ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Ενότητα: Συνθήκες αριθμησιμότητας

Γεώργιος Κουμουλλής

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

6 Συνθήκες Αριθμησιμότητας

Μία άλλη σημαντική ιδιότητα που μπορεί να παρουσιάζει η τοπολογία ενός χώρου, είναι να παρουσιάζει μία ισχυρή έννοια πυκνότητας. Δηλαδή, ενδέχεται να αρκούν «λίγα» ανοικτά σύνολα για την πλήρη περιγραφή της (για παράδειγμα, ο χώρος μπορεί να διαθέτει μία αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία ή αριθμήσιμες βάσεις περιοχών για κάθε σημείο του). Θα θέλαμε να εξετάσουμε σε τι βαθμό μπορεί να διαθέτει ένας τοπολογικός χώρος αυτή την ιδιότητα. Για ακόμη μία φορά, αυτή η διερεύνηση δεν έχει ως μοναδικό σκοπό να περιγράψει τους τοπολογικούς χώρους με αυτή την έννοια πυκνότητας, αλλά και να μας οδηγήσει στις συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιεί ένας τοπολογικός χώρος για να είναι μετρικοποιήσιμος. Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε είναι ανάλογη με αυτή του προηγούμενου κεφαλαίου.

6.1 Διαχωρίσιμοι Χώροι

Η διαχωρισιμότητα είναι μία έννοια που έχει εμφανιστεί και κατά τη μελέτη των μετρικών χώρων και αφορά την ύπαρξη ενός πυκνού αριθμήσιμου συνόλου. Αρκετά από τα αποτελέσματα που είχαμε στην περίπτωση των μετρικών χώρων συνεχίζουν να ισχύουν. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας στη συμπεριφορά της διαχωρισιμότητας ως προς την τοπολογία γινόμενο, αλλά και την αλληλεπίδραση που έχει με τη φυσιολογικότητα ενός τοπολογικού χώρου (Λήμμα Jones).

Ορισμός 6.1.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται διαχωρίσιμος αν υπάρχει αριθμήσιμο $D \subseteq X$ που να είναι πυκνό στο X.*

Παραδείγματα 6.1.2. *(α) Ο χώρος $\mathbb{R}_S$ είναι διαχωρίσιμος, αφού το $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_S$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό, διότι $\mathbb{Q} \cap (a,b] \neq \emptyset$ για κάθε $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

(β) Αν ο X είναι διακριτός υπεραριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, τότε ο X δεν είναι διαχωρίσιμος (αφού το μοναδικό πυκνό υποσύνολο του X είναι το ίδιο το X).

Πρόταση 6.1.3. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε:*

(i) Κάθε ανοικτός υπόχωρος του X είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Κάθε συνεχής εικόνα του X είναι διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος.

Απόδειξη: (i) Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό. Τότε το $D \cap U$ είναι πυκνό στο U (γιατί;) και αριθμήσιμο. Άρα ο υπόχωρος U είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Έστω Y ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής και επί συνάρτηση. Το $f(D)$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του Y και, αφού η f είναι συνεχής και το D πυκνό στο X, ισχύει ότι

$$\overline{f(D)} \supseteq f(\overline{D}) = f(X) = Y.$$

Δηλαδή το $f(D)$ είναι πυκνό στο Y, άρα ο Y είναι διαχωρίσιμος.

Παρατηρήσεις 6.1.4. *(α) Αν X είναι ένας διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος και $(V_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια ανοικτών, μη κενών, ξένων ανα δύο υποσυνόλων του X, τότε το I είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, έστω $D \subseteq X$ αριθμήσιμο πυκνό. Για κάθε $i \in I$ επιλέγουμε $x_i \in D \cap V_i \neq \emptyset$ και ορίζουμε $\phi : I \to D$ με $\phi(i) = x_i$. Τότε η ϕ είναι $1-1$ (διότι τα V_i είναι ξένα ανά δύο), άρα $|I| \leq |D| \leq \omega$. Επομένως το I είναι αριθμήσιμο.*

(β) Αν $X = \prod_{i\in I} X_i$ (όπου $X_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I$) είναι διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος, τότε κάθε χώρος X_i είναι διαχωρίσιμος (από την Πρόταση 6.1.3, αφού η προβολή $\pi_i : X \to X_i$ είναι συνεχής και επί για κάθε $i \in I$).

(γ) Αν X_1, X_2 είναι διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι, τότε ο $X_1 \times X_2$ είναι διαχωρίσιμος. Έστω $D_1 \subseteq X_1$, $D_2 \subseteq X_2$ αριθμήσιμα πυκνά. Τότε το $D_1 \times D_2$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο $X_1 \times X_2$, διότι $\overline{D_1 \times D_2} = \overline{D}_1 \times \overline{D}_2 = X_1 \times X_2$. Επομένως ο $X_1 \times X_2$ είναι διαχωρίσιμος. Γενικότερα, αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι, τότε ο $\prod_{i=1}^{n} X_i$ είναι διαχωρίσιμος.

(δ) Αν X_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι, τότε και ο $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι διαχωρίσιμος. Πράγματι, έστω $D_n \subseteq X_n$ αριθμήσιμο πυκνό, για $n \in \mathbb{N}$ και $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} D_n$. Θέτουμε:

$$D = \left\{ x = (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} D_n : \ \{n \in \mathbb{N} : \ x_n \neq t_n\} \text{ είναι πεπερασμένο} \right\}$$

Τότε το

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ x = (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} D_n : \ x_n = t_n, \text{ για κάθε } n > m \right\} \\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\prod_{n=1}^{m} D_n \times \{t_{m+1}\} \times \{t_{m+2}\} \times \cdots \right) \end{aligned}$$

είναι αριθμήσιμο, ως (αριθμήσιμη) ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Μένει να δείξουμε ότι D είναι πυκνό. Έστω $U = \bigcap_{k=1}^{m} \pi_{i_k}^{-1}(U_k)$, όπου $U_k \subseteq X_{i_k}$ ανοικτό, μη κενό, για $k = 1, \ldots, m$, ένα βασικό ανοικτό, μη κενό σύνολο στο X. Επιλέγουμε ένα στοιχείο $a_{n_k} \in U_k \cap D_{n_k} \neq \emptyset$ για $k = 1, \ldots, m$ και κατασκευάζουμε μία ακολουθία $x = (x_n) \in X$ ως εξής:

$$x_n = \begin{cases} a_n & \text{για } n \in \{n_1, \ldots, n_m\} \\ t_n & \text{για } n \notin \{n_1, \ldots, n_m\} \end{cases}$$

Τότε $x \in U \cap D$, άρα $U \cap D \neq \emptyset$. Επομένως το D είναι πυκνό στο X.

Ίσως μεχρι τώρα, τα αποτελέσματα για τους διαχωρίσιμους χώρους να ήταν αναμενόμενα. Όμως το ακόλουθο Θεώρημα παρουσιάζει ένα μη τετριμμένο αποτέλεσμα. Επιτρέπει στο σύνολο δεικτών, στο γινόμενο διαχωρίσιμων χώρων, να είναι ουσιαστικά μεγαλύτερο και ο προκύπτων χώρος να παραμένει διαχωρίσιμος. Στη συνέχεια, η Πρόταση 6.1.6 εξηγεί ότι εν γένει, δεν μπορούμε να ελπίζουμε το ίδιο για ακόμη μεγαλύτερο σύνολο δεικτών.

Θεώρημα 6.1.5. *Αν $(X_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια διαχωρίσιμων τοπολογικών χώρων, όπου $|I| \leq c$, τότε ο $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Αφού $|I| \leq c$, υπάρχει συνάρτηση $\phi : I \to \mathbb{R}$ $1-1$, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I \subseteq \mathbb{R}$ (ταυτίζοντας το I με το $\phi(I)$). Για κάθε $i \in I$ επιλέγουμε $D_i = \{d_{i,n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X_i και ένα $t = (t_i)_{i\in I} \in X$. Αν $n \in \mathbb{N}$, $(I_1, \ldots, I_n)$ $n-$άδα από ξένα ανά δύο διαστήματα του $\mathbb{R}$ με ρητά άκρα και $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ ορίζουμε το σημείο $x(n, I_1, \ldots, I_n, m_1, \ldots, m_n) = (x_i)_{i\in I} \in X$ ως εξής

$$x_i = \begin{cases} d_{i,m_k}, & \text{αν } i \in I_k \text{ για κάποιο } k \in \{1, \ldots, n\} \\ t_i, & \text{αν } i \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k \end{cases}$$

(το οποίο είναι καλά ορισμένο, διότι το i ανήκει το πολύ σε ένα I_k, αφού τα I_k είναι ξένα ανά δύο). Τότε το σύνολο D όλων αυτών των σημείων είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του X. Αρκεί να δείξουμε ότι το D είναι πυκνό στο X. Έστω $U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_k)$ ένα μη κενό, βασικό ανοικτό υποσύνολο του X, όπου $i_1, \ldots, i_n \in I$ διαφορετικά ανά δύο. Τότε υπάρχουν $I_1, \ldots, I_n$ ξένα διαστήματα με ρητά άκρα ώστε $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2 \ldots$, $i_n \in I_n$. Για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$ έχουμε $D_{i_k} \cap U_k \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε $d_{i,m_k} \in U_k$. Τότε το $x = x(n, I_1, \ldots, I_n, m_1, \ldots, m_n) \in D$ και $x \in U$, αφού για κάθε $k = 1, \ldots, n$, $i_k \in I_k$ άρα $x_{i_k} = d_{i_k,m_k}$ (από τον ορισμό του x). Επομένως $x_{i_k} \in U_k$. Συνεπώς $D \cap U \neq \emptyset$ και συνεπώς, το D είναι πυκνό.

Πρόταση 6.1.6. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια χώρων Hausdorff με τουλάχιστον δύο σημεία, ώστε ο $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ να είναι διαχωρίσιμος. Τότε $|I| \leq c$.*

Απόδειξη: Έστω $D \subseteq X$ αριθμήσιμο πυκνό. Για κάθε $i \in I$ έστω U_i, V_i ξένα, μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X_i. Ορίζουμε $\phi : I \to \mathcal{P}(D)$ με $\phi(i) = D \cap \pi_i^{-1}(U_i)$, για κάθε $i \in I$. Τότε η ϕ είναι $1-1$. Πράγματι, έστω $i, j \in I$, $i \neq j$. Τότε

$$\begin{array}{rcll} \phi(i) \setminus \phi(j) & = & D \cap \pi_i^{-1}(U_i) \setminus \pi_j^{-1}(U_j) & \\ & = & D \cap \pi_i^{-1}(U_i) \cap (X \setminus \pi_j^{-1}(U_j)) & \\ & \supseteq & D \cap \pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(V_j) & (U_j \cap V_j = \emptyset) \\ & \neq & \emptyset & \left(\begin{array}{c} \pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(V_j) \neq \emptyset \\ \text{ανοικτό και } D \text{ πυκνό στο } X \end{array} \right) \end{array}$$

Άρα $\phi(i) \neq \phi(j)$. Αφού η ϕ είναι $1-1$, έχουμε ότι $|I| \leq |\mathcal{P}(D)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$.

Παράδειγμα 6.1.7. *Αν I σύνολο δεικτών, τότε ο χώρος $\{0,1\}^I$ (όπου $\{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$ διακριτό) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν $|I| \leq c$ (άμεσο, από Θεώρημα 6.1.5 και Πρόταση 6.1.6).*

Λήμμα 6.1.8 (Jones). *Έστω X διαχωρίσιμος φυσιολογικός χώρος. Τότε κάθε κλειστός και διακριτός υπόχωρος F του X έχει πληθάριθμο μικρότερο του συνεχούς.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι κάθε υποσύνολο του F είναι κλειστό στο F (αφού ο F είναι διακριτός) άρα και κλειστό στο X (αφού F κλειστό). Αφού ο X είναι φυσιολογικός, για κάθε $A \subseteq F$ υπάρχουν $U(A)$, $V(A)$ ανοικτά και ξένα υποσύνολα του X, ώστε $A \subseteq U(A)$ και $F \setminus A \subseteq V(A)$ (αφού τα A, $F \setminus A$ είναι ξένα, κλειστά υποσύνολα του X). Έστω $D \subseteq X$ αριθμήσιμο πυκνό. Ορίζουμε

$$\phi : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(D) \text{ με } \phi(A) = D \cap U(A).$$

Τότε η ϕ είναι $1-1$. Πράγματι, έστω $A, B \in \mathcal{P}(F)$ με $A \neq B$. Τότε $A \setminus B \neq \emptyset$ (ή $B \setminus A \neq \emptyset$). Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{array}{rcl} \phi(A) \setminus \phi(B) & = & D \cap U(A) \setminus U(B) \\ & \supseteq & D \cap U(A) \cap V(B) \\ & \neq & \emptyset \end{array}$$

Επομένως $\phi(A) \neq \phi(B)$. Αφού η ϕ είναι $1-1$ και το D είναι αριθμήσιμο, έχουμε ότι

$$|\mathcal{P}(F)| \leq |\mathcal{P}(D)| \leq \mathcal{P}(\mathbb{N})| = c.$$

Άρα $|F| < c$, αφού $|F| < |\mathcal{P}(F)|$.

Παράδειγμα 6.1.9. *Ο χώρος του Sorgenfrey δεν είναι φυσιολογικός. Πράγματι, ο $\mathbb{R}_S$ είναι διαχωρίσιμος, άρα και ο χώρος του Sorgenfrey. Όπως εξηγήσαμε και στο Παράδειγμα 5.4.10, το αντιδιαγώνιο σύνολο $A = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ είναι κλειστό στον $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ και διακριτό. Όμως $|A| = c$, αφού η συνάρτηση $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x,-x) \in A$ είναι $1-1$ και επί. Από το Λήμμα του Jones, ο $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ δεν είναι T_4.*

Παρατήρηση 6.1.10. *Ένας υπόχωρος διαχωρίσιμου τοπολογικού χώρου δεν είναι πάντα διαχωρίσιμος. Για παράδειγμα, ο χώρος του Sorgenfrey είναι διαχωρίσιμος, αλλά ο υπόχωρος A δεν είναι διαχωρίσιμος, αφού είναι διακριτό υπεραριθμήσιμο σύνολο.*

6.2 Πρώτοι Αριθμήσιμοι Χώροι

Σε αυτή την παράγραφο εξετάζουμε τοπολογικούς χώρους που τοπικά μπορούν να περιγραφούν από «λίγα» ανοικτά σύνολα. Με άλλα λόγια, επιθυμούμε κάθε σημείο του χώρου να έχει μία αριθμήσιμη βάση περιοχών. Η ιδιότητα αυτή είναι μεγάλης σημασίας, αφού επανακαθιστά τις ακολουθίες επαρκείς για τη μελέτη της τοπολογίας του χώρου (όπως στη περίπτωση των μετρικών χώρων).

Ορισμός 6.2.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται πρώτος αριθμήσιμος (ή λέμε ότι ικανοποιεί το πρώτο αξίωμα αριθμησιμότητας) αν κάθε σημείο του X έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών.*

Παρατηρήσεις 6.2.2. *(α) Κάθε υπόχωρος A ενός πρώτου αριθμήσιμου χώρου X είναι πρώτος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν για κάθε $x \in X$ η $\mathfrak{B}_x$ είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του x στο X, τότε η $\mathfrak{B}'_x = \{B \cap A : B \in \mathfrak{B}_x\}$ είναι βάση περιοχών του x στο A, προφανώς αριθμήσιμη.*

(β) Αν δύο τοπολογικοί χώροι X, Y είναι πρώτοι αριθμήσιμοι, τότε και ο χώρος $X \times Y$ είναι πρώτος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν $(x,y) \in X \times Y$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του x στο X και $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του y στο Y, τότε η $\{U_n \times V_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ είναι μία αριθμήσιμη βάση περιοχών του (x,y) στο $X \times Y$. Ανάλογα, μπορεί να δείξει κανείς ότι αν οι τοπολογικοί χώροι X_n, για $n \in \mathbb{N}$ είναι πρώτοι αριθμήσιμοι, τότε και ο χώρος $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι πρώτος αριθμήσιμος.

Παραδείγματα 6.2.3. *(α) Έστω X διακριτός τοπολογικός χώρος. Τότε ο X είναι πρώτος αριθμήσιμος, διότι για κάθε $x \in X$, η $\{\{x\}\}$ είναι βάση περιοχών του x.*

(β) Κάθε μετρικός χώρος είναι πρώτος αριθμήσιμος, διότι για κάθε $x \in X$ η οικογένεια $\left\{B(x,\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι μία αριθμήσιμη βάση περιοχών του x.

Πρόταση 6.2.4. *Έστω X ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $x \in X$.*

(i) Αν $A \subseteq X$, τότε $x \in \overline{A} \iff$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$.

(ii) Αν $f : X \to Y$ (όπου Y τοπολογικός χώρος) είναι μία συνάρτηση, τότε η f είναι συνεχής στο $x \iff$ για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x$, ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.

Απόδειξη: Έστω $\mathfrak{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία αριθμήσιμη βάση περιοχών του x. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B_n \supseteq B_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι αν (x_n) είναι μία ακολουθία στο X ώστε $x_n \in B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $x_n \to x$. Πράγματι, αν $U \in \mathfrak{N}_x$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $B_{n_0} \subseteq U$ (αφού η $\mathfrak{B}_x$ είναι βάση περιοχών του x). Άρα για κάθε $n \geq n_0$, $x_n \in B_n \subseteq B_{n_0} \subseteq U$ κι επομένως $x_n \to x$.

(i) Έστω ότι $x \in \overline{A}$. Έχουμε ότι $A \cap B_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε μία ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \in A \cap B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $x_n \in B_n$ για κάθε n έχουμε ότι $x_n \to x$. Το αντίστροφο είναι άμεσο, αφού κάθε ακολουθία είναι δίκτυο.

(ii) Το ευθύ είναι άμεσο, αφού κάθε ακολουθία είναι δίκτυο. Έστω, αντίστροφα, ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x$, ισχύει $f(x_n) \to f(x)$. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι η f δεν είναι συνεχής στο x. Τότε υπάρχει $V \in \mathfrak{N}_{f(x)}$ ώστε $f^{-1}(V) \notin \mathfrak{N}_x$. Άρα $B_n \nsubseteq f^{-1}(V)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $B_n \setminus f^{-1}(V) \neq \emptyset$ για κάθε n. Συνεπώς, μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in B_n \setminus f^{-1}(V)$ για κάθε n, και τότε η ακολουθία (x_n) θα συγκλίνει στο x ($x_n \in B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$) ενώ $f(x_n) \nrightarrow f(x)$ (αφού $f(x_n) \notin V$ $\forall n \in \mathbb{N}$), πράγμα άτοπο.

Παράδειγμα 6.2.5. *Ο χώρος $\Sigma = \mathbb{N} \cup \{\mathcal{U}\}$ (όπου $\mathcal{U}$ είναι ένα μη τετριμμένο υπεφίλτρο του $\mathbb{N}$) δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος. Πράγματι, από τον ορισμό των (βασικών) περιοχών του $\mathcal{U}$, είναι σαφές ότι $\mathcal{U} \in \overline{\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) από στοιχεία του $\mathbb{N}$, ώστε $x_n \to \mathcal{U}$.*

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία. Δίχως βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n \neq x_m$, για $n \neq m$ (γιατί;). Έστω A και B το σύνολο των περιττών και άρτιων όρων της ακολουθίας, αντίστοιχα. Δηλαδή

$$A = \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \text{ και } B = \{x_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Αφού $x_n \to \mathcal{U}$, έπεται ότι $x_{2n} \to \mathcal{U}$ και $x_{2n-1} \to \mathcal{U}$. Συνεπώς, για κάθε $U \in \mathcal{U}$ έχουμε ότι $A \cap U \neq \emptyset \neq B \cap U$ (πάλι από τον ορισμό των περιοχών $\mathcal{U}$). Άρα οι οικογένειες $\mathcal{U} \cup \{A\}$, $\mathcal{U} \cup \{B\}$ έχουν την ιδιότητα της πεπερασμένης τομή και, κατά συνέπεια, υπάρχουν υπερφίλτρα στο $\mathbb{N}$ που να τα περιέχουν (Πρόταση 2.2.7). Αφού το $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο, έπεται άμεσα ότι $A, B \in \mathcal{U}$. Άρα $\emptyset = A \cap B \in \mathcal{U}$, πράγμα άτοπο. Έτσι, από την Πρόταση 6.2.4 έχουμε ότι ο Σ δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος, επομένως ούτε μετρικοποιήσιμος.

Πόρισμα 6.2.6. *Αν X είναι πρώτος αριθμήσιμος, διαχωρίσιμος χώρος Hausdorff, τότε $|X| \leq c$. Ιδιαίτερα, κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος έχει πληθάριθμο το πολύ ίσο με τον πληθάριθμο του συνεχούς.*

Απόδειξη: Έστω $D \subseteq X$ αριθμήσιμο πυκνό. Για κάθε $x \in X$ επιλέγουμε μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο D ώστε $x_n \to x$, από Πρόταση 6.2.4 (i). Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : X \to D^{\mathbb{N}}$ με $\phi(x) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε η ϕ είναι $1-1$. Πράγματι, αν $x, y \in X$ με $\phi(x) = \phi(y) = (x_n)$, τότε $x_n \to x$ και $x_n \to y$. Αφού ο χώρος X είναι Hausdorff, έπεται ότι $x = y$. Επομένως,

$$|X| \leq |D^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = c.$$

Πρόταση 6.2.7. *Έστω X ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, Y ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ μία συνεχής, ανοικτή και επί συνάρτηση. Τότε ο Y είναι πρώτος αριθμήσιμος χώρος.*

Απόδειξη: Έστω $y \in Y$ και $x \in X$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Έστω $\mathfrak{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία αριθμήσιμη βάση περιοχών του x στο X. Αφού η f είναι ανοικτή, η οικογένεια συνόλων $\mathfrak{B}_y = \{f(B_n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη και αποτελείται από περιοχές του y. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι βάση περιοχών του y. Έστω $U \subseteq Y$ μία περιοχή του y. Αφού η f είναι συνεχής, υπάρχει βασική περιοχή $B_n \in \mathfrak{B}_x$ του x, ώστε $f(B_n) \subseteq U$. Όμως, $f(B_n) \in \mathfrak{B}_y$. Άρα η $\mathfrak{B}_y$ είναι (αριθμήσιμη) βάση περιοχών του y και, κατά συνέπεια, ο Y είναι πρώτος αριθμήσιμος χώρος.

Παράδειγμα 6.2.8. *Έστω ένας τοπολογικός χώρος X που δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος και έστω X_δ το σύνολο X εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία. Ο X_δ είναι πρώτος αριθμήσιμος χώρος και ο X είναι συνεχής εικόνα του X_δ (μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης), αλλά δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος. Κατά συνέπεια, η υπόθεση «ανοικτή» για την f στην Πρόταση 6.2.7 δεν μπορεί να παραληφθεί.*

6.3 Δεύτεροι Αριθμήσιμοι Χώροι

Μία ισχυρότερη συνθήκη αριθμησιμότητας που μπορεί κανείς να εισάγει, είναι η ύπαρξη αριθμήσιμης βάσης για την τοπολογία του χώρου. Μάλιστα είναι τόσο ιχυρότερη, που καταλήγει να μην ικανοποιείται από κάθε μετρικό χώρο. Όμως, το ενδιαφέρον που παρουσιάζει είναι αρκετά μεγάλο, αφού αρκετοί από τους οικείους σε εμάς χώρους ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη.

Ορισμός 6.3.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται δεύτερος αριθμήσιμος (ή λέμε ότι ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα αριθμησιμότητας) αν ο X έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.*

Παρατηρήσεις 6.3.2. *(α) Κάθε δεύτερος αριθμήσιμος χώρος X είναι και πρώτος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X και $x \in X$, τότε η $\mathfrak{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ είναι βάση περιοχών του x και είναι προφανώς αριθμήσιμη.*

(β) Κάθε υπόχωρος A ενός δεύτερου αριθμήσιμου χώρου X είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη βάση του X, τότε η $\mathcal{B}' = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση για την τοπολογία του A, προφανώς αριθμήσιμη.

(γ) Αν δύο τοπολογικοί χώροι X, Y είναι δεύτεροι αριθμήσιμοι, τότε και ο χώρος $X \times Y$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας X και $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας του Y, τότε η $\{U_n \times V_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ είναι μία αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του $X \times Y$. Ανάλογα, μπορεί να δείξει κανείς ότι αν οι τοπολογικοί χώροι X_n, για $n \in \mathbb{N}$ είναι δεύτεροι αριθμήσιμοι, τότε και ο χώρος $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

Παραδείγματα 6.3.3. *(α) Αν ο X είναι διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος αν και μόνο αν το σύνολο X είναι αριθμήσιμο, αφού κάθε βάση του X περιέχει τα μονοσύνολα. Ιδαίτερα, κάθε υπεραριθμήσιμος διακριτός τοπολογικός χώρος είναι πρώτος αριθμήσιμος και όχι δεύτερος αριθμήσιμος.*

(β) Ο τοπολογικός χώρος $\mathbb{R}_S$ είναι διαχωρίσιμος, πρώτος αριθμήσιμος (αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}_S$, η $\{(a, x] : a \in \mathbb{Q},\ a < x\}$ είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του x) και δεν είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Πράγματι, αν ο $\mathbb{R}_S$ ήταν δεύτερος αριθμήσιμος, τότε θα ήταν και ο $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ δεύτερος αριθμήσιμος, άρα ο υπόχωρός του $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ θα ήταν δεύτερος αριθμήσιμος, πράγμα άτοπο, αφού ο A είναι διακριτός χώρος και υπεραριθμήσιμος.

Πρόταση 6.3.4. *Έστω X ένας δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, Y ένας τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ μία συνεχής, ανοικτή και επί συνάρτηση. Τότε ο Y είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία αριθμήσιμη βάση του X. Αφού η f είναι ανοικτή, η οικογένεια συνόλων $\mathcal{B}_Y = \{f(B_n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη και αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του Y. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι βάση της τοπολογίας του Y. Έστω $U \subseteq Y$ ανοικτό. Αφού η f είναι συνεχής, το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα υπάρχει $I \subseteq \mathbb{N}$, ώστε $\bigcup_{i\in I} B_i = f^{-1}(U)$. Όμως,

$$U \overset{f \text{ επί}}{=\!=\!=} f\left(f^{-1}(U)\right) = f\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(B_i)$$

και $\{f(B_i) : i \in I\} \subseteq \mathcal{B}_Y$. Άρα η $\mathcal{B}_Y$ είναι (αριθμήσιμη) βάση του Y και, κατά συνέπεια, ο Y είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος.

Παράδειγμα 6.3.5. *Έστω ο χώρος $\Sigma = \mathbb{N} \cup \{\mathcal{U}\}$ και Σ_δ το σύνολο Σ εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία. Τότε ο Σ είναι συνεχής εικόνα του Σ_δ (μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης) αλλά δεν είναι πρώτος (άρα ούτε και δεύτερος) αριθμήσιμος χώρος. Κατά συνέπεια, η υπόθεση «ανοικτή» για την f στην Πρόταση 6.2.4 δεν μπορεί να παραληφθεί.*

Πρόταση 6.3.6. *Κάθε δεύτερος αριθμήσιμος χώρος X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία αριθμήσιμη βάση του X. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε στοιχείο $x_n \in B_n$ για κάθε n και θέτουμε $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε το D είναι αριθμήσιμο και πυκνό. Πράγματι, αν $U \subseteq X$ ανοικτό, μη κενό σύνολο, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $B_{n_0} \subseteq U$, άρα $x_{n_0} \in U$. Επομένως $D \cap U \neq \emptyset$ και συνεπώς, ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση 6.3.7. *Ένας μετρικός χώρος X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν είναι δεύτερος αριθμήσιμος.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω ότι ο μετρικός χώρος X είναι διαχωρίσιμος και έστω $D \subseteq X$ αριθμήσιμο και πυκνό. Θέτουμε

$$\mathcal{B} = \{B(x,\varepsilon) : x \in D \text{ και } \varepsilon \in \mathbb{Q},\ \varepsilon > 0\}.$$

Τότε η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών συνόλων. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση του X. Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό και $x \in U$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq U$. Αφού το U είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq U$. Αφού το σύνολο D είναι πυκνό, υπάρχει $y \in B(x,\varepsilon/2) \cap D$. Τότε $B(y,\varepsilon/2) \in \mathcal{B}$, $x \in B(y,\varepsilon/2)$ και $B(y,\varepsilon/2) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Άρα $x \in B(y,\varepsilon/2) \subseteq U$. Επομένως η $\mathcal{B}$ είναι βάση του X και συνεπώς, ο χώρος X είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

$(\Leftarrow)$ Είναι άμεσό, από την Πρόταση 6.3.4.

Πόρισμα 6.3.8. *Κάθε υπόχωρος A ενός διαχωρίσιμου μετρικού χώρου X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 6.3.7, ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος, άρα και ο A είναι δεύτερος αριθμήσιμος (μετρικός) χώρος (Παρατήρηση 6.3.2(β)). Επομένως ο A είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση 6.3.9. *Έστω X ένας δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος. Αν $(G_i)_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X, τότε υπάρχει $J \subseteq I$ αριθμήσιμο, ώστε $\bigcup\limits_{i\in I} G_i = \bigcup\limits_{i\in J} G_i$.*

Απόδειξη: Έστω $G = \bigcup\limits_{i\in I} G_i$ και $\mathcal{B}$ μία αριθμήσιμη βάση του X. Θέτουμε

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : \text{ υπάρχει } i \in I \text{ με } B \subseteq G_i\}.$$

Τότε $G = \bigcup \mathcal{B}'$. Πράγματι, για κάθε $B \in \mathcal{B}'$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $B \subseteq G_i$ κι επομένως $B \subseteq G$. Άρα $\bigcup \mathcal{B}' \subseteq G$.Αντίστροφα, αν $x \in G$ τότε υπάρχει $i \in I$ ώστε $x \in G_i$. Άρα υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq G_i$. Προφανώς $B \in \mathcal{B}'$ και συνεπώς $x \in \bigcup \mathcal{B}'$. Επομένως $G \subseteq \bigcup \mathcal{B}'$.Για κάθε $B \in \mathcal{B}'$ επιλέγουμε $i_B \in I$ ώστε $B \subseteq G_{i_B}$. Τότε έχουμε ότι

$$\bigcup \mathcal{B}' \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} G_{i_B} \subseteq G$$

κι επομένως $G = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}'} G_{i_B}$. Θέτουμε $J = \{i_B : B \in \mathcal{B}'\}$. Τότε το J είναι αριθμήσιμο (αφού το $\mathcal{B}'$ είναι αριθμήσιμο) και $G = \bigcup\limits_{i\in J} G_i$.

Πρόταση 6.3.10. *Έστω X δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ είναι μία βάση για την τοπολογία του. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια της $\mathcal{B}$ που είναι επίσης βάση για την τοπολογία του X.*

Απόδειξη: Έστω $(B_n)_{N\in\mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη βάση του X. Κάθε B_n είναι ένωση στοιχείων στοιχείων της $\mathcal{B}$ και από την Πρόταση 6.3.9 έπεται ότι $B_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} C_{n,m}$, όπου $C_{n,m} \in \mathcal{B}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε η $\{C_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη υποοικογένεια της $\mathcal{B}$ και αποτελεί βάση για την τοπολογία του X (γιατί;).

6.4 Χώροι Lindelöf

Η τελευταία συνθήκη που εισάγουμε είναι μία ασθενέστερη μορφή του δεύτερου αξιώματος αριθμησιμότητας (η οποία επίσης δεν ικανοποιείται από κάθε μετρικό χώρο). Η ιδιότητα Lindelöf δεν παρουσιάζει την υποδειγματική συμπεριφορά των προηγούμενων συνθηκών αριθμησιμότητας, αλλά επισημαίνει τις χρηστικές συνέπειες της ύπαρξης μίας αριθμήσιμης βάσης, δίνοντάς τους έτσι την πρέπουσα βαρύτητα, έναντι της ίδιας της ύπαρξης της αριθμήσιμης βάσης.

Ορισμός 6.4.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται χώρος Lindelöf (ή λέμε ότι ο X ικανοποιεί την ιδιότητα Lindelöf) αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα, δηλαδή αν $\{U_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, τότε υπάρχει αριθμήσιμο $J \subseteq I$ ώστε $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.*

Παρατηρήσεις 6.4.2. *(α) Ένας τοπολογικός χώρος X είναι Lindelöf αν και μόνο αν κάθε βασικό ανοικτό κάλυμμα του X έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.*

(β) Ένας διακριτός χώρος X είναι χώρος Lindelöf αν και μόνο αν το X είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(γ) Ένας υπόχωρος A ενός τοπολογικού χώρου X είναι Lindelöf αν και μόνο αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του A στο X (δηλαδή για κάθε οικογένεια $\{U_i : i \in I\}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$) έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα (δηλαδή υπάρχει $J \subseteq I$ αριθμήσιμο ώστε $A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$).

Πρόταση 6.4.3. *Έστω ένας τοπολογικός χώρος Lindelöf X.*

(i) Κάθε κλειστός υπόχωρος του X είναι χώρος Lindelöf .

(ii) Αν Y είναι τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ είναι μία συνεχής και επί συνάρτηση, τότε ο Y είναι χώρος Lindelöf .

Απόδειξη: (i) Έστω F ένας κλειστός υπόχωρος του X και $\{U_i : i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του F. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $i \in I$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο στο X, V_i, ώστε $U_i = F \cap V_i$. Έτσι, έχουμε ότι η οικογένεια $\{V_i : i \in I\} \cup \{X \setminus F\}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Αφού ο χώρος X είναι Lindelöf, υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα, έστω $\{V_{i_n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{X \setminus F\}$. Τότε $F \subseteq \bigcup\{V_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$ κι επομένως, $F = \bigcup\{U_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Έστω $\{U_i : i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του Y. Η οικογένεια $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του X, συνεπώς έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα, έστω $\{f^{-1}(U_{i_n}) : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε, αφού η f είναι επί, η οικογένεια $\{U_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα του Y.

Πρόταση 6.4.4. *Κάθε δεύτερος αριθμήσιμος χώρος είναι χώρος Lindelöf.*

Απόδειξη: Είναι άμσεο από την Πρόταση 6.3.6.

Παράδειγμα 6.4.5. *Ο $\mathbb{R}_S$ είναι χώρος Lindelöf. Έστω $\{(a_i, b_i] : i \in I\}$ ένα βασικό ανοικτό κάλυμμα του $\mathbb{R}_S$. Θέτουμε $C = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$. Αφού ο $\mathbb{R}$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος, από την Πρόταση 6.3.6 έπεται ότι υπάρχει $J \subseteq I$ αριθμήσιμο ώστε $C = \bigcup_{i\in J}(a_i, b_i)$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in \mathbb{R}_S \setminus C$, τότε υπάρχει $i_x \in I$ ώστε $x = b_{i_x}$. Άρα*

$$\mathbb{R}_S = C \cup (\mathbb{R}_S \setminus C) \subseteq \left(\bigcup_{i\in J}(a_i, b_i]\right) \bigcup \left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}_S\setminus C}(a_{i_x}, b_{i_x}]\right).$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}_S \setminus C$ είναι αριθμήσιμο.

Ισχυρισμός. *Η οικογένεια $\mathcal{C} = \{(a_{i_x}, b_{i_x}] : x \in \mathbb{R}_S \setminus C\}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}_S \setminus C$ με $x \neq y$ ώστε*

$$(a_{i_x}, b_{i_x}] \cap (a_{i_y}, b_{i_y}] = (a_{i_x}, x] \cap (a_{i_y}, y] \neq \emptyset.$$

Αν $x < y$, τότε $x > a_{i_y}$ κι έτσι $x \in (a_{i_y}, y) = (a_{i_y}, b_{i_y}) \subseteq C$, πράγμα άτοπο. Όμοια, καταλήγουμε σε άτοπο αν $y < x$.

Αφού τα στοιχεία της $\mathcal{C}$ είναι μη κενά και ανοικτά στον $\mathbb{R}_S$ και ο $\mathbb{R}_S$ είναι διαχωρίσιμος, έπεται ότι η $\mathcal{C}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}_S \setminus C$ είναι αριθμήσιμο.

Παρατήρηση 6.4.6. *Το γίνομενο δύο χώρων Lindelöf δεν είναι αναγκαία χώρος Lindelöf. Πράγματι, ο $\mathbb{R}_S$ είναι χώρος Lindelöf, αλλά ο χώρος του Sorgenfrey, $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ δεν είναι Lindelöf, αφού το αντιδιαγώνιο σύνολο $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_S\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ και δεν είναι χώρος Lindelöf (διότι είναι διακριτός υπεραριθμήσιμος χώρος).*

Πρόταση 6.4.7. *Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι δεύτερος αριθμήσιμος αν και μόνο αν είναι χώρος Lindelöf.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Ισχύει γενικά, από την Πρόταση 6.4.4.

($\Leftarrow$) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $X = \bigcup\limits_{x\in X} B(x, \frac{1}{n})$ κι αφού ο X είναι χώρος Lindelöf, υπάρχει $A_n \subseteq X$ αριθμήσιμο ώστε $X = \bigcup\limits_{x\in A_n} B(x, \frac{1}{n})$. Θέτουμε $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Τότε το D είναι αριθμήσιμο σύνολο και πυκνό στο X. Πράγματι, έστω $y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Αφού $X = \bigcup\limits_{x\in A_{n_0}} B(x, \frac{1}{n_0})$, υπάρχει $x \in A_{n_0}$ ώστε $y \in B(x, \frac{1}{n_0})$. Τότε $\rho(x, y) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ κι επομένως $x \in B(x, \varepsilon)$. Άρα $B(y, \varepsilon) \cap A_{n_0} \neq \emptyset$ και έτσι $B(y, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Συνεπώς ο X είναι διαχωρίσιμος και, κατά συνέπεια, δεύτερος αριθμήσιμος (Πρόταση 6.3.5).

Θεώρημα 6.4.8. *Κάθε κανονικός χώρος Lindelöf είναι φυσιολογικός.*

Απόδειξη: Έστω A, B ξένα κλειστά υποσύνολα ενός κανονικού χωρου Lindelöf X. Αφού ο χώρος X είναι κανόνικος, για κάθε $x \in A$ υπάρχει U_x ανοικτό, ώστε $x \in U_x$ και $\overline{U}_x \cap B = \emptyset$. Ανάλογα, για κάθε $y \in B$ υπάρχει V_y ανοικτό, ώστε $y \in V_y$ και $\overline{V}_y \cap A = \emptyset$. Τα A και B είναι χώροι Lindelöf, ως κλειστοί υπόχωροι του χώρου Lindelöf X. Αφού $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} U_x$ και $B \subseteq \bigcup\limits_{y\in B} V_y$, υπάρχουν $x_n \in A$, $y_n \in B$ για $n \in \mathbb{N}$, ώστε $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_{x_n}$ και $B \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_{y_n}$. Θέτουμε:

$$U_n = U_{x_n} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{V}_{y_k} \right) \text{ και } V_n = V_{y_n} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_{x_k} \right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Τότε για τα σύνολα $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ έχουμε ότι

- Είναι ανοικτά (γιατί;).
- $A \subseteq U$: Αν $x \in A$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in U_{x_n}$ και αφού $\overline{V}_y \cap A = \emptyset$ για κάθε $y \in B$, έπεται ότι $x \in U_n \subseteq U$.

- $B \subseteq V$.
- $U \cap V = \emptyset$: $U \cap V = \bigcup_{n,m} (U_n \cap V_m) = \emptyset$. Πράγματι, αν $m \leq n$ τότε $U_n \subseteq X \setminus \overline{V}_{y_m} \subseteq X \setminus V_{y_m} \subseteq X \setminus V_m$ (αφού $V_m \subseteq V_{y_m}$). Δηλαδή $U_n \cap V_m = \emptyset$. Όμοια αν $n \leq m$.

Επομένως, ο χώρος X είναι φυσιολογικός.