ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Ενότητα: Μετρικοποιησιμότητα

Γεώργιος Κουμουλλής

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

7 Μετρικοποιησιμότητα

Έχουμε αποκτήσει πλέον τα απαραίτητα αφόδια για να αποδείξουμε δύο ιδιαίτερα σημαντικά θεωρήματα για την Τοπολογία, το Θεώρημα Urysohn (που χαρακτηρίζει τους μετρικοποιήσιμους διαχωρίσιμους τοπολογικούς χώρος) και το ισχυρότατο Θεώρημα Nagata-Smirnov-Bing, το οποίο χαρακτηρίζει πλήρως τους μετρικοποιήσιμους τοπολογικούς χώρους. Μέσα από τη διερεύνηση που έχουμε πραγματοποιήσει στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, ίσως να έχουν αρχίσει να αποσαφηνίζονται οι ιδιότητες που είναι αναγκαίο να έχει ένας τοπολογικός χώρος για να είναι ομοιομορφικός με ένα μετρικό χώρο. Αυτές οι ιδιότητες θα έχουν κεντρικό ρόλο, όχι κατά τον ορισμό μίας μετρικής στον τοπολογικό χώρο (δε θα είναι αυτός ο στόχος μας, τουλάχιστον όχι άμεσα), αλλά κατά την εμφύτευση του τοπολογικού χώρου σε ένα μετρικό χώρο. Μία τέτοια τοπολογική εμφύτευση έχει φυσικά ως συνέπεια τη μετρικοποιησιμότητα του χώρου.

7.1 Το Θεώρημα μετρικοποιησιμότητας Urysohn

Προτού προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος μετρικοποιησιμότητας Urysohn, πρέπει να αναπτύξουμε μία ισχυρή τεχνική τοπολογικής εμφύτευσης. Το *Λήμμα εμφύτευσης* (Θεώρημα 7.1.3) αποτελεί αυτή την τεχνική. Το Θεώρημα μετρικοποιησιμότητας Urysohn, μπορεί να μην παρουσιάζει έναν πλήρη χαρακτηρισμό των μετρικοποιήσιμων χώρων, αλλά διευκρινίζει σε μεγάλο βαθμό την πορεία που θα πρέπει να ακολουθήσουμε για την απόδειξη του λεπτότερου αποτελέσματος των Nagata-Smirnov-Bing. Οπωσδήποτε, αποτελεί ένα κομψό και βαθύ αποτέλεσμα για τη Συνολοθεωρητική Τοπολογία, το οποίο σε καμία περίπτωση δεν επισκιάζεται από το Θεώρημα Nagata-Smirnov-Bing.

Ορισμός 7.1.1. *Έστω X, Y_i τοπολογικοί χώροι και $f_i : X \to Y_i$ συναρτήσεις για κάθε $i \in I$. Λέμε ότι η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$:*

(i) διαχωρίζει τα σημεία του X, αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $f_{i_0}(x) \neq f_{i_0}(y)$.

(ii) διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του X, αν για κάθε $x \in X$ και $F \subsetneq X$ κλειστό με $x \neq F$, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(F)}$

Η συνάρτηση $\mathrm{e} : X \to \prod_{i\in I} Y_i$ με $\mathrm{e}(x) = (f_i(x))_{i\in I}$ λέγεται συνάρτηση εκτίμησης ως προς την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$.

Παρατήρηση 7.1.2. *Αν ο X είναι T_1 τοπολογικός χώρος, τότε κάθε οικογένεια συναρτήσεων που διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του X, διαχωρίζει τα σημεία του X.*

Θεώρημα 7.1.3 (Λήμμα εμφύτευσης). *Έστω X, Y_i τοπολογικοί χώροι, $f_i : X \to Y_i$ συναρτήσεις για κάθε $i \in I$ και e η συνάρτηση εκτίμησης ως προς $(f_i)_{i\in I}$. Τότε:*

(i) Η e είναι συνεχής $\iff$ η f_i είναι συνεχής για κάθε $i \in I$.

(ii) Η e είναι $1-1$ $\iff$ η $(f_i)_{i\in I}$ διαχωρίζει τα σημεία.

(iii) Αν η (f_i) διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του X, τότε η $\mathrm{e} : X \to \mathrm{e}(X)$ είναι ανοικτή.

(iv) Αν η οικογένεια (f_i) αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του X, τότε η $\mathrm{e} : X \to \mathrm{e}(X)$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή η $\mathrm{e} : X \to \prod_{i\in I} Y_i$ είναι τοπολογική εμφύτευση.

Απόδειξη: (i) Αν $\pi_i : \prod_{i\in I} Y_i \to Y_i$ είναι η προβολή στην $i-$συντεταγμένη, για $i \in I$, τότε

$$\mathrm{e} \text{ συνεχής } \iff \pi_i \circ \mathrm{e} \text{ συνεχής } \forall i \in I \iff f_i \text{ συνεχής } \forall i \in I.$$

(ii) Άμεσο, από τον ορισμό της e.

(iii) Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό και $x \in U$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathrm{e}(U)$ είναι περιοχή του $\mathrm{e}(x)$ στον υπόχωρο $\mathrm{e}(X)$, δηλαδή ότι υπάρχει V ανοικτό στο $\prod_{i\in I} Y_i$ ώστε

$$\mathrm{e}(x) \in V \cap \mathrm{e}(X) \subseteq \mathrm{e}(U)$$

(διότι τότε το $\mathrm{e}(U)$ θα είναι περιοχή κάθε σημείου του, στον υπόχωρο $\mathrm{e}(X)$, άρα θα είναι ανοικτό στον $\mathrm{e}(X)$).

Έχουμε ότι $x \notin U^c$. Από την υπόθεση, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $f_{i_0}(x) \notin \overline{f_{i_0}(U^c)}$, δηλαδή $f_{i_0}(x) \in Y_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(U^c)}$. Θέτουμε $V = \pi_{i_0}^{-1}(Y_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(U^c)})$. Τότε το V είναι ανοικτό στο $\prod_{i\in I} Y_i$. Ακόμη, έχουμε ότι

$$\pi_{i_0}(\mathrm{e}(x)) = f_{i_0}(x) \in Y_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(U^c)}$$

κι επομένως $\mathrm{e}(x) \in V$, δηλαδή $\mathrm{e}(x) \in V \cap \mathrm{e}(X)$. Έστω ένα $y \in V \cap \mathrm{e}(X)$. Αφού $y \in \mathrm{e}(X)$, έπεται ότι $y = \mathrm{e}(z) = (f_i(z))$ για κάποιο $z \in X$. Αφού $y \in V$, έπεται ότι $\pi_{i_0}(y) = f_{i_0}(z) \in Y_{i_0} \setminus \overline{f_{i_0}(U^c)}$. Άρα $f_{i_0}(z) \notin f_{i_0}(U^c)$ και έτσι, $z \notin U^c$, δηλαδή $z \in U$. Επομένως $y = \mathrm{e}(z) \in \mathrm{e}(U)$. Συνεπώς, $V \cap \mathrm{e}(X) \subseteq \mathrm{e}(U)$. Συμπεραίνουμε ότι το V είναι το ζητούμενο ανοικτό σύνολο.

(iv) Έπεται από τα (i), (ii) και (iii).

Καθώς αναπτύχθηκαν οι απαραίτητοι μηχανισμοί, είμαστε σε θέση να δείξουμε το Θεώρημα Urysohn.

Θεώρημα 7.1.4 (μετρικοποιησιμότητας του Urysohn)**.** *Για ένα τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι διαχωρίσιμος μετρικοποιήσιμος.

(ii) Ο X είναι T_1, κανονικός και δεύτερος αριθμήσιμος.

(iii) Ο X είναι ομοιομορφικός με υπόχωρο του $[0,1]^{\mathbb{N}}$.[1]

Απόδειξη: (i)⇒(ii) Κάθε μετρικός χώρος είναι κανονικός. Επίσης κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

(ii)⇒(iii) Αφού ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος, είναι και χώρος Lindelöf, το οποίο έπεται (αφού ο X είναι επιπλέον κανονικός) ότι ο X είναι φυσιολογικός χώρος. Έστω $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη βάση του X. Θέτουμε:

$$\mathcal{P} = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \overline{B}_m \subseteq B_n\}.$$

Για κάθε $(m,n) \in \mathcal{P}$ τα $\overline{B}_m$ και B_n^c είναι ξένα, κλειστά και αφού ο X είναι φυσιολογικός, από το Λήμμα του Urysohn, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_{m,n} : X \to [0,1]$ ώστε $f_{m,n}(\overline{B}_m) \subseteq \{0\}$ και $f_{m,n}(B_n^c) \subseteq \{1\}$.

Ισχυρισμός. *Η οικογένεια $(f_{m,n})_{(m,n)\in\mathcal{P}}$ διαχωρίζει σημεία και κλειστά υποσύνολα του X (άρα διαχωρίζει και τα σημεία του X, αφού ο X είναι T_1).*

[1] Ο χώρος $[0,1]^{\mathbb{N}}$ καλείται *κύβος του Hilbert*.

Έστω $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$, δηλαδή $x \in F^c$, το οποίο είναι ανοικτό σύνολο. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B_{n_0} \subseteq F^c$. Αφού ο X είναι κανονικός, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \overline{B}_{m_0} \subseteq B_{n_0}$. Τότε, $(m_0, n_0) \in \mathcal{P}$, $f_{m_0,n_0}(x) = 0$ και $f_{m_0,n_0}(F) \subseteq \{1\}$ (αφού $x \in \overline{B}_{m_0}$ και $F \subseteq B^c_{n_0}$), άρα $f_{m_0,n_0}(x) \notin \overline{f_{m_0,n_0}(F)}$.

Αφού η οικογένεια $(f_{m,n})_{(m,n)\in\mathcal{P}}$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, από το Λήμμα εμφύτευσης, έπεται ότι ο X είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του $[0,1]^{\mathcal{P}}$, άρα και του $[0,1]^{\mathbb{N}}$, αφού το $\mathcal{P}$ είναι αριθμήσιμο.

(iii)⇒(i) Ο X είναι μετρικοποιήσιμος, αφού ο χώρος $[0,1]^{\mathbb{N}}$ είναι μετρικοποιήσιμος. Επίσης, ο $[0,1]^{\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος, άρα κάθε υπόχωρός του είναι διαχωρίσιμος (Πρόταση 6.3.8). Επομένως ο X είναι διαχωρίσιμος.

7.2 Το Θεώρημα Nagata-Smirnov-Bing

Το Θεώρημα μετρικοποιησιμότητας του Urysohn αποτελεί ένα πρώτο, αλλά και ουσιαστικό βήμα προς το χαρακτηρισμό των μετρικοποιήσιμων τοπολογικών χώρων. Οι συνθήκες που επιβάλλει είναι βέβαια ικανές, αλλά όχι αναγκαίες για τη μετρικοποιησιμότητα ενός (εν γένει όχι διαχωρίσιμου) τοπολογικού χώρου. Το Θεώρημα Nagata-Smirnov-Bing παρουσιάζει έναν πλήρη χαρακτηρισμό των μετρικοποιήσιμων τοπολογικών χώρων. Καθώς η κανονικότητα ενός τοπολογικού χώρου είναι (εμφανώς) αναγκαία για τη μετρικοποιησιμότητά του, το λεπτό σημείο του Θεωρήματος είναι η περιγραφή μίας ουσιαστικά ασθενέστερης συνθήκης από την ύπαρξη αριθμήσιμης βάσης, η οποία θα συνεχίζει να αναγκάζει ένα χώρο να είναι μετρικοποιήσιμος, αλλά παράλληλα θα ικανοποιείται από κάθε μετρικό χώρο.

Ορισμός 7.2.1. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{F}$ καλείται:*

(i) *τοπικά πεπερασμένη, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $V \in \mathfrak{N}_x$ που τέμνει, το πολύ πεπερασμένο, πλήθος στοιχείων της $\mathcal{F}$.*

(ii) *διακριτή, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $V \in \mathfrak{N}_x$ που τέμνει το πολύ ένα στοιχείο της $\mathcal{F}$.*

(iii) *$\sigma-$τοπικά πεπερασμένη (αντίστοιχα $\sigma-$διακριτή), αν υπάρχουν οικογένειες $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$ τοπικά πεπερασμένες (αντίστοιχα διακριτές) ώστε $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$.*

Παρατηρήσεις 7.2.2. *(α) Κάθε διακριτή οικογένεια είναι τοπικά πεπερασμένη και αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα. Άρα κάθε $\sigma-$διακριτή οικογένεια είναι $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη.*

(β) Κάθε αριθμήσιμη οικογένεια είναι $\sigma-$διακριτή.

Θεώρημα 7.2.3 (μετρικοποιησιμότητας Nagata-Smirnov-Bing). *Για έναν τοπολογικό χώρο X, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο X είναι μετρικοποιήσιμος.*

(ii) *(Bing) Ο X είναι T_1, κανονικός και έχει $\sigma-$διακριτή βάση για την τοπολογία του.*

(iii) *(Nagata-Smirnov) Ο X είναι T_1 κανονικός και έχει $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη βάση για την τοπολογία του.*

Το Θεώρημα 7.2.3 αποτελεί την ενοποίηση των Θεωρημάτων Nagata-Smirnov ((i)⇔(iii)) και Bing ((i)⇔(ii)). Σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.2.2(α), η συνθήκη που επιβάλλει το Θεώημα Bing για τη μετρικοποιησιμότητα ενός τοπολογικού χώρου είναι ισχυρότερη από την αντίστοιχη του Θεωρήματος Nagata-Smirnov (υπό την έννοια: (ii)⇒(iii) στο Θεώρημα 7.2.3). Επίσης, σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.2.2(β), το Θεώρημα Bing αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Urysohn.

Η απόδειξη του Θεωρήματος θα γίνει σε δύο μέρη ((i)⇒(ii), (iii)⇒(i)), σε κάθε ένα από τα οποία θα χρειαστούμε μία σειρά Λημμάτων. Το πρώτο από αυτά είναι μία Παρατήρηση, συνολοθεωρητικής φύσης, του Stone, για την απόδειξη της οποίας ουσιώδης είναι ο ρόλος του Αξιώματος της Επιλογής, με τη μορφή του Θεωρήματος της Καλής Διάταξης.

Ορισμός 7.2.4. *Έστω ένας τοπολογικός χώρος X και $\mathcal{A}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Το κάλυμμα $\mathcal{B}$ καλείται εκλέπτυνση του $\mathcal{A}$ αν για κάθε $U \in \mathcal{B}$ υπάρχει $V \in \mathcal{A}$ ώστε $U \subseteq V$.*

Λήμμα 7.2.5 (Stone)**.** *Έστω μετρικός χώρος (X, ρ) και $\mathcal{A} = \{U_i : i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει $\sigma-$διακριτή οικογένεια ανοικτών συνόλων $\mathcal{E}$, η οποία αποτελεί εκλέπτυνση του $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη: Με χρήση του Θεωρήματος Καλής Διάταξης, επιλέγουμε μία καλή διάταξη $\prec$ των στοιχείων του $\mathcal{A}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $U \in \mathcal{A}$, ορίζουμε

$$S_n(U) = \{x \in X : B(x, \tfrac{1}{n}) \subseteq U\}.$$

Έστω τώρα

$$T_n(U) = S_n(U) \setminus \bigcup_{V \prec U} V.$$

(1) Έστω $V, W \in \mathcal{A}$ με $V \neq W$. Αν $x \in T_n(V)$ και $y \in T_n(W)$, τότε $\rho(x, y) \geq \frac{1}{n}$.

Πράγματι, δίχως βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $V \prec W$. Αφού $x \in T_n(V)$, έχουμε ότι $x \in S_n(V)$, άρα $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq V$. Επίσης, αφού $y \in T_n(W)$ και $V \prec W$, έπεται ότι $y \notin V$, άρα και $y \notin B(x, \frac{1}{n})$. Επομένως $\rho(x, y) \geq \frac{1}{n}$.

Ορίζουμε ακόμη, για $U \in \mathcal{A}$ και $n \in \mathbb{N}$:

$$E_n(U) = \bigcup_{x \in T_n(U)} B(x, \tfrac{1}{3n})$$

(2) Έστω $V, W \in \mathcal{A}$ με $V \neq W$. Αν $x \in E_n(V)$ και $y \in E_n(W)$, τότε $\rho(x, y) > \frac{1}{3n}$.

Πράγματι, από τον ορισμό των $E_n(V)$ και $E_n(W)$, υπάρχουν $v \in T_n(V), w \in T_n(W)$, ώστε $\rho(x, v) < \frac{1}{3n}$ και $\rho(y, w) < \frac{1}{3n}$. Από το (1) γνωρίζουμε ότι $\rho(v, w) \geq \frac{1}{n}$. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\rho(v, w) &\leq \rho(v, x) + \rho(x, y) + \rho(y, w) \Longleftrightarrow \\
\rho(x, y) &\geq \rho(v, w) - \rho(v, x) - \rho(y, w) \\
&> \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{3n} \\
&= \frac{1}{3n}
\end{aligned}$$

(3) Για κάθε $U \in \mathcal{A}$, $E_n(U) \subseteq U$.

Πράγματι, αν $y \in E_n(U)$, τότε $y \in B(x, \frac{1}{3n})$ για κάποιο $x \in T_n(U)$. Από τον ορισμό του $T_n(U)$ έπεται ότι $x \in S_n(U)$ και κατά συνέπεια $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Αφού τώρα $\rho(x, y) < \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}$, έχουμε ότι $y \in B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Άρα $E_n(U) \subseteq U$.

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε την κατάλληλη οικογένεια συνόλων. Θέτουμε

$$\mathcal{E}_n = \{E_n(U) : U \in \mathcal{A}\} \quad \text{και} \quad \mathcal{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n.$$

(4) Η $\mathcal{E}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X.

Πράγματι, κάθε στοιχείο της $\mathcal{E}$ είναι της μορφής $E_n(U)$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $U \in \mathcal{A}$, το οποίο είναι ανοικτό σύνολο (εμφανές από τον ορισμό του). Άρα η $\mathcal{E}$ αποτελείται από ανοικτά σύνολα. Έστω τώρα ένα $x \in X$ και U να είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathcal{A}$ (σύμφωνα με την καλή διάταξη που επιλέξαμε) ώστε $x \in U$ (τέτοιο στοιχείο υπάρχει, αφού το $\mathcal{A}$ είναι κάλυμμα του X). Αφού το U είναι ανοικτό, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in S_n(U)$ και ότι $x \notin V$ για κάθε $V \prec U$, σύμφωνα με την επιλογή του U. Επομένως, $x \in T_n(U)$. Έτσι, έχουμε ότι

$$x \in T_n(U) \subseteq E_n(U) \in \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E},$$

δηλαδή η $\mathcal{E}$ καλύπτει το X.

(5) Η $\mathcal{E}$ αποτελεί εκλέπτυνση του $\mathcal{A}$.

Πράγματι, κάθε στοιχείο της $\mathcal{E}$ είναι της μορφής $E_n(U)$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $U \in \mathcal{A}$, και από το (3) έχουμε ότι $E_n(U) \subseteq U$.

(6) Κάθε $\mathcal{E}_n$ είναι διακριτή οικογένεια, κατά συνέπεια η $\mathcal{E}$ είναι $\sigma-$διακριτή οικογένεια.

Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$ και ένα $x \in X$. Έστω ότι υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $U \in \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε $B(x, \frac{1}{6n}) \cap E_n(U) \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει ένα $y \in E_n(U)$ ώστε $\rho(x,y) < \frac{1}{6n}$. Έστω τώρα ένα $V \in \mathcal{A}$, με $V \neq U$, και ένα $z \in E_n(V)$. Από το (2) έχουμε ότι $\rho(y,z) > \frac{1}{3n}$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \rho(x,z) &\geq \rho(y,z) - \rho(x,y) \\ &> \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n} \\ &= \frac{1}{6n}. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $z \notin B(x, \frac{1}{6n})$ κι επομένως η ανοικτή περιοχή $B(x, \frac{1}{6n})$ μπορεί να τέμνει το πολύ ένα στοιχείο της $\mathcal{E}_n$. Άρα η $\mathcal{E}_n$ είναι διακριτή οικογένεια.

Από τα (4),(5),(6) έπεται ότι η $\mathcal{E}$ είναι η ζητούμενη οικογένεια συνόλων.

Τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στον αρχικό μας σκοπό, να αποδείξουμε ότι κάθε μετρικός χώρος X έχει $\sigma-$διακριτή βάση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οικογένεια συνόλων $\mathcal{A}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, άρα από το Λήμμα του Stone έχει $\sigma-$διακριτή εκλέπτυνση από ανοικτά σύνολα

$$\mathcal{E}^n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{E}^n_m.$$

Παρατήρηση 7.2.6. *Αν $A \in \mathcal{E}^n$ και $a, b \in A$, τότε $\rho(a,b) < \frac{2}{n}$. Πράγματι, αφού η $\mathcal{E}^n$ είναι εκλέπτυνση του καλύμματος $\mathcal{A}_n$, $A \subseteq B(x, \frac{1}{n})$ για κάποιο $x \in X$. Επομένως $a, b \in B(x, \frac{1}{n})$, άρα*

$$\rho(a,b) \leq \rho(a,x) + \rho(x,b) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}.$$

Θέτουμε:

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}^n = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \mathcal{E}^n_m.$$

Η $\mathcal{E}$ είναι μία $\sigma-$διακριτή οικογένεια αφού είναι αριθμήσιμη ένωση των διακριτών οικογενειών $\mathcal{E}^n_m$. Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{E}$ είναι βάση του X. Έστω ένα ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in U$ υπάρχει $E \in \mathcal{E}$ ώστε $x \in E \subseteq U$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq U$. Επιλέγουμε ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{2}{n} < \varepsilon$. Αφού το $\mathcal{E}^n$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα $E \in \mathcal{E}^n$ ώστε $x \in E$. Από την Παρατήρηση 7.2.6, αν $y \in E$, τότε $\rho(x,y) < \frac{2}{n} < \varepsilon$. Άρα, $y \in B(x,\varepsilon)$ κι επομένως, $x \in E \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq U$. Έτσι έχουμε ότι η $\mathcal{E}$ είναι βάση του X. Υπενθυμίζοντας επιπλέον ότι κάθε μετρικός χώρος είναι κανονικός και T_1, έχουμε δείξει, λοιπόν, το ακόλουθο.

Θεώρημα 7.2.7. *Έστω ένας μετρικός χώρος (X,ρ). Ο X έχει $\sigma-$διακριτή βάση (επομένως ισχύει η κατεύθυνση (i)⇒(ii) του Θεωρήματος 7.2.3).*

Μένει να δείξουμε ότι ένας T_1 κανονικός χώρος X με $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη βάση είναι μετρικοποιήσιμος. Κεντρικός μας στόχος είναι να εμφυτεύσουμε τοπολογικά το X σε ένα μετρικό χώρο. Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα Λήμματα:

Λήμμα 7.2.8. *Έστω $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ μία $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη οικογένεια υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X και $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Τότε ισχύει ότι $\overline{A} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.*

Απόδειξη: Για κάθε $i \in I$ ισχύει ότι $A_i \subseteq A \subseteq \overline{A}$, άρα $\overline{A_i} \subseteq \overline{A}$. Επομένως

$$\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{A}$$ [2]

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{A}$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη, υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \in \mathfrak{N}_x$ η οποία να τέμνει πεπερασμένα στο πλήθος στοιχεία της $\overline{A}$, έστω τα $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Έστω, προς άτοπο, ότι το x δεν περιέχεται σε κανένα από τα $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_k}$, δηλαδή $x \notin \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i}$, το οποίο είναι κλειστό σύνολο. Τότε το σύνολο $U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i}$ είναι ανοικτή περιοχή του x, ξένη προς κάθε στοιχείο της οικογένειας $\overline{A}$. Αυτό όμως έπεται ότι $x \notin \overline{A}$, πράγμα άτοπο. Συνεπώς το x ανήκει στο $\overline{A_i}$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Επομένως,

$$\overline{A} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Από τα παραπάνω, έπεται η επιθυμητή ισότητα.

Λήμμα 7.2.9. *Αν ένας κανονικός χώρος X έχει μία $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη βάση $\mathcal{B}$, τότε ο X είναι φυσιολογικός.*

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι η πληροφορία για τη μορφή των ανοικτών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου εμπεριέχεται, σε ικανοποιητικό βαθμό, στη δομή μίας «λεπτής» βάσης του χώρου. Για το λόγο αυτό, αναμένουμε ότι η ύπαρξη μίας $\sigma-$τοπικά πεπερασμένης βάσης θα μας επιτρέψει να περιγράψουμε με ένα λειτουργικό τρόπο τα ανοικτά σύνολα του X. Αυτό διατυπώνεται τυπικά με τον ακόλουθο τρόπο:

[2] Αυτό είναι γενικά αληθές για μία **τυχούσα** οικογένεια συνόλων σε ένα τοπολογικό χώρο.

Ισχυρισμός. *Έστω ένα $G \subseteq X$ ανοικτό. Τότε υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε*

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n.$$

Πράγματι, αφού η $\mathcal{B}$ είναι $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη, μπορούμε να γράψουμε $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, όπου κάθε $\mathcal{B}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω

$$C_n = \{B \in \mathcal{B}_n : \overline{B} \subseteq G\}$$

Τότε $C_n \subseteq \mathcal{B}_n$, άρα κάθε C_n οφείλει να είναι τοπικά πεπερασμένη οικογένεια. Ορίζουμε

$$U_n = \bigcup C_n = \bigcup_{B\in C_n} B.$$

Κάθε U_n είναι ανοικτό (ως ένωση ανοικτών) και από το Λήμμα 7.2.8, $\overline{U}_n = \bigcup_{B\in C_n} \overline{B}$, αφού η C_n είναι τοπικά πεπερασμένη. Επίσης, αφού $\overline{B} \subseteq G$ για κάθε $B \in C_n$, έχουμε ότι $\overline{U}_n \subseteq G$. Επομένως

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n \subseteq G.$$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $G \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Έστω $x \in G$. Τότε το σύνολο G^c είναι κλειστό και $x \notin G^c$. Από την κανονικότητα του X, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V, ώστε $x \in U$ και $G^c \subseteq V$, δηλαδή

$$x \in U \subseteq V^c \subseteq G.$$

Για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο $B \in \mathcal{B}_n$ ώστε $x \in B \subseteq U \subset V^c$. Αφού το V^c είναι κλειστό σύνολο, έχουμε ότι $\overline{B} \subseteq V^c \subseteq G$, επομένως $B \in C_n$. Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$x \in B \subseteq \bigcup_{B\in C_n} B = U_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Άρα $G \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Δείχνουμε τώρα ότι ο X είναι φυσιολογικός χώρος. Έστω $A, B \subseteq X$ ξένα και κλειστά σύνολα. Τότε το σύνολο B^c είναι ανοικτό και, σύμφωνα με τον ισχυρισμό, υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $B^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n$. Προφανώς, κάθε $\overline{U}_n$ είναι ξένο προς το B και $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Εντελώς ανάλογα, υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που καλύπτουν το B με κάθε $\overline{V}_n$ να είναι ξένο προς το A.

Με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάσαμε τα ανοικτά σύνολα $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ τα οποία περιέχουν τα A και B, αντίστοιχα. Βέβαια, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι αυτά τα σύνολα είναι ξένα, γι' αυτό και κάνουμε μία πιο λεπτή κατασκευή. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε:

$$\tilde{U}_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i \quad \text{και} \quad \tilde{V}_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i.$$

Τα σύνολα $\tilde{U}_n$, $\tilde{V}_n$ είναι προφανώς ανοικτά. Ορίζουμε τώρα τα σύνολα:

$$\tilde{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{U}_n \qquad \text{και} \qquad \tilde{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{V}_n$$

Τα $\tilde{U}$ και $\tilde{V}$ είναι προφανώς ανοικτά, ως ενώσεις ανοικτών συνόλων. Ισχυριζόμαστε ότι είναι ξένα και περιέχουν τα A και B αντίστοιχα.

- Έστω ένα $x \in A$. Τότε $x \in U_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, αφού $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Επιπλέον $x \notin \overline{V}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς
$$x \in U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i = \tilde{U}_n \subseteq \tilde{U}.$$
Άρα $A \subseteq \tilde{U}$. Ομοίως, δείχνει κανείς ότι $B \subseteq \tilde{V}$.

- Έστω, προς άτοπο, ότι $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$. Έστω, λοιπόν, ένα $x \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$. Υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε
$$x \in \tilde{U}_m = U_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \overline{V}_i \quad \text{και} \quad x \in \tilde{V}_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i.$$
Έστω ότι $m \leq n$. Τότε $x \in U_m$, αλλά $x \notin \overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_m, \ldots, \overline{U}_n$, το οποίο είναι άτοπο. Ομοίως ερχόμαστε σε αντίφαση αν υποθέσουμε ότι $n \leq m$. Επομένως, τα $\tilde{U}$ και $\tilde{V}$ είναι ξένα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα ανοικτά σύνολα $\tilde{U}$ και $\tilde{V}$ είναι ξένα και περιέχουν τα A και B αντίστοιχα. Άρα ο χώρος X είναι φυσιολογικός.

Παρατήρηση 7.2.10. *Ο ισχυρισμός στο Λήμμα 7.2.9 έχει ως άμεση συνέπεια ότι κάθε ανοικτό σύνολο σε έναν κανονικό χώρο με $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη βάση είναι F_σ σύνολο*[3] *και, ισοδύναμα, κάθε κλειστό σύνολο είναι G_δ.*

Θεώρημα 7.2.11. *Έστω ένας T_1 κανονικός τοπολογικός χώρος. Αν ο X έχει μία $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη βάση $\mathcal{B}$, τότε ο X είναι μετρικοποιήσιμος (επομένως ισχύει η κατεύθυνση (iii)⇒(i) του Θεωρήματος 7.2.3).*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ο χώρος X εμφυτεύεται τοπολογικά στο χώρο $[0,1]^{\mathcal{B}}$, εφοδιασμένο με τη μετρική $\rho(p,q) = \sup_{B\in\mathcal{B}} |p(B) - q(B)|$, για $p, q \in [0,1]^{\mathcal{B}}$. Προτού συνεχίσουμε, ελέγχουμε ότι η ρ είναι μετρική.

(i) Για κάθε $B \in \mathcal{B}$ έχουμε $|p(B) - q(B)| \geq 0$. Επομένως $\rho(p,q) \geq 0$. Επίσης
$$\rho(p,q) = 0 \Leftrightarrow |p(B) - q(B)| = 0 \;\forall B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow p(B) = q(B) \;\forall B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow p = q.$$

(ii) $\rho(p,q) = \sup\limits_{B\in\mathcal{B}} |p(B) - q(B)| = \sup\limits_{B\in\mathcal{B}} |q(B) - p(B)| = \rho(q,p)$.

(iii) Έχουμε[4] διαδοχικά ότι
$$\begin{aligned}
\rho(p,r) &= \sup_{B\in\mathcal{B}} |p(B) - r(B)| \\
&\leq \sup_{B\in\mathcal{B}} \{|p(B) - q(B)| + |q(B) - r(B)|\} \\
&\leq \sup_{B\in\mathcal{B}} |p(B) - q(B)| + \sup_{B\in\mathcal{B}} |q(B) - r(B)| \\
&= \rho(p,q) + \rho(q,r)
\end{aligned}$$

[3] Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X καλείται *F_σ σύνολο* αν είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο είναι F_σ αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι G_δ.

[4] Υπενθυμίζουμε ότι αν $U, V \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup U + \sup V = \sup(U + V)$ (όπου συμβολίζουμε $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$) και αν $K \subseteq L \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup K \leq \sup L$.

Προχωρούμε με την κατασκευή της τοπολογικής εμφύτευσης. Έστω $F \subseteq X$ κλειστό. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ ώστε $F = f^{-1}(\{0\})$.

Πράγματι, από την Παρατήρηση 7.2.10, το F είναι κλειστό G_δ σύνολο. Επίσης, από το Λήμμα 7.2.9, ο X είναι φυσιολογικός χώρος και κατά συνέπεια, από την Πρόταση 5.4.17, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ $F = f^{-1}(\{0\})$.

Σημειώνουμε ότι, περνώντας στο συμπλήρωμα του F, έχουμε αποδείξει την ύπαρξη μίας γνήσια θετικής συνάρτησης από κάθε ανοικτό υποσύνολο του X στο $[0,1]$. Επίσης, με μία κατάλληλη σύνθεση (ποια;), μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f παίρνει τιμές στο διάστημα $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ (με $a < b$). Αφού η $\mathcal{B}$ είναι $\sigma-$τοπικά πεπερασμένη βάση, μπορούμε να τη γράψουμε στη μορφή $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, όπου κάθε $\mathcal{B}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη οικογένεια. Μάλιστα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_m = \emptyset$ για $n \neq m$ (γιατί;). Επομένως για κάθε βασικό ανοικτό σύνολο $B \in \mathcal{B}$ υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$ ώστε $B \in \mathcal{B}_n$ και από τα παραπάνω, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_B : X \to [0, \frac{1}{n}]$ ώστε $f_B^{-1}(\{0\}) = B^c$. Ορίζουμε την απεικόνιση:

$$\phi : X \to [0,1]^{\mathcal{B}} \quad \text{με} \quad \phi(x) = (f_B(x))_{B\in\mathcal{B}}.$$

• Η ϕ είναι $1-1$: Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Αφού ο χώρος X είναι κανονικός και T_1, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα $U, V \subseteq X$ με $x \in U$ και $y \in V$. Άρα, υπάρχει ένα βασικό ανοικτό σύνολο $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq U \subseteq V^c$. Κατά συνέπεια $f_B(x) > 0$ και $f_B(y) = 0$, άρα $\phi(x) \neq \phi(y)$.

• Η ϕ είναι συνεχής: Έστω $x \in X$. Για να δείξουμε τη συνέχεια της ϕ, πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ανοικτή περιοχή του $\phi(x)$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x με $\phi(U) \subseteq V$. Συγκεκριμένα, για κάθε $\varepsilon > 0$ ζητάμε ανοικτή περιοχή U του x με $\phi(U) \subseteq B(\phi(x), \varepsilon)$. Έστω ένα $\varepsilon > 0$. Για $n \in \mathbb{N}$, αφού η $\mathcal{B}_n$ είναι τοπικά πεπερασμένη, υπάρχει ανοικτή περιοχή U_n του x, που να τέμνει πεπερασμένα στο πλήθος σύνολα της $\mathcal{B}_n$. Αν ένα $B \in \mathcal{B}_n$ δεν τέμνει το U_n, τότε σαφώς δεν περιέχει το x και τότε $f_B(x) = 0$. Επιπλέον $f_B(y) = 0$ για κάθε $y \in U_n$. Επομένως $|f_B(x) - f_B(y)| = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $B \cap U_n \neq \emptyset$. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f_B : X \to [0, \frac{1}{n}]$ είναι συνεχής, συνεπώς για το ανοικτό σύνολο

$$(f_B(x) - \tfrac{\varepsilon}{2}, f_B(x) + \tfrac{\varepsilon}{2}) \cap [0, \tfrac{1}{n}] \subseteq [0, \tfrac{1}{n}]$$

θα υπάρχει μία ανοικτή περιοχή $W_n(B)$ του x, με

$$f_B(W_n(B)) \subseteq (f_B(x) - \tfrac{\varepsilon}{2}, f_B(x) + \tfrac{\varepsilon}{2}) \cap [0, \tfrac{1}{n}].$$

Όμως υπάρχουν μόλις πεπερασμένα στο πλήθος τέτοια B, έστω $B_1, \ldots, B_k$. Θέτουμε $V_n = U_n \cap \bigcup\limits_{i=1}^{k} W_n(B_i)$, το οποίο είναι ανοικτή περιοχή του x. Τότε, για κάθε $y \in V_n \subseteq W_n(B_i)$ έχουμε $|f_{B_i}(x) - f_{B_i}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι για κάθε $y \in V_n$ έχουμε $|f_B(x) - f_B(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $B \in \mathcal{B}_n$.

Τέλος, επιλέγουμε ένα $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε $V = \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_i$, το οποίο είναι ανοικτή περιοχή του x. Έστω $y \in V$. Τότε $y \in V_1, \ldots, V_N$, άρα για κάθε $n \leq N$ και $B \in \mathcal{B}_n$ έχουμε $|f_B(x) - f_B(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Για $n > N$ και $B \in \mathcal{B}_n$ γνωρίζουμε ότι $|f_B(x) - f_B(y)| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ (αφού $0 \leq f_B(z) \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $z \in X$). Επομένως για κάθε $y \in V$, $|f_B(x) - f_B(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$. Έτσι, δείξαμε ότι για κάθε $y \in V$

$$\rho(\phi(x), \phi(y)) = \sup_{B\in\mathcal{B}} |f_B(x) - f_B(y)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

δηλαδή $\phi(y) \in B(\phi(x), \varepsilon)$. Άρα η ϕ είναι συνεχής.

• Η $\phi^{-1} : \phi(X) \to X$ είναι συνεχής: Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό και $z \in \phi(U)$ υπάρχει σύνολο W ανοικτό στο $\phi(X)$, τέτοιο ώστε $z \in W \subseteq \phi(U)$. Αφού η ϕ είναι $1-1$, υπάρχει μοναδικό $x \in U$ ώστε $\phi(x) = z$. Αφού το U είναι ανοικτό, υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο $B_0 \in \mathcal{B}$, ώστε $x \in B_0 \subseteq U$. Επομένως $f_{B_0}(x) > 0$ και $f|_{B_0^c} = 0$.

Έστω $V = \{h : \mathcal{B} \to [0,1] : \ h|_{B_0} > 0\} \subseteq [0,1]^{\mathcal{B}}$, για το παραπάνω B_0. Ισχυριζόμαστε ότι το V είναι ανοικτό σύνολο. Πράγματι, έστω $h \in V$. Θεωρώντας την ανοικτή σφαίρα $B(h, h(B))$, για κάθε $g \in B(h, h(B))$

$$\begin{aligned} \rho(h,g) < h(B_0) &\implies |h(B) - g(B)| < h(B_0) \ \forall B \in \mathcal{B} \\ &\implies |h(B_0) - g(B_0)| < h(B_0) \\ &\implies g(B_0) > 0. \end{aligned}$$

Επομένως $g \in V$ και $B(h, h(B)) \subseteq V$. Άρα το V είναι ανοικτό.

Τώρα θεωρούμε το ανοικτό σύνολο στο $\phi(X)$, $W = V \cap \phi(X)$. Από την επιλογή του B_0, $f_{B_0}(x) > 0$. Άρα $\phi(x) \in V$ κι επομένως $g(x) \in W$. Μένει να δείξουμε ότι $W \subseteq \phi(U)$. Έστω μία συνάρτηση $p \in W$. Τότε $p = \phi(y)$ για μοναδικό $y \in X$. Αφού $p \in W = V \cap \phi(X) \subseteq V$, $f_{B_0}(y) = p(B_0) > 0$. Αυτό όμως έπεται ότι $y \in B_0 \subseteq U$, δηλαδή $p = \phi(y) \in \phi(U)$. Συνεπώς $W \subseteq \phi(U)$, άρα το $\phi(U)$ είναι ανοικτό. Δείξαμε, λοιπόν, ότι αν ένα $U \subseteq X$ είναι ανοικτό, το $\phi(U)$ είναι ανοικτό στο $\phi(X)$. Δηλαδή η ϕ είναι ανοικτή στην εικόνα της και κατά συνέπεια, η ϕ^{-1} είναι συνεχής.

Από τα παραπάνω έπεται ότι ο χώρος X είναι ομοιομορφικός με υπόχωρο ενός μετρικού χώρου, άρα είναι μετρικοποιήσιμος.

Έχοντας δείξει τα Θεωρήματα 7.2.7 και 7.2.11 (συνυπολογίζοντας την Παρατήρηση 7.2.2(α) έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του Θεωρήματος Nagata-Smirnov-Bing.