι φραγμένη και μάλιστα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 9.1.11, έπεται ότι το $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ είναι συμπαγές. Άρα το $f(X)$ είναι φραγμένο κι επομένως, η συνάρτηση f είναι φραγμένη. Συνεπώς υπάρχει το $\sup f(X) \in \mathbb{R}$ και $\sup f(X) \in \overline{f(X)}$. Αφού όμως το $f(X)$ είναι συμπαγές, είναι και κλειστό στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή $\sup f(X) \in f(X) = \overline{f(X)}$ ($\sup f(X) = \max f(X)$). Επομένως η f παίρνει μέγιστη τιμή. Για την ελάχιστη τιμή εργαζόμαστε ανάλογα.

Θεώρημα 9.1.13. *Έστω X ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και Y ένας χώρος Hausdorff. Αν $f : X \to Y$ είναι μία συνεχής, $1-1$ και επί συνάρτηση, τότε και η f^{-1} είναι συνεχής (επομένως η f είναι ομοιομορφισμός).*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι κλειστή απεικόνιση. Έστω ένα $F \subseteq X$ κλειστό. Αφού ο X είναι συμπαγής, θα είναι και το F συμπαγές. Από την Πρόταση 9.1.11, έχουμε ότι το $f(F) \subseteq Y$ είναι συμπαγές και, αφού ο Y είναι χώρος Hausdorff, έχουμε ότι το $f(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y. Δηλαδή η f είναι κλειστή απεικόνιση.

9.2 Καρτεσιανά γινόμενα συμπαγών χώρων

Στην προηγούμενη παράγραφο δε μελετήσαμε τη συμπεριφορά της έννοιας της συμπάγειας ως προς το γινόμενο τοπολογικών χώρων, όχι λόγω αμέλειας αλλά επειδή τα καρτεσιανά γινόμενα συμπαγών χώρων παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, όπως θα γίνει εμφανές παρακάτω. Πρώτος μας στόχος είναι να αποδείξουμε το εξαιρετικά εύχρηστο Λήμμα του Σωλήνα και μέσω αυτού να συμπεράνουμε ότι το πεπερασμένο γινόμενο συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι επίσης συμπαγής τοπολογικός χώρος. Παράλληλα, θα εξάγουμε μερικά ακόμη ενδιαφέροντα Πορίσματα.

Λήμμα 9.2.1 (Λήμμα του Σωλήνα)**.** *Έστω X τοπολογικός χώρος και Y συμπαγής τοπολογικός χώρος. Αν $x_0 \in X$ και U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $X \times Y$, με $\{x_0\} \times Y \subseteq U$, τότε υπάρχει μία ανοικτή περιοχή V του x_0 ώστε*

$$\{x_0\} \times Y \subseteq V \times Y \subseteq U[4].$$

Απόδειξη: Για κάθε $y \in Y$, έχουμε ότι $(x_0, y) \in U$, άρα υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο $V_y \times W_y$ του $X \times Y$ με $(x_0, y) \in V_y \times W_y \subseteq U$. Όμως ο χώρος $\{x_0\} \times Y$ είναι συμπαγής, αφού είναι ομοιομορφικός με το χώρο Y, επομένως το ανοικτό κάλυμμά του, $(V_y \times W_y)_{y \in Y}$, έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή υπάρχουν $y_1, y_2, \ldots y_k \in Y$ ώστε

$$\{x_0\} \times Y \subseteq V_{y_1} \times W_{y_1} \cup V_{y_2} \times W_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_k} \times W_{y_k} \subseteq U.$$

Θέτουμε $V = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_k}$. Έχουμε ότι το V είναι μία ανοικτή περιοχή του x_0 και επιπλέον $\{x_0\} \times Y \subseteq V \times Y \subseteq U$. Πράγματι, αν $(x, y) \in V \times Y$, τότε υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ώστε $(x_0, y) \in V_{y_i} \times W_{y_i}$. Συνεπώς

$$(x, y) \in V \times W_{y_i} \subseteq V_{y_i} \times W_{y_i} \subseteq U.$$

Παράδειγμα 9.2.2. *Είναι σαφές ότι το Λήμμα του Σωλήνα δεν αληθεύει κατ' ανάγκη αν ο χώρος Y δεν είναι συμπαγής. Για παράδειγμα, αν $X = Y = \mathbb{R}$ και*

$$N = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < \frac{1}{y^2 + 1} \right\},$$

τότε το N είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ που περιέχει το «φλοιό» $\{0\} \times \mathbb{R}$, αλλά προφανώς δεν περιέχει κανένα «σωλήνα» περί το $\{0\} \times \mathbb{R}$.

Όπως είχαμε δει στην Προταση 4.3.3 (iv), αν $(X_i)_{i \in I}$ είναι μία οικογένεια τοπολογικών χώρων και $X = \prod_{i \in I} X_i$ με την καρτεσιανή τοπολογία, τότε η συνάρτηση προβολής στην i-συντεταγμένη είναι (συνεχής) ανοικτή απεικόνιση, αλλά όχι αναγκαία και κλειστή απεικόνιση. Η ακόλουθη Πρόταση μας δείχνει ότι στην περίπτωση του γινομένου δύο τοπολογικών χώρων, η συμπάγεια μπορεί να εξασφαλίσει την κλειστότητα των προβολών.

Πρόταση 9.2.3. *Έστω X τοπολογικός χώρος και Y συμπαγής τοπολογικός χώρος. Η προβολή (στην πρώτη συντεταγμένη) $\pi_1 : X \times Y \to X$ είναι κλειστή συνάρτηση.*

Απόδειξη: Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\pi_1(F)$ είναι κλειστό, ή ισοδύναμα ότι το σύνολο $X \setminus \pi_1(F)$ είναι ανοικτό. Έστω $x \in X \setminus \pi_1(F)$. Τότε $(\{x\} \times Y) \cap F = \emptyset$, δηλαδή $\{x\} \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus F$.

Το σύνολο $(X \times Y) \setminus F$ είναι ανοικτό, επομένως από το Λήμμα του Σωλήνα, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x, με

$$\{x\} \times Y \subseteq V \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus F.$$

Τότε $x \in V \subseteq X \setminus \pi_1(F)$. Άρα το $X \setminus \pi_1(F)$ είναι ανοικτό σύνολο.

[4] Το σύνολο $V \times Y$ συχνά καλείται «σωλήνας» περί το «φλοιό» $x_0 \times Y$.

Πρόταση 9.2.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος και Y ένας συμπαγής χώρος Hausdorff. Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν το γράφημα*

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : \ x \in X\}$$

της f είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω ένα δίκτυο $(x_\lambda, f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ από στοιχεία του $\mathrm{Gr}(f)$, τέτοιο ώστε $(x_\lambda, f(x_\lambda)) \to (x, y) \in X \times Y$. Τότε, έχουμε προφανώς ότι $x_\lambda \to x$ και $f(x_\lambda) \to y$. Όμως η f είναι συνεχής, άρα $f(x_\lambda) \to f(x)$, και αφού ο Y είναι χώρος Hausdorff, έπεται ότι $y = f(x)$. Δηλαδή $(x, y) = (x, f(x)) \in X \times Y$. Έτσι έχουμε ότι το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό σύνολο.[5]

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό σύνολο. Τότε αν $F \subseteq Y$ είναι ένα κλειστό σύνολο, αφού η προβολή στη δεύτερη συντεταγμένη $\pi_2 : X \times Y \to Y$ είναι συνεχής απεικόνιση, έχουμε ότι το σύνολο $\pi_2^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, άρα και το $\mathrm{Gr}(f) \cap \pi_2^{-1}(F)$ είναι κλειστό σύνολο. Τώρα, από την Πρόταση 9.2.3, η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη π_1 είναι κλειστή απεικόνιση, άρα το σύνολο $\pi_1(\mathrm{Gr}(f) \cap \pi_2^{-1}(F))$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Όμως εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι $\pi_1(\mathrm{Gr}(f) \cap \pi_2^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$ (ελέγξτε το). Επομένως η f αντιστρέφει κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα, συνεπώς είναι συνεχής.

Πρόταση 9.2.5. *Έστω X, Y συμπαγείς χώροι. Τότε ο χώρος $X \times Y$ με την καρτεσιανή τοπολογία είναι συμπαγής χώρος. Επαγωγικά, το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συμπαγών χώρων, με την καρτεσιανή τοπολογία, είναι συμπαγής χώρος.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $X \times Y$. Για κάθε $x_0 \in X$, έχουμε ότι ο «φλοιός» $\{x_0\} \times Y$ είναι συμπαγής χώρος που καλύπτεται από το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{U}$, επόμενως υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\mathcal{U}_{x_0} \subseteq \mathcal{U}$ που να καλύπτει το «φλοιό» $\{x_0\} \times Y$, δηλαδή $\{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_{x_0}$. Από το Λήμμα του Σωλήνα, υπάρχει ανοικτή περιοχή V_{x_0} του x_0, ώστε

$$\{x_0\} \times Y \subseteq V_{x_0} \times Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_{x_0}.$$

Έτσι, για κάθε $x \in X$ έχουμε επιλέξει μία ανοικτή περιοχή V_x του x, τέτοια ώστε ο «σωλήνας» $V_x \times Y$ να καλύπτεται από πεπερασμένα στο πλήθος στοιχεία του καλύμματος $\mathcal{U}$.

Η οικογένεια $\mathcal{V} = (V_x)_{x\in X}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του χώρου X, ο οποίος είναι συμπαγής. Άρα η $\mathcal{V}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχουν στοιχεία $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, τέτοια ώστε $X = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_k}$. Αφού τα αντίστοιχα υποκαλύμματα $\mathcal{U}_{x_1}, \mathcal{U}_{x_2}, \ldots, \mathcal{U}_{x_k}$ του $\mathcal{U}$ είναι πεπερασμένα, η υποοικογένεια του $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U}_0 = \{U \in \mathcal{U} : \ U \in \mathcal{U}_{x_i} \text{ για κάποιο } i = 1, 2 \ldots, k\} = \mathcal{U}_{x_1} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{x_k}$$

είναι πεπερασμένη και αποτελεί κάλυμμα του $X \times Y$, αφού

$$X \times Y \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{k} V_{x_{i_j}} \right) \times Y = \bigcup_{j=1}^{k} (V_{x_{i_j}} \times Y) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \left(\bigcup \mathcal{U}_{x_{i_j}} \right) = \bigcup \mathcal{U}_0.$$

Έτσι, το κάλυμμα $\mathcal{U}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, άρα ο $X \times Y$ είναι συμπαγής χώρος.

Σε αυτό το σημείο είναι φυσιολογικό να αναρωτηθεί κανείς αν ισχύει το ανάλογο της Πρότασης 9.2.5 για άπειρες οικογένειες συμπαγών χώρων. Η απάντηση είναι θετική, αλλά η απόδειξη αυτού του εξαιρετικά σημαντικού αποτελέσματος δεν είναι εύκολη. Για την απόδειξη του ανάλογου αποτελέσματος για

[5] Παρατηρούμε ότι για αυτή την κατεύθυνση του ισχυρισμού δεν απαιτείται η υπόθεση της συμπάγειας του Y. Δηλαδή ισχύει γενικά ότι αν μία συνάρτηση παίρνει τιμές σε ένα χώρο Hausdorff, το γράφημά της είναι κλειστό σύνολο.

συνεκτικούς χώρους (Θεώρημα 8.1.12), η περίπτωση του αυθαίρετου γινομένου ανάγεται με ένα απλό επιχείρημα στο γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συνεκτικών χώρων. Όμως η τεχνική αυτή καθίσταται ανέφικτη όταν κανείς καλείται να αποδείξει ότι το καρτεσιανό γινόμενο μίας αυθαίρετης οικογένειας συμπαγών χώρων είναι συμπαγής χώρος. Επομένως, κρίνεται αναγκαία η χρήση διαφορετικών μεθόδων επίλυσης του προβλήματος αυτού. Στην ακόλουθη παράγραφο παρουσιάζουμε δύο τέτοιες μεθόδους.

9.3 Το Θεώρημα Tychonoff

Παρατήρηση 9.3.1. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων, τέτοια ώστε ο χώρος $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ να είναι συμπαγής. Τότε κάθε χώρος X_i είναι συμπαγής (αφού η αντίστοιχη προβολή $\pi_i : X \to X_i$ είναι συνεχής και επί).*

Λήμμα 9.3.2. *Έστω X ένας μη συμπαγής τοπολογικός χώρος. Τότε υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{U}_0$ του X, χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα, με την ιδιότητα*

> *Αν $n \in \mathbb{N}$ και $V_0, V_1, \dots V_n \subseteq X$ ανοικτά, ώστε $\bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k \subseteq V_0$ και $V_0 \in \mathcal{U}_0$, τότε υπάρχει $k \in \{1, \dots, n\}$ ώστε $V_k \in \mathcal{U}_0$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο

$$\Sigma = \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ ανοικτό κάλυμμα του } X \text{ χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμά}\}$$

Τότε $\Sigma \neq \emptyset$, αφού ο X δεν είναι συμπαγής. Προφανώς το $(\Sigma, \subseteq)$ είναι ένα διατεταγμένο σύνολο. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η υπόθεση του Λήμματος του Zorn, δηλαδή ότι κάθε αλυσίδα στο Σ έχει μέγιστο στοιχείο. Έστω μία μη κενή αλυσίδα $C = \{\mathcal{U}_j : j \in J\} \subseteq \Sigma$. Θέτουμε $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{j\in J} U_j$. Τότε, προφανώς το $\mathcal{U}$ είναι ένα ανω φράγμα της αλυσίδας, συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{U} \in \Sigma$.

Προφανώς το $\mathcal{U}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X κι επιπλέον αν $\{U_1, U_2, \dots U_n\} \subseteq \mathcal{U}$ τότε υπάρχει ένα ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{U}_{j_0} \in C$ με $\{U_1, U_2, \dots U_n\} \subseteq \mathcal{U}_{j_0}$ (γιατί;) και αφού $\mathcal{U}_{j_0} \in \Sigma$, έχουμε ότι το $\{U_1, U_2, \dots U_n\}$ δεν είναι ένα (πεπερασμένο) κάλυμμα του X. Άρα το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{U}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα κι επομένως $\mathcal{U} \in \Sigma$. Έτσι, από το Λήμμα του Zorn έχουμε ότι η οικογένεια Σ έχει ένα μεγιστικό στοιχείο, έστω $\mathcal{U}_0$.

Ισχυρισμός. *Αν έχουμε ένα $U \subseteq X$ ανοικτό με $U \notin \mathcal{U}_0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $U_1, \dots U_n \in \mathcal{U}_0$ ώστε $X = (U_1 \cup \cdots \cup U_n) \cup U$.*

Πράγματι, έχουμε ότι το $\{U\} \cup \mathcal{U}_0$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X, γνήσια μεγαλύτερο από το $\mathcal{U}_0$. Από τη μεγιστικότητα του $\mathcal{U}_0$, έπεται ότι $\mathcal{U}_0 \cup \{U\} \notin \Sigma$, δηλαδή ότι το ανοικτό κάλυμμα $\{U\} \cup \mathcal{U}_0$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Συνεπώς, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $U_1, \dots U_n \in \mathcal{U}_0$ ώστε $X = (U_1 \cup \cdots \cup U_n) \cup U$.

Δείχνουμε τώρα ότι το $\mathcal{U}_0$ έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $V_0, V_1, \dots, V_n \subseteq X$ ανοικτά σύνολα, με $\bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k \subseteq V_0$. Υποθέτουμε ότι $V_k \notin \mathcal{U}_0$ για $k = 1, \dots n$ και θα αποδείξουμε ότι $V_0 \notin \mathcal{U}_0$. Αφού $V_k \notin \mathcal{U}_0$, από τον ισχυρισμό έχουμε ότι υπάρχει $n_k \in \mathbb{N}$ και $U_1^k, \dots U_{n_k}^k \in \mathcal{U}_0$, ώστε $X = (U_1^k \cup \cdots \cup U_{n_k}^k) \cup V_k$, για $k = 1, \dots n$. Τότε (εξηγήστε γιατί):

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} (U_1^k \cup \cdots \cup U_{n_k}^k) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k \right) = \bigcup_{k=1}^{n} (U_1^k \cup \cdots \cup U_{n_k}^k) \cup V_0.$$

Αφού $U_1^k, \ldots U_{n_k}^k \in \mathcal{U}_0$ για $k = 1, \ldots n$, και το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{U}_0$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, έπεται ότι $V_0 \notin \mathcal{U}_0$.

Λήμμα 9.3.3. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων κι έστω ότι ο χώρος $X = \prod_{i\in I} X_i$ δεν είναι συμπαγής. Τότε, υπάρχει $i_0 \in I$, ώστε*

$$X_{i_0} = \bigcup \{W \subseteq X_{i_0} : W \text{ ανοικτό στο } X_{i_0} \text{ και } \pi_{i_0}^{-1}(W) \in \mathcal{U}_0\},$$

όπου $\mathcal{U}_0$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X, όπως περιγράφεται στο Λήμμα 9.3.2.

Απόδειξη: Έστω, προς άτοπο, ότι το ζητούμενο δεν ισχύει. Τότε, για κάθε $i \in I$, υπάρχει ένα $y_i \in X \setminus \bigcup\{W \subseteq X_{i_0} : W$ ανοικτό στο X_{i_0} και $\pi_{i_0}^{-1}(W) \in \mathcal{U}_0\}$. Έτσι ορίζεται ένα στοιχείο $y = (y_i)_{i\in I} \in X$. Αφού το $\mathcal{U}_0$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X, υπάρχει ανοικτό σύνολο $V \in \mathcal{U}_0$, με $y \in V$. Αφού το V είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο B (από την κανονική βάση της καρτεσιανής τοπολογίας), ώστε $y \in B \subseteq V$. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(W_k), \text{ όπου κάθε } W_k \text{ είναι ανοικτό στο } X_{i_k}, \text{ για } k = 1 \ldots n,$$

άρα $\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(W_k) \subseteq V$. Επιπλέον, τα σύνολα $\pi_{i_k}^{-1}(W_k)$ (για $k = 1, \ldots n$), V είναι ανοικτά και $V \in \mathcal{U}_0$. Άρα από την επιλογή του καλύμματος $\mathcal{U}_0$, έπεται ότι υπάρχει ένα $k \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $\pi_{i_k}^{-1}(W_k) \in \mathcal{U}_0$. Επομένως, $y \in B \Rightarrow y \in \pi_{i_k}^{-1}(W_k) \Rightarrow y_{i_k} \in W_k$, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την επιλογή του y_{i_k}.

Θεώρημα 9.3.4 (Tychonoff). *Αν $(X_i)_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων, τότε ο χώρος $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ισοδύναμα ότι αν ο χώρος X δεν είναι συμπαγής, τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε ο χώρος X_{i_0} να μην είναι συμπαγής. Αφού ο X δεν είναι συμπαγής, από το Λήμμα 9.3.3, έχουμε ότι υπάρχει ένα $i_0 \in I$, ώστε η οικογένεια

$$\mathcal{W} = \{W \subseteq X_{i_0} : W \text{ ανοικτό στο } X_{i_0} \text{ και } \pi_{i_0}^{-1}(W) \in \mathcal{U}_0\}$$

να είναι ανοικτό κάλυμμα του X_{i_0}.

Αν $W_1, \ldots, W_n$ είναι στοιχεία αυτού του καλύμματος, τότε $\pi_{i_0}^{-1}(W_1), \ldots, \pi_{i_0}^{-1}(W_n) \in \mathcal{U}_0$ κι επειδή το $\mathcal{U}_0$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, έχουμε ότι

$$X \neq \bigcup_{k=1}^{n} \pi_{i_0}^{-1}(W_k) = \pi_{i_0}^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} W_k\right).$$

Άρα $\bigcup_{k=1}^{n} W_k \neq X_{i_0}$, αφού η προβολή $\pi_{i_0} : X \to X_{i_0}$ είναι επί. Επομένως το ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{W}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, συνεπώς ο χώρος X_{i_0} δεν είναι συμπαγής.