ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Ενότητα: Διαχωριστικά αξιώματα

Γεώργιος Κουμουλλής

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

5 Διαχωριστικά Αξιώματα

Αν και μία τοπολογία ενδέχεται να περιέχει «πολλά» σύνολα, το πόσο ευνοϊκή είναι η δομή των ανοικτών συνόλων μπορεί να ποικίλλει. Μία ενδεχόμενη παθογένεια, που μπορεί να εμφανίζεται, είναι η αδυναμία της τοπολογίας να διαχωρίσει δύο διακεκριμένα σημεία του χώρου (δηλαδή τα σημεία αυτά να περιέχονται στα ίδια ανοικτά σύνολα). Αυτη η παθογένεια, όπως θα δούμε αναλυτικά παρακάτω, έχει ως σύνεπεια την ταυτόχρονη σύγκλιση, και στα δύο σημεία, κάθε δικτύου που συγκλίνει σε ένα (τουλάχιστον) από τα σημεία αυτά. Δηλαδή, δεν μπορούμε να έχουμε την επιθυμητή ιδιότητα της μοναδικότητας του ορίου για τα συγκλίνοντα δίκτυα. Στο κεφάλαιο αυτό επιθυμούμε να εξετάσουμε μία σειρά συνθηκών, οι οποίες καθιστούν την τοπολογία ενός χώρου ευνοϊκή ως προς τη διαχωριστικότητα του χώρου (δηλαδή την ικανότητα της τοπολογίας να διαχωρίζει διακεκριμένα σημεία και κλειστά υποσύνολα του χώρου).

Η γλώσσα που θα εισάγουμε δεν έχει ως μοναδικό της σκοπό την κατάταξη των τοπολογικών χώρων, ως προς τις συνθήκες-*τα διαχωριστικά αξιώματα*- που ικανοποιούν, αλλά και να μας υποδείξει ποιες είναι οι ιδιότητες που θα πρέπει να διαθέτει ένας τοπολογικός χώρος ώστε να είναι μετρικοποιήσιμος. Για να επιτευχθεί ο σκοπός αυτός, κρίνεται σκόπιμο με την εισαγωγή ενός νέου διαχωριστικού αξιώματος, να εξετάζεται η σχέση και η αλληλεπίδρασή του με όσα διαχωριστικά αξιώματα έχουν ήδη μελετηθεί, καθώς και να διερευνηθεί το κατά πόσο ικανοποιείται σε μία μετρική τοπολογία.

5.1 Χώροι T_1

Το πρώτο διαχωριστικό αξίωμα που εισάγουμε εξασφαλίζει την ύπαρξη «λεπτών» ανοικτών περιοχών για τα σημεία του χώρου, δηλαδή για κάθε στοιχείο του χώρου θα υπάρχει μία βάση περιοχών, τα στοιχεία της οποίας θα μπορούν να το απομονώσουν από κάθε άλλο στοιχείο του χώρου. Θα δούμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι κλειστό σύνολο κάθε μονοσύνολο του χώρου. Ακόμη κι αυτή η ελάχιστη απαίτηση δεν ικανοποιείται από κάθε τοπολογικό χώρο.

Ορισμός 5.1.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται χώρος T_1 αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει ανοικτό σύνολο G με $x \in G$ και $y \notin G$.*

Πρόταση 5.1.2. *Για έναν τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι T_1.

(ii) Κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό στο X.

(iii) $\bigcap \mathfrak{N}_x = \{x\}$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη: (i)⇒(ii) Έστω $x \in X$ και $y \in X \setminus \{x\}$. Τότε $x \neq y$, άρα από το (i), υπάρχει G ανοικτό ώστε $y \in G$ και $x \notin G$. Άρα $y \in G \subseteq X \setminus \{x\}$, όπου G ανοικτό, επομένως $X \setminus \{x\} \in \mathfrak{N}_y$ για κάθε $y \in X \setminus \{x\}$. Συνεπώς το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό και ισοδύναμα το $\{x\}$ είναι κλειστό.

(ii)⇒(iii) Έστω $x \in X$. Προφανώς έχουμε ότι $\{x\} \subseteq \bigcap \mathfrak{N}_x$ (αφού $x \in U$ για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$). Έστω $y \in X$ με $y \neq x$. Τότε, από το (ii), το $X \setminus \{y\}$ είναι ανοικτό και $x \in X \setminus \{y\}$. Άρα $X \setminus \{y\} \in \mathfrak{N}_x$ και προφανώς $y \notin X \setminus \{y\}$. Επομένως $\bigcap \mathfrak{N}_x = \{x\}$.

(iii)⇒(i) Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε, από το (iii), $y \notin \bigcap \mathfrak{N}_x$, άρα υπάρχει $U \in \mathfrak{N}_x$ με $y \notin U$. Θέτοντας $G = U^\circ$ έχουμε ότι το G είναι ανοικτό, $x \in G$ και $y \notin G$. Συνεπώς ο X είναι T_1 χώρος.

Παρατήρηση 5.1.3. *Στο (iii) της Πρότασης 5.1.2, το σύστημα περιοχών $\mathfrak{N}_x$ μπορεί να αντικατασταθεί από μία βάση περιοχών $\mathfrak{B}_x$ του x, αφού $\bigcap \mathfrak{B}_x = \bigcap \mathfrak{N}_x$. Πράγματι, από το ότι $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$ παίρουμε ότι $\bigcap \mathfrak{B}_x \supseteq \bigcap \mathfrak{N}_x$. Ακόμη, αφού για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$ υπάρχει $B \in \mathfrak{B}_x$ με $B \subseteq U$, έχουμε ότι $\bigcap \mathfrak{B}_x \subseteq \bigcap \mathfrak{N}_x$.*

Παραδείγματα 5.1.4. *(α) Κάθε μετρικός χώρος είναι T_1, αφού σε κάθε μετρικό χώρο τα μονοσύνολα είναι κλειστά.*

(β) Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας T_1 χώρος και $\mathcal{T}'$ είναι μία τοπολογία στο X με $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$, τότε και ο χώρος $(X, \mathcal{T}')$ είναι T_1.

(γ) Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X. Τότε ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι T_1, αφού κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό.

(δ) Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι T_1 αν και μόνο αν περιέχει τη συμπεπερασμένη τοπολογία. Πράγματι,

- $(\Rightarrow)$ *Από την Πρόταση 5.1.2, έπεται ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο σε έναν T_1 χώρο είναι κλειστό. Άρα κάθε σύνολο με πεπεπρασμένο συμπλήρωμα είναι ανοικτό.*
- $(\Leftarrow)$ *Άμεσο, από τα (β) και (γ).*

(ε) Έστω X σύνολο με δύο τουλάχιστον σημεία και $x_0 \in X$. Τότε ο X με την τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου x_0 δεν είναι T_1 χώρος. Πράγματι, το $\{x_0\}$ δεν είναι κλειστό, αφού $x_0 \notin X \setminus \{x_0\}$, δηλαδή το $X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ δεν είναι ανοικτό.

Πρόταση 5.1.5. *Έστω X ένας T_1 χώρος και Y ένας τοπολογικός χώρος. Αν υπάρχει συνάρτηση $f : X \to Y$ $1-1$, επί και ανοικτή, τότε ο Y είναι T_1 χώρος. Ιδιαίτερα, αν ο Y είναι ομοιομορφικός με τον X, τότε είναι T_1 χώρος.*

Απόδειξη: Έστω $y \in Y$ και το σημείο $f^{-1}(y) \in X$. Αφού ο X είναι T_1 έχουμε ότι το σύνολο $\{f^{-1}(y)\}$ είναι κλειστό στο X, ή ισοδύναμα, ότι το σύνολο $X \setminus \{f^{-1}(y)\}$ είναι ανοικτό. Η f είναι ανοικτή, συνεπώς το σύνολο $f(X \setminus \{f^{-1}(y)\})$ είναι ανοικτό στο Y. Αφού τώρα η f είναι $1-1$ και επί, έχουμε ότι $f(X \setminus \{f^{-1}(y)\}) = Y \setminus \{y\}$. Άρα το $\{y\}$ είναι κλειστό. Επομένως ο Y είναι T_1.

Πρόταση 5.1.6. *Αν X είναι ένας T_1 χώρος και A ένας υπόχωρός του, τότε και ο A είναι T_1.*

Απόδειξη: Έστω $x \in A$. Τότε έχουμε ότι $\{x\} = \{x\} \cap A$, όπου το $\{x\}$ είναι κλειστό στο X. Άρα, από την Πρόταση 4.1.4(i), το $\{x\}$ είναι κλειστό στο A. Επομένως, ο A είναι χώρος T_1.

Πρόταση 5.1.7. *Έστω $(X_i)_{i \in I}$ οικογένεια T_1 τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ είναι T_1.*

Απόδειξη: Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Αφού ο X_{i_0} είναι T_1, υπάρχει G ανοικτό στο X_{i_0}, ώστε $x_{i_0} \in G$ και $y_{i_0} \notin G$. Τότε το $\pi_{i_0}^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο X (αφού η π_{i_0} είναι συνεχής), με $x \in \pi_{i_0}^{-1}(G)$ και $y \notin \pi_{i_0}^{-1}(G)$. Επομένως ο X είναι T_1 χώρος.

5.2 Χώροι Hausdorff

Το διαχωριστικό αξίωμα που εισάγουμε σε αυτή την παράγραφο αφορά το διαχωρισμό διακεκριμένων σημείων μέσω ανοικτών συνόλων. Δηλαδή, αν έχουμε δύο διακεκριμένα στοιχεία του χώρου, εξασφαλίζεται η υπάρξη ξένων περιοχών τους. Η ιδιότητα αυτή είναι μεγάλης σημασίας, καθώς ισοδυναμεί με τη μοναδικότητα του ορίου για τα συγκλίνοντα δίκτυα.

Ορισμός 5.2.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται χώρος T_2 ή χώρος Hausdorff αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν ανοικτά σύνολα G_1, G_2 με $x \in G_1$, $y \in G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Παρατήρηση 5.2.2. *Κάθε T_2 χώρος είναι και T_1.*

Πρόταση 5.2.3. *Για έναν τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο X είναι T_2.*

(ii) *Για κάθε x, $y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει $U \in \mathfrak{N}_x$ με $y \notin \overline{U}$.*

(iii) $\bigcap \left\{ \overline{U} : U \in \mathfrak{N}_x \right\} = \{x\}$ *για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη: (i)⇒(ii) Έστω x, $y \in X$ με $x \neq y$. Από το (i), υπάρχουν U, V ανοικτά ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$. Τότε $U \in \mathfrak{N}_x$ και $y \notin \overline{U}$ (διότι $y \in V$, ανοικτό και $U \cap V = \emptyset$).

(ii)⇒(iii) Έστω $x \in X$. Προφανώς έχουμε ότι $\{x\} \subseteq \bigcap \left\{ \overline{U} : U \in \mathfrak{N}_x \right\}$. Έστω $y \in X$ με $y \neq x$. Τότε, από το (ii), υπάρχει $U \in \mathfrak{N}_x$ με $y \notin \overline{U}$. Επομένως $\bigcap \left\{ \overline{U} : U \in \mathfrak{N}_x \right\} = \{x\}$.

(iii)⇒(i) Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε, από το (iii), $y \notin \bigcap \left\{ \overline{U} : U \in \mathfrak{N}_x \right\}$, άρα υπάρχει $U \in \mathfrak{N}_x$ με $y \notin \overline{U}$. Θέτοντας $G_1 = U^\circ$ και $G_2 = X \setminus \overline{U}$, έχουμε ότι τα G_1, G_2 είναι ανοικτά, $x \in G_1$ και $y \in G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Συνεπώς ο X είναι T_2 χώρος.

Παρατήρηση 5.2.4. *Στα (ii) και (iii) της Πρότασης 5.2.3, το σύστημα περιοχών $\mathfrak{N}_x$ μπορεί να αντικατασταθεί από μία βάση περιοχών $\mathfrak{B}_x$ του x.*

Παραδείγματα 5.2.5. *(α) Κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) είναι χώρος T_2. Πράγματι, έστω x, $y \in X$ με $x \neq y$. Τότε για $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(x,y) > 0$ έχουμε ότι $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$, $x \in B(x,\varepsilon)$, $y \in B(y,\varepsilon)$ και τα $B(x,\varepsilon)$, $B(y,\varepsilon)$ είναι ανοικτά.*

(β) Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας T_2 χώρος και $\mathcal{T}'$ είναι μία τοπολογία στο X με $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$, τότε και ο χώρος $(X, \mathcal{T}')$ είναι T_2.

(γ) Ο χώρος $\mathbb{R}_S$ είναι T_2, αφού η τοπολογία του περιέχει τη συνήθη (μετρική) τοπολογία του $\mathbb{R}$.

(δ) Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathcal{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X. Τότε ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_1 χώρος (Παράδειγμα 5.1.4(γ)), αλλά δεν είναι T_2 (διότι δεν υπάρχουν ξένα, μη κενά, ανοικτά υποσύνολα του X).

Θεώρημα 5.2.6. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι Hausdorff αν και μόνο αν κάθε συγκλίνον δίκτυο στο X συγκλίνει ακριβώς σε ένα σημείο (δηλαδή ισχύει η μοναδικότητα του ορίου).*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχει $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ δίκτυο στο X και x, $y \in X$ με $x \neq y$, ώστε $p_\lambda \to x$ και $p_\lambda \to y$. Αφού ο X είναι χώρος Hausdorff, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα G_1, G_2 με $x \in G_1$ και $y \in G_2$.
Αφού $p_\lambda \to x$, υπάρχει $\lambda_1 \in \Lambda$ ώστε $p_\lambda \in G_1$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_1$.
Αφού $p_\lambda \to y$, υπάρχει $\lambda_2 \in \Lambda$ ώστε $p_\lambda \in G_2$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_2$.
Επιλέγοντας $\lambda_0 \in \Lambda$ με $\lambda_0 \geq \lambda_1$ και $\lambda_0 \geq \lambda_2$, έχουμε ότι $p_{\lambda_0} \in G_1$ και $p_{\lambda_0} \in G_2$, πράγμα άτοπο, αφού $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι ο χώρος X δεν είναι Hausdorff. Τότε υπάρχουν x, $y \in X$ με $x \neq y$, ώστε για κάθε U, V ανοικτά σύνολα με $x \in U$ και $y \in V$ να ισχύει $U \cap V \neq \emptyset$. Θέτουμε $\Lambda = \mathfrak{N}_x \times \mathfrak{N}_y = \{(U,V) : U \in \mathfrak{N}_x, V \in \mathfrak{N}_y\}$ και ορίζουμε τη σχέση προδιάταξης $\leq$ στο Λ ως εξής:

$$(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2) \iff U_2 \subseteq U_1 \text{ και } V_2 \subseteq V_1.$$

Τότε το $(\Lambda, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Για κάθε $(U,V) \in \Lambda$ επιλέγουμε στοιχείο $p_{(U,V)} \in U \cap V$. Έτσι, ορίζεται το δίκτυο $(p_{(U,V)})_{(U,V)\in\Lambda}$ στο X. Τότε $p_{(U,V)} \to x$. Πράγματι, έστω $U_0 \in \mathfrak{N}_x$. Τότε $(U_0, X) \in \Lambda$ και ακόμη για κάθε $(U,V) \in \Lambda$ με $(U,V) \geq (U_0, X)$ έχουμε $p_{(U,V)} \in U \cap V \subseteq U \subseteq U_0$. Επομένως $p_{(U,V)} \to x$. Όμοια δείχνει κανείς ότι $p_{(U,V)} \to y$, πράγμα άτοπο, αφού $x \neq y$.

Πρόταση 5.2.7. *Έστω X ένας T_2 χώρος και Y ένας τοπολογικός χώρος. Αν υπάρχει συνάρτηση $f : X \to Y$ $1-1$, επί και ανοικτή, τότε ο Y είναι T_2 χώρος. Ιδιαίτερα, αν ο Y είναι ομοιομορφικός με τον X, τότε είναι T_2 χώρος.*

Απόδειξη: Έστω $x, y \in Y$ και τα σημεία $f^{-1}(x), f^{-1}(y) \in X$. Αφού ο X είναι T_2 χώρος, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα U και V, με $f^{-1}(x) \in U$ και $f^{-1}(y) \in V$. Η f είναι ανοικτή, συνεπώς τα σύνολα $f(U)$ και $f(V)$ είναι ανοικτά στο Y και προφανώς $x \in f(U), y \in f(V)$. Αφού η f είναι $1-1$, έχουμε ότι $f(U) \cap f(V) = f(U \cap V) = \emptyset$. Επομένως ο Y είναι T_2.

Πρόταση 5.2.8. *Αν X είναι ένας T_2 χώρος και A ένας υπόχωρός του, τότε και ο A είναι T_2.*

Απόδειξη: Έστω $x, y \in A$. Τότε, αφού ο X είναι T_2, υπάρχουν ξένα ανοικτά υποσύνολα G_1, G_2 του X ώστε $x \in G_1$ και $y \in G_2$. Έτσι, έχουμε ότι τα σύνολα $U = G_1 \cap A$ και $V = G_2 \cap A$ είναι ξένα και ανοικτά στο A, με $x \in U$ και $y \in V$. Επομένως ο A είναι χώρος T_2.

Πρόταση 5.2.9. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια T_2 τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ είναι T_2.*

Απόδειξη: Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Αφού ο X_{i_0} είναι T_2, υπάρχουν G_1, G_2 ξένα, ανοικτά σύνολα στο X_{i_0}, ώστε $x_{i_0} \in G_1$ και $y_{i_0} \in G_2$. Τότε τα $\pi_{i_0}^{-1}(G_1)$ και $\pi_{i_0}^{-1}(G_2)$ είναι ξένα και ανοικτά στο X (αφού η π_{i_0} είναι συνεχής), με $x \in \pi_{i_0}^{-1}(G_1)$ και $y \in \pi_{i_0}^{-1}(G_2)$. Επομένως ο X είναι T_2 χώρος.

5.3 Κανονικοί Χώροι

Το τρίτο διαχωριστικό αξίωμα αφορά το διαχωρισμό ενός κλειστού συνόλου από ένα εξωτερικό του σημείο. Οι περισσότεροι τοπολογικοί χώροι που παρουσιάζουν ενδιαφέρον ικανοποιούν αυτό το αξίωμα, το οποίο ισοδυναμεί με την ύπαρξη βάσης περιοχών από κλειστά σύνολα, για κάθε σημείο του χώρου.

Ορισμός 5.3.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται χώρος T_3 ή κανονικός χώρος αν για κάθε $F \subseteq X$ κλειστό και $x \in X \setminus F$, υπάρχουν ανοικτά σύνολα G_1, G_2 με $x \in G_1$, $F \subseteq G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Παρατήρηση 5.3.2. *Κάθε T_3 και T_1 χώρος είναι T_2 χώρος.*

Πρόταση 5.3.3. *Για έναν τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο X είναι κανονικός.*

(ii) *Για κάθε $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$, υπάρχει $U \in \mathfrak{N}_x$ με $\overline{U} \cap F = \emptyset$.*

(iii) *Για κάθε $x \in X$ και $U \in \mathfrak{N}_x$, υπάρχει $V \in \mathfrak{N}_x$ με $\overline{V} \subseteq U$.*

(iv) *Για κάθε $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$, υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά σύνολα με $x \in G_1$, $F \subseteq G_2$ και $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = \emptyset$.*

Απόδειξη: (i)⇒(ii) Έστω $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$. Αφού ο X είναι T_3, υπάρχουν U και V ανοικτά με $x \in U$, $F \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Τότε $U \in \mathfrak{N}_x$ και $\overline{U} \cap F = \emptyset$ (διότι αν $y \in F$, τότε V είναι ανοικτό και $U \cap V = \emptyset$).

(ii)⇒(iii) Έστω $x \in X$ και $U \in \mathfrak{N}_x$, δηλαδή $x \in U^\circ$. Αν $F = X \setminus U^\circ$, τότε $x \notin F$ και προφανώς F κλειστό. Από το (ii), υπάρχει $V \in \mathfrak{N}_x$ ώστε $\overline{V} \cap F = \emptyset$, δηλαδή $\overline{V} \subseteq U^\circ \subseteq U$.

(iii)⇒(iv) Έστω $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$. Τότε $X \setminus F \in \mathfrak{N}_x$. Από το (iii), υπάρχει $V \in \mathfrak{N}_x$ ώστε $\overline{V} \subseteq X \setminus F$ (V ανοικτή περιοχή). Πάλι από το (iii), υπάρχει $W \in \mathfrak{N}_x$ ώστε $\overline{W} \subseteq V$. Θέτουμε $G_1 = W^\circ$ και $G_2 = X \setminus \overline{V}$. Τότε τα G_1, G_2 είναι ανοικτά, $x \in G_1$, $F \subseteq G_2$ και $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = \emptyset$ (διότι $G_1 \subseteq W \Rightarrow \overline{G}_1 \subseteq \overline{W}$ και ακόμη $\overline{G}_2 = \overline{X \setminus \overline{V}} = \overline{(X \setminus V)^\circ} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subseteq X \setminus \overline{W}$).

(iv)⇒(i) Είναι προφανές.

Παρατήρηση 5.3.4. *Στα (ii) και (iii) της Πρότασης 5.3.3, το σύστημα περιοχών $\mathfrak{N}_x$ μπορεί να αντικατασταθεί από μία βάση περιοχών $\mathfrak{B}_x$ του x και ειδικά από την $\mathfrak{B}_x = \{U \subseteq X :\ U$ ανοικτό με $x \in U\}$.*

Πόρισμα 5.3.5. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε $x \in X$ έχει βάση περιοχών από κλειστά σύνολα.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Για κάθε $x \in X$ έστω $\mathfrak{B}_x = \left\{\overline{U} :\ U \in \mathfrak{N}_x\right\}$. Τότε $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$ και από την Πρόταση 5.3.3(i)⇔(iii), έπεται ότι η $\mathfrak{B}_x$ είναι βάση περιοχών του x.

$(\Leftarrow)$ Έπεται από την Πρόταση 5.3.3(i)⇔(iii).

Παραδείγματα 5.3.6. *(α) Κάθε μετρικός χώρος (X,ρ) είναι κανονικός, διότι αν $x \in X$, η οικογένεια των κλειστών μπαλών $\{\tilde{B}(x,\varepsilon) :\ \varepsilon > 0\}$ είναι βάση περιοχών του x από κλειστά σύνολα.*

(β) Έστω $X = \{a, b, c\}$ με την τοπολογία $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$. Ο χώρος $(X,\mathcal{T})$ δεν είναι T_1, αφού το $\{b\}$ δεν είναι κλειστό (επομένως δεν είναι ούτε T_2), όμως είναι T_3, διότι τα κλειστά υποσύνολα του X είναι συγχρόνως και ανοικτά.

(γ) Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και ένα μη κλειστό $A \subseteq X$ με $A^\circ = \emptyset$. Αν $\mathcal{S}$ είναι η τοπολογία στο X με υποβάση την $\mathcal{T} \cup \{A^c\}$, τότε ο χώρος $(X,\mathcal{S})$ δεν είναι T_3. Μία βάση για την $\mathcal{S}$ είναι η $\mathcal{B} = \mathcal{T} \cup \{G \setminus A :\ G \in \mathcal{T}\}$, άρα

$$\mathcal{S} = \{G_1 \cup (G_2 \setminus A) :\ G_1, G_2 \in \mathcal{T}\}.$$

Αφού το A δεν είναι κλειστό στο X, ως προς την $\mathcal{T}$, υπάρχει στοιχείο $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{T}} A \setminus A$. Έχουμε ότι το A είναι κλειστό ως προς την $\mathcal{S}$ και $x \notin A$. Έστω $U, V \in \mathcal{S}$ με $x \in U$ και $A \subseteq V$. Αρκεί να δείξουμε ότι $U \cap V \neq \emptyset$ (δίοτι τότε τα x και A δε θα διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα της $\mathcal{S}$).

Έχουμε $U = G_1 \cup (G_2 \setminus A)$ και $V = G_3 \cup (G_4 \setminus A)$, όπου τα $G_1, \ldots, G_4 \in \mathcal{T}$. Αφού $A \subseteq V$, έπεται ότι $A \subseteq G_3$. Αφού $x \in U$, έπεται ότι $x \in G_1$ ή $x \in G_2$.

- *Αν $x \in G_1$, τότε $G_1 \cap A \neq \emptyset$, αφού $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{T}} A$. Επομένως $U \cap V \neq \emptyset$.*
- *Αν $x \in G_2$, τότε $G_2 \cap A \neq \emptyset$, αφού $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{T}} A$. Αφού $A \subseteq G_3$, έπεται ότι $G_2 \cap G_3 \neq \emptyset$ και είναι προφανώς ανοικτό ως προς την $\mathcal{T}$. Επομένως $G_2 \cap G_3 \not\subseteq A$, διότι $\mathrm{int}_{\mathcal{T}} A = \emptyset$. Άρα $(G_2 \setminus A) \cap G_3 \neq \emptyset$. Αφού $G_2 \setminus A \subseteq U$ και $G_3 \subseteq V$, έπεται ότι $U \cap V \neq \emptyset$.*

(δ) Έστω $\mathcal{T}$ η συνήθης τοπολογία του $\mathbb{R}$ και $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω $\mathcal{S}$ η τοπολογία του $\mathbb{R}$ που έχει ως υποβάση την $\mathcal{T} \cup \{A^c\}$. Τότε ο $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ είναι T_2 χώρος, αλλά όχι T_3. Πράγματι, ο $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ είναι T_2 χώρος (ως μετρικοποιήσιμος) και αφού $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{T}$, έπεται ότι ο $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ είναι T_2. Το A δεν είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$ και $\operatorname{int}_{\mathcal{T}} A = \emptyset$. Άρα, από το Παράδειγμα (γ), ο $(\mathbb{R}, \mathcal{S})$ δεν είναι T_3 (συγκεκριμένα $0 \notin A$, το οποίο είναι κλειστό ως προς την $\mathcal{S}$, και τα 0, A δε διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα της $\mathcal{S}$).

Πρόταση 5.3.7. *Έστω Y ένας κανονικός τοπολογικός χώρος, X ένας τοπολογικός χώρος και D ένας πυκνός υπόχωρος του X. Αν για μία συνάρτηση $f : X \to Y$ ισχύει ότι η $f|_{D\cup\{x\}}$ είναι συνεχής για κάθε $x \in X$, τότε η f είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ και δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στο X με $x_\lambda \to x$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $f(x_\lambda) \to f(x)$. Έστω, προς άτοπο, ότι $f(x_\lambda) \nrightarrow f(x)$. Τότε υπάρχει κλειστή (αφού ο Y είναι T_3) περιοχή V, του $f(x)$, ώστε για κάθε $\mu \in \Lambda$ να υπάρχει $\mu' \in \Lambda$, $\mu' \geq \mu$ με $f(x_{\mu'}) \notin V$.

Η $f|_{D\cup\{x\}}$ είναι συνεχής, άρα υπάρχει U_0 ανοικτή περιοχή του x, τέτοια ώστε $f(U_0 \cap (D \cup \{x\})) \subseteq V$. Αφού $x_\lambda \to x$, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε για κάθε $\lambda \in \Lambda$ με $\lambda \geq \lambda_0$ να ισχύει ότι $x_\lambda \in U_0$. Όμως, αφού $f(x_\lambda) \nrightarrow f(x)$, υπάρχει $\lambda_1 \in \Lambda$ με $f(x_{\lambda_1}) \notin V$. Δηλαδή, το V^c είναι (ανοικτή) περιοχή του $f(x_{\lambda_1})$.

Η $f|_{D\cup\{x_{\lambda_1}\}}$ είναι συνεχής, άρα υπάρχει U_1 ανοικτή περιοχή του x_{λ_1}, τέτοια ώστε $f(U_1 \cap (D \cup \{x_{\lambda_1}\})) \subseteq V^c$. Όμως το σύνολο $U_1 \cap U_0$ είναι ανοικτό και μη κενό (αφού $x_{\lambda_1} \in U_1 \cap U_0$), άρα $U_1 \cap U_0 \cap D \neq \emptyset$ (αφού το D είναι πυκνό στο X). Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο, αφού:

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_0 \cap D \subseteq U_1 \cap D &\implies f(U_1 \cap U_0 \cap D) \subseteq V^c \\ U_1 \cap U_0 \cap D \subseteq U_2 \cap D &\implies f(U_1 \cap U_0 \cap D) \subseteq V. \end{aligned}$$

Επομένως $f(x_\lambda) \to f(x)$ και κατά συνέπεια, η f είναι συνεχής.

Πρόταση 5.3.8. *Αν X είναι ένας T_3 τοπολογικός χώρος και Y είναι ένας τοπολογικός χώρος, ομοιομορφικός με τον X, τότε και Y είναι T_3 χώρος.*

Απόδειξη: Έστω $\phi : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός των X και Y, καθώς και ένα $y \in Y$. Αφού ο χώρος X είναι T_3, το σημείο $\phi^{-1}(y)$ έχει μία βάση περιοχών $\mathfrak{B}_{\phi^{-1}(y)}$, από κλειστά σύνολα. Έτσι, έχουμε ότι η οικογένεια $\{\phi(V) : V \in \mathfrak{B}_{\phi^{-1}(y)}\}$ είναι μία βάση περιοχών του y από κλειστά σύνολα (γιατί;). Επομένως ο χώρος Y είναι T_3.

Πρόταση 5.3.9. *Αν X είναι ένας T_3 χώρος και A ένας υπόχωρός του, τότε και ο A είναι T_3.*

Απόδειξη: Έστω $x \in A$ και $F \subseteq A$, κλειστό στο A, με $x \notin F$. Τότε υπάρχει $K \subseteq X$ κλειστό (στο X) ώστε $F = K \cap A$. Έχουμε ότι $x \notin K$ και, αφού ο X είναι T_3, υπάρχουν G_1, G_2 ξένα, ανοικτά σύνολα στο X, με $x \in G_1$ και $K \subseteq G_2$. Τότε τα σύνολα $U = G_1 \cap A$ και $V = G_2 \cap A$ είναι ξένα και ανοικτά στο A, με $x \in U$ και $F = K \cap A \subseteq V$. Άρα ο χώρος A είναι T_3.

Πρόταση 5.3.10. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια T_3 τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι T_3.*

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ και $U \in \mathfrak{N}_x$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $V \in \mathfrak{N}_x$ ώστε $\overline{V} \subseteq U$. Έχουμε ότι $x \in U^\circ$, το οποίο είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ (όπου $\mathcal{B}$ η κανονική βάση για την τοπολογία γινόμενο) ώστε $x \in B \subseteq U^\circ \subseteq U$. Τότε $B = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_k)$, όπου $U_k \subseteq X_{i_k}$ ανοικτό, για $k = 1, \ldots, n$. Αφού $x \in B$, έχουμε ότι $x_{i_k} \in U_k$ για $k = 1, \ldots, n$. Αφού οι χώροι X_{i_k} είναι T_3, υπάρχει ανοικτό $V_k \subseteq X_{i_k}$, ώστε $x_{i_k} \in V_k$

και $\overline{V}_k \subseteq U_k$, για κάθε k. Θέτουμε $V = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(V_k)$. Τότε το V είναι ανοικτό και $x \in V$, δηλαδή $V \in \mathfrak{N}_x$. Επίσης

$$\overline{V} = \overline{\left(\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(V_k)\right)} = \overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i} = \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(\overline{V}_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_k) = U$$

$$\text{όπου } A_i = \begin{cases} V_k, & \text{αν } i = i_k,\ k = 1, \dots, n \\ X_i, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

5.4 Φυσιολογικοί Χώροι

Σε αυτή την παράγραφο μελετούμε τους φυσιολογικούς χώρους, δηλαδή τους τοπολογικούς χώρους στους οποίους είναι εφικτός ο διαχωρισμός των ξένων, κλειστών συνόλων από ανοικτά σύνολα. Στους φυσιολογικούς χώρους ισχύουν εξαίρετα Θεωρήματα όπως το Λήμμα του Urysohn και το Θεώρημα επέκτασης του Tietze, αλλά κατά μία έννοια οι φυσιολογικοί χώροι δε συμπεριφέρονται όσο καλά θα περίμενε κανείς (για παράδειγμα, το γινόμενο δύο φυσιολογικών χώρων δεν είναι κατ' ανάγκη φυσιολογικός χώρος). Αφού ολοκληρώσουμε τη συνήθη διερεύνηση και γι' αυτό το διαχωριστικό αξίωμα, θα προχωρήσουμε στην απόδειξη κάποιων ιδιαίτερα σημαντικών αποτελεσμάτων που ισχύουν σε φυσιολογικούς χώρους .

Ορισμός 5.4.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται φυσιολογικός ή χώρος T_4, αν για κάθε κλειστά σύνολα $F_1, F_2 \subseteq X$ με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $G_1, G_2 \subseteq X$ ώστε $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Παρατήρηση 5.4.2. *Κάθε T_4 και T_1 χώρος είναι T_3 χώρος.*

Πρόταση 5.4.3. *Για έναν τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι φυσιολογικός.

(ii) Για κάθε $F_1, F_2 \subseteq X$ κλειστά με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτό με $F_1 \subseteq U$ και $\overline{U} \cap F_2 = \emptyset$.

(iii) Για κάθε $F \subseteq X$ κλειστό και $G \subseteq X$ ανοικτό με $F \subseteq G$, υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτό με $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq G$.

(iv) Για κάθε $F_1, F_2 \subseteq X$ κλειστά με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, υπάρχουν G_1, G_2 ανοικτά σύνολα με $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$ και $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = \emptyset$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή της Πρότασης 5.3.3 και για το λόγο αυτό αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 5.4.4. *Αν σε έναν τοπολογικό χώρο X κάθε κλειστό σύνολο F είναι της μορφής $F = \{x \in X : f(x) = 0\}$ για κάποια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, τότε ο X είναι φυσιολογικός. Ιδιαίτερα, κάθε μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος είναι φυσιολογικός.*

Απόδειξη: Έστω $F_1, F_2 \subseteq X$ κλειστά με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Τότε υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ ώστε $F_1 = f_1^{-1}(\{0\})$ και $F_2 = f_2^{-1}(\{0\})$. Ορίζουμε

$$\phi : X \to \mathbb{R} \ \text{ με } \ \phi(x) = \frac{|f_1(x)|}{|f_1(x)| + |f_2(x)|}.$$

Η ϕ είναι καλά ορισμένη, συνεχής με $\phi(x) = 0$ για κάθε $x \in F_1$ και $\phi(x) = 1$ για κάθε $x \in F_2$. Θέτουμε $U = \phi^{-1}((-\infty, 1/2))$ και $V = \phi^{-1}((1/2, +\infty))$. Τότε τα U, V είναι ξένα, ανοικτά (διότι η ϕ είναι συνεχής) και $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$. Επομένως ο χώρος X είναι T_4.

Αν $(X,\mathcal{T})$ είναι ένας μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, υπάρχει μετρική ρ στο X ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$. Έστω $F \subseteq X$ κλειστό. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = d(x,F)$ (η απόσταση του σημείου x από το σύνολο F). Τότε η f είναι συνεχής ($|f(x) - f(y)| \leq \rho(x,y)$ $\forall x,y \in X$) και για κάθε $x,y \in X$ ισχύει

$$f(x) = 0 \iff d(x,F) = 0 \iff x \in \overline{F} = F,$$

δηλαδή $F = f^{-1}(\{0\})$. Επομένως ο X είναι T_4.

Πρόταση 5.4.5. *Έστω X ένας φυσιολογικός χώρος και $\{U_1, U_2 \ldots, U_n\}$ ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{V_1, V_2 \ldots, V_n\}$ του X, ώστε $\overline{V}_k \subseteq U_k$ για κάθε $k = 1,2,\ldots,n$. Το κάλυμμα $\{V_1, V_2 \ldots, V_n\}$ καλείται συρρίκνωση του $\{U_1, U_2 \ldots, U_n\}$.*

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο $V_1 \subseteq X$ ώστε $\overline{V}_1 \subseteq U_1$ και $V_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots \cup U_n = X$, διότι τότε το συμπέρασμα έπεται με επαγωγή. Παρατηρούμε ότι $X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_n) \subseteq U_1$. Αφού το σύνολο $X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_n)$ είναι κλειστό, το U_1 είναι ανοικτό και ο χώρος X είναι T_4, από την Πρόταση 5.4.3(iii), έπεται ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο V_1 ώστε

$$X \setminus (U_2 \cup \cdots \cup U_n) \subseteq V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq U_1.$$

Επομένως $X = V_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots \cup U_n$ και $\overline{V}_1 \subseteq U_1$.

Παραδείγματα 5.4.6. *(α) Έστω $X = \{a, b, c\}$ με την τοπολογία*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}.$$

Όπως έχουμε δει στο Παράδειγμα 5.3.6(β), ο χώρος $(X,\mathcal{T})$ δεν είναι T_1 (ούτε T_2) αλλά είναι T_4 (και T_3), αφού τα κλειστά σύνολα του X συμπίπτουν με τα ανοικτά.

(β) Έστω $X = \{a, b, c\}$ με την τοπολογία του εξαιρούμενου σημείου c,

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}.$$

Ο χώρος $(X,\mathcal{T})$ είναι T_4. Πράγματι, τα κλειστά σύνολα του X είναι τα X, $\emptyset$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{c\}$. Άρα αν $F_1,F_2 \subseteq X$ είναι κλειστά και ξένα, τότε τουλάχιστον ένα από τα F_1,F_2 είναι κενό και έστω ότι αυτό είναι το F_1. Τότε τα F_1,F_2 διαχωρίζονται από τα $G_1 = \emptyset$ και $G_2 = X$. Ο $(X,\mathcal{T})$ δεν είναι T_3. Πράγματι, για το κλειστό σύνολο $F = \{c\}$, έχουμε ότι $a \notin F$ και το μοναδικό ανοικτό σύνολο που περιέχει το F είναι το X. Άρα τα a και F δε διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

Γενικότερα, αν $(X,\mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος με τουλάχιστον δύο σημεία και $\mathcal{T}$ είναι η τοπολογία του εξαιρούμενου σημείου x_0, τότε ο χώρος $(X,\mathcal{T})$ είναι T_4 και όχι T_3.

(γ) Ο τοπολογικός χώρος $\mathbb{R}_S$ είναι T_4. Έστω $F_1,F_2 \subseteq \mathbb{R}_S$ ξένα κλειστά σύνολα. Τότε $F_1 \subseteq \mathbb{R}_S \setminus F_2$, με το $\mathbb{R}_S \setminus F_2$ να είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}_S$. Αφού για κάθε $x \in X$, η οικογένεια $\{(a,x] : a \in \mathbb{R}, a < x\}$ είναι βάση περιοχών του x, για κάθε $x \in F_1$ υπάρχει $a_x < x$ ώστε $(a_x,x] \subseteq \mathbb{R}_S \setminus F_2$. Ανάλογα $F_2 \subseteq \mathbb{R}_S \setminus F_1$, άρα για κάθε $y \in F_2$ υπάρχει $b_y < y$ ώστε $(b_y,y] \subseteq \mathbb{R}_S \setminus F_1$. Θέτουμε

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} (a_x,x] \text{ και } G_2 = \bigcup_{y \in F_2} (b_y,y].$$

Τότε τα G_1,G_2 είναι ανοικτά στον $\mathbb{R}_S$, $F_1 \subseteq G_1$ και $F_2 \subseteq G_2$. Έστω, προς άτοπο, ότι $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Τότε υπάρχουν $x \in F_1$ και $y \in F_2$ ώστε $(a_x,x] \cap (b_y,y] \neq \emptyset$. Τότε $x < y$ ή $y < x$ (αφού $F_1 \cap F_2 = \emptyset$). Αν $x < y$, τότε $x \in (b_y,y] \subseteq \mathbb{R}_S \setminus F_1$, πράγμα άτοπο. Όμοια για $y < x$. Άρα $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Πρόταση 5.4.7. *Αν X είναι ένας T_4 τοπολογικός χώρος και Y είναι ένας τοπολογικός χώρος, ομοιομορφικός με τον X, τότε και Y είναι T_4 χώρος.*

Απόδειξη: Έστω $\phi : X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός των X, Y και ξένα, κλειστά σύνολα $F_1, F_2 \subseteq Y$. Τότε τα σύνολα $\phi^{-1}(F_1)$, $\phi^{-1}(F_2)$ είναι ξένα και κλειστά (αφού η ϕ είναι συνεχής). Ο χώρος X είναι T_4, συνεπώς υπάρχουν G_1, $G_2 \subseteq X$ ξένα, ανοικτά ώστε $\phi^{-1}(F_1) \subseteq G_1$ και $\phi^{-1}(F_2) \subseteq G_2$. Τότε $F_1 \subseteq \phi(G_1)$ και $F_2 \subseteq \phi(G_2)$ (αφού η ϕ είναι επί), όπου τα $\phi(G_1), \phi(G_2)$ είναι ανοικτά στο Y (ϕ ανοικτή) και ξένα (η ϕ είναι $1-1$). Επομένως ο χώρος Y είναι T_4.

Πρόταση 5.4.8. *Αν X είναι ένας T_4 χώρος και A ένας κλειστός υπόχωρός του, τότε και ο A είναι T_4.*

Απόδειξη: Έστω σύνολα F_1, $F_2 \subseteq A$ ξένα και κλειστά. Αφού ο A είναι κλειστός υπόχωρος του X, τα F_1, F_2 είναι κλειστά στο X. Άρα υπάρχουν ξένα, ανοικτά (στο X) σύνολα G_1, G_2 με $F_1 \subseteq G_1$ και $F_2 \subseteq G_2$. Τότε τα σύνολα $G_1 \cap A$, $G_2 \cap A$ είναι ανοικτά στο A και ξένα, με $F_1 \subseteq G_1 \cap A$ και $F_2 \subseteq G_2 \cap A$.

Παρατήρηση 5.4.9. *Η Πρόταση 5.4.8 δεν είναι γενικά αληθής αν ο A είναι ένας τυχών υπόχωρος του X. Υπάρχουν φυσιολογικοί τοπολογικοί χώροι, των οποίων οι υπόχωροι δεν είναι κατ' ανάγκη φυσιολογικοί.*

Παράδειγμα 5.4.10 (ο χώρος του Sorgenfrey). *Θεωρούμε τον τοπολογικό χώρο $\mathbb{R}_S$. Ο χώρος του Sorgenfrey είναι ο χώρος $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ με την καρτεσιανή τοπολογία. Θα δείξουμε ότι ο χωρος του Sorgenfrey δεν είναι φυσιολογικός (κατά συνέπεια το γινόμενο φυσιολογικών χώρων δεν είναι πάντα φυσιολογικός χώρος).*

Παρατηρούμε αρχικά ότι το «αντιδιαγώνιο» σύνολο

$$A = \{(x, -x) : \ x \in \mathbb{R}\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$, αφού το A είναι κλειστό στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και η τοπολογία του $\mathbb{R}_S$ είναι ισχυρότερη από την τοπολογία του $\mathbb{R}$. Ακόμη, η σχετική τοπολογία του A (ως προς την τοπολογία του $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ είναι η διακριτή, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}_S$, $\{(x, -x)\} = (x-1, x] \times (-x-1, -x] \cap A$. Συνεπώς κάθε υποσύνολο του A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$. Θέτουμε

$$F_1 = \{(x, -x) : \ x \in \mathbb{Q}\} \ \text{ και } \ F_2 = \{(x, -x) : \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε, τα F_1, F_2 είναι κλειστά (και προφανώς ξένα) υποσύνολα του $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$. Θα δείξουμε ότι τα σύνολα F_1, F_2 δε διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχουν ξένα, ανοικτά σύνολα G_1, $G_2 \subseteq \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$, ώστε $F_1 \subseteq G_1$ και $F_2 \subseteq G_2$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο B_x, στοιχείο της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$, ώστε $(x, -x) \in B_x \subseteq G_2$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνολο B_x είναι της μορφής $(x - \frac{1}{n_x}, x] \times (-x - \frac{1}{n_x}, -x]$, για κάποιο $n_x \in \mathbb{N}$ (γιατί;). Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$, ώστε

$$(x, -x) \in \left(x - \frac{1}{n_x}, x\right] \times \left(-x - \frac{1}{n_x}, -x\right] \subseteq G_2.$$

Θέτουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \ n_x = n\}$ και παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ \text{ και ότι } \ \mathbb{R} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}\right).$$

Από το Θεώρημα κατηγορίας του Baire για τον πλήρη μετρικό χώρο $\mathbb{R}$, υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, ώστε $(\overline{A}_{n_0})^\circ \neq \emptyset$ (όπου η κλειστότητα και το εσωτερικό λαμβάνονται ως προς τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$).

Άρα υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, ώστε $(a,b) \subseteq \overline{A_{n_0}}$. Επιλέγουμε ένα ρητό αριθμό q_0 στο διάστημα (a,b). Αφού $q_0 \in \overline{A_{n_0}}$, έχουμε ότι κάθε περιοχή του q_0 τέμνει το A_{n_0}. Ιδιαίτερα, για κάθε $\varepsilon > 0$, $(q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon) \cap A_{n_0} \neq \emptyset$. Αν επιλέξουμε ένα θετικό $\varepsilon < \frac{1}{n_0}$ και $t_0 \in (q_0 - \varepsilon, q_0 + \varepsilon) \cap A_{n_0}$, έπεται ότι

$$(q_0, -q_0) \in (t_0 - \varepsilon, t_0] \times (-t_0 - \varepsilon, -t_0] \subseteq G_2.$$

Επιπλέον $(q_0, -q_0) \in F_1 \subseteq G_1$. Συνεπώς υπάρχει ένα $\delta > 0$ ώστε

$$(q_0, -q_0) \in (q_0 - \delta, q_0] \times (-q_0 - \delta, -q_0] \subseteq G_1.$$

Επομένως $(q_0, -q_0) \in G_1 \cap G_2$, πράγμα άτοπο. Άρα ο χώρος του Sorgenfrey δεν είναι φυσιολογικός. Στην απόδειξη που παραθέσαμε, ουσιώδης ήταν η χρήση του Θεωρήματος κατηγορίας του Baire. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας ένα άλλο ισχυρό εργαλείο (Λήμμα του Jones), θα δώσουμε μία διαφορετική απόδειξη για τη μη φυσιολογικότητα του χώρου του Sorgenfrey.

Παρατήρηση 5.4.11. *Ο τοπολογικός χώρος $\mathbb{R}_S$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος. Πράγματι, αν ο $\mathbb{R}_S$ ήταν μετρικοποιήσιμος, τότε μετρικοποιήσιμος θα ήταν και ο χώρος $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ και κατά συνέπεια θα ήταν φυσιολογικός, πράγμα άτοπο.*

5.4.1 Βασικά Θεωρήματα σε Φυσιολογικούς Χώρους

Σε αυτό το σημείο θα αποδείξουμε ένα ισχυρό αποτέλεσμα για τους φυσιολογικούς τοπολογικούς χώρους, αλλά και ευρύτερα για τη συνολοθεωρητική τοπολογία. Το *Λήμμα του Urysohn*, όπως συχνά καλείται το αποτέλεσμα αυτό, εξασφαλίζει την ύπαρξη πληθώρας συνεχών πραγματικών συναρτήσεων σε ένα φυσιολογικό τοπολογικό χώρο. Επιπλέον, αποτελεί ουσιαστικό εργαλείο για την απόδειξη αρκετών σημαντικών θεωρημάτων.

Θεώρημα 5.4.12 (Λήμμα Urysohn). *Έστω X ένας φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και A, B ξένα και κλειστά υποσύνολα του X. Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ ώστε $f(a) = 0$ για κάθε $a \in A$ και $f(b) = 1$ για κάθε $b \in B$.*

Απόδειξη: Το πρώτο τμήμα της απόδειξης αφορά την κατασκευή (με χρήση της φυσιολογικότητας του X) μίας οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων του X, με δείκτες σε ένα πυκνό (αριθμήσιμο) υποσύνολο του $[0,1]$. Το σύνολο δεικτών που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το σύνολο των δυαδικών ρητών του διαστήματος $[0,1]$:

$$\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n, \text{ όπου } \Delta_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : k = 0, 1, \ldots, 2^n \right\} \text{ για } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Έχουμε ότι $\Delta_0 = \{0,1\}$, $\Delta_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\} = \Delta_0 \cup \{\frac{1}{2}\}, \ldots$ και παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(\Delta_n)_{n \geq 0}$ είναι αύξουσα με

$$\Delta_{n+1} \setminus \Delta_n = \left\{ \frac{k}{2^{n+1}} : k \text{ περιττός}, k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1}\} \right\}.$$

Επιθυμούμε να ορίσουμε ένα ανοικτό σύνολο $U(d)$ για κάθε $d \in \Delta$, έτσι ώστε αν για δύο στοιχεία $a, b \in \Delta$ ισχύει $a < b$, τότε να έχουμε ότι $\overline{U(a)} \subseteq U(b)$. Με αυτόν τον τρόπο, τα σύνολα $U(d)$ θα διατάσσονται από τη σχέση του περιέχεσθαι, όπως ακριβώς διατάσσονται οι δείκτες τους από τη συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών. Επιλέξαμε ένα αριθμήσιμο σύνολο δεικτών για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τα σύνολα $U(d)$ με επαγωγή. Ακριβολογώντας, θα ορίσουμε τα ανοικτά σύνολα $U(d)$ για $d \in \Delta_n$, με επαγωγή ως προς το n, έτσι ώστε

(i) $A \subseteq U(d) \subseteq B^c$, για κάθε $d \in \Delta$.

(ii) Αν $d, d' \in \Delta$ με $d < d'$, τότε $\overline{U(d)} \subseteq U(d')$.

Για $n = 0$ καλούμαστε να ορίσουμε τα $U(0), U(1)$. Θέτουμε $U(1) = B^c$. Αφού ο χώρος X είναι φυσιολογικός, μπορούμε να επιλέξουμε ανοικτό σύνολο $U(0)$ ώστε

$$A \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1).$$

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει τα σύνολα $U(d)$ για $d \in \Delta_n$. Αρκεί να ορίσουμε τα $U(d)$ για $d \in \Delta_{n+1} \setminus \Delta_n$. Έστω $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1}\}$ περιττός. Στο Δ_n έχουμε $\frac{k-1}{2^{n+1}} < \frac{k+1}{2^{n+1}}$, άρα από την επαγωγική υπόθεση, $\overline{U(\frac{k-1}{2^{n+1}})} \subseteq U(\frac{k+1}{2^{n+1}})$. Αφού ο χώρος X είναι φυσιολογικός, υπάρχει ανοικτό σύνολο $U(\frac{k}{2^{n+1}})$, ώστε

$$\overline{U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)} \subseteq U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) \subseteq \overline{U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)} \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right).$$

Στη συνέχεια επεκτείνουμε την οικογένεια των ανοικτών συνόλων που ορίσαμε, θέτοντας $U(d) = X$ για κάθε $d \in (1, +\infty)$. Συνεπώς, έχουμε ορίσει ένα ανοικτό σύνολο $U(d) \subseteq X$ για κάθε $d \in D := \Delta \cup (1, +\infty)$, έτσι ώστε αν $d, d' \in D$ με $d < d'$, τότε $\overline{U(d)} \subseteq U(d')$. Ακόμη, το D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $[0, +\infty)$.

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να ορίσουμε την επιθυμητή συνάρτηση. Για κάθε $x \in X$, το σύνολο $D(x) = \{d \in D : \ x \in U(d)\}$ είναι μη κενό και μάλιστα, $(1, +\infty) \subseteq D(x) \subseteq [0, +\infty)$. Επομένως, για κάθε $x \in X$, το σύνολο $D(x)$ είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, με $\inf D(x) \in [0, 1]$. Συνεπώς, ορίζεται καλά η συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ με

$$f(x) = \inf D(x) = \inf\{d \in D : \ x \in U(d)\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $x \in A$, τότε $x \in U(d)$ για κάθε $d \in D$, δηλαδή $D(x) = D$. Άρα $f(x) = \inf D = 0$. Επίσης, αν $y \in B$, τότε $y \notin U(d)$ για κάθε $d \in \Delta$ κι επομένως $D(y) = (1, +\infty)$. Άρα $f(y) = 1$.

Τελικός μας στόχος είναι να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής. Ισχυριζόμαστε ότι:

$x \in \overline{U(d)} \Rightarrow f(x) \leq d$. Πράγματι, αν $x \in \overline{U(d)}$, τότε $x \in U(r)$ για κάθε $r \in D$ με $r > d$. Συνεπώς, $D \cap (d, +\infty) \subseteq D(x)$, άρα από τον ορισμό της f, $f(x) = \inf D(x) \leq d$.

$x \notin U(d) \Rightarrow f(x) \geq d$. Πράγματι, αν $x \notin U(d)$, τότε $x \notin U(r)$ για κάθε $r \in D$ με $r < d$. Συνεπώς, $D(x) \subseteq (d, +\infty)$, άρα από τον ορισμό της f, $f(x) = \inf D(x) \geq d$.

Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αναζητούμε μία περιοχή U του x_0, τέτοια ώστε

$$f(U) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

Από την πυκνότητα του συνόλου D στο $[0, +\infty)$, υπάρχουν $d_1, d_2 \in D$ ώστε

$$f(x_0) - \varepsilon < d_1 < f(x_0) < d_2 < f(x_0) + \varepsilon.$$

Θέτουμε $U = U(d_2) \setminus \overline{U(d_1)}$. Το U είναι ανοικτό σύνολο και $x_0 \in U$ (πράγματι, από το (β΄) έχουμε ότι $f(x_0) < d_2 \Rightarrow x_0 \in U(d_2)$ και από το (α΄), $f(x_0) > d_1 \Rightarrow x_0 \notin \overline{U(d_1)}$), δηλαδή $U \in \mathfrak{N}_{x_0}$. Έστω $x \in U$. Τότε $x \in U(d_2) \subseteq \overline{U(d_2)}$ άρα, από το (α΄), $f(x) \leq d_2$. Ακόμη, $x \notin U(d_1)$ άρα, από το (β΄), $f(x) \geq d_1$. Επομένως,

$$f(x) \in [d_1, d_2] \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

Συμπεραίνουμε ότι $f(U) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Δείξαμε, λοιπόν, ότι η f είναι συνεχής. Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση 5.4.13. *Στο Λήμμα Urysohn το διάστημα $[0,1]$ μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$, όπου $a,b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, απλά αντικαθιστώντας τη συνάρτηση f, του Θεωρήματος, με την $g = a + (b-a)f$.*

Μία άμεση συνέπεια του Λήμματος του Urysohn είναι ένα άλλο ιδιαίτερα χρήσιμο Θεώρημα, το Θεώρημα επέκτασης του Tietze.

Θεώρημα 5.4.14 (επέκτασης του Tietze). *Έστω X ένας φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και ένα κλειστό $F \subseteq X$.*

(i) Αν $f : F \to [a,b]$ (όπου $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$) είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε υπαρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to [a,b]$ ώστε $g|_F = f$ (δηλαδή η g επεκτείνει την f).

(ii) Αν $f : F \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε υπαρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g|_F = f$.

Απόδειξη: Η κεντρική ιδέα της απόδειξης είναι η κατασκευή μίας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων , οι οποίες θα ορίζονται σε όλο το χώρο X και ο περιορισμός τους στο σύνολο F θα προσεγγίζει ομοιόμορφα τη συνάρτηση f.

Το πρώτο στάδιο της απόδειξης αφορά την κατασκευή μίας συνάρτησης $g : X \to \mathbb{R}$, η οποία δε θα παίρνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές, αλλά και θα προσεγγίζει την f στο σύνολο F με έναν ικανό βαθμό ακρίβειας. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η f παίρνει τιμές στο διάστημα $[-r,r]$ (για ένα $r > 0$). Θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μίας συνάρτησης $g : X \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$|g(x)| \leq \tfrac{1}{3}r \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } |g(y) - f(y)| \leq \tfrac{2}{3}r \text{ για κάθε } y \in F.$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[-r,r]$ σε τρία ίσα διαστήματα μήκους $\frac{2}{3}r$ και θέτουμε:

$$I_1 = \left[-r, -\frac{1}{3}r\right],\ I_2 = \left[-\frac{1}{3}r, -\frac{1}{3}r\right],\ I_3 = \left[\frac{1}{3}r, r\right].$$

Τα σύνολα $A = f^{-1}(I_1)$, $B = f^{-1}(I_3)$ είναι ξένα και κλειστά υποσύνολα του F, αφού η f είναι συνεχής. Άρα τα A, B είναι κλειστά στο χώρο X. Από το Λήμμα του Urysohn, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$, τέτοια ώστε $g(a) = -\frac{1}{3}r$ για κάθε $a \in A$ και $g(b) = \frac{1}{3}r$ για κάθε $b \in B$. Έτσι έχουμε ότι $|g(x)| \leq \frac{1}{3}$ για κάθε $x \in X$. Μένει να ελέγξουμε ότι για καθε $y \in F$ ισχύει ότι $|g(y) - f(y)| \leq \frac{2}{3}r$. Ελέγχουμε διαδοχικά τις περιπτώσεις:

- Αν $y \in A$, τότε τα $f(y), g(y) \in I_1$, άρα απέχουν απόσταση το πολύ ίση με $\frac{2}{3}r$.
- Αν $y \in B$, τότε τα $f(y), g(y) \in I_3$, άρα απέχουν απόσταση το πολύ ίση με $\frac{2}{3}r$.
- Αν $y \notin A \cup B$, τότε τα $f(y), g(y) \in I_2$, άρα απέχουν απόσταση το πολύ ίση με $\frac{2}{3}r$.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $|g(y) - f(y)| \leq \frac{2}{3}r$. Έτσι κατασκευάσαμε την επιθυμητή συνάρτηση g.

(i) Δίχως βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το διάστημα $[a,b]$ ταυτίζεται με το διάστημα $[-1,1]$. Έστω $f : F \to [-1,1]$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, σύμφωνα με την προηγούμενη κατασκευή (για $r = 1$), υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g_1 : X \to \mathbb{R}$ με

$$|g_1(x)| \leq \tfrac{1}{3} \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } |g_1(y) - f(y)| \leq \tfrac{2}{3} \text{ για κάθε } y \in F.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $f - g_1$, η οποία απεικονίζει το σύνολο F στο $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. Άρα, εφαρμόζοντας την κατασκευή για τη συνάρτηση $f - g_1$ (και $r = \frac{2}{3}$) λαμβάνουμε μία συνάρτηση $g_2 : X \to \mathbb{R}$ με

$$|g_2(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } |f(y) - g_1(y) - g_2(y)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ για κάθε } y \in F.$$

Συνεχίζουμε την κατασκευή της ακολουθίας συναρτήσεων (g_n) επαγωγικά. Για το επαγωγικό βήμα, έστω ότι έχουμε ορίσει τις συναρτήσεις $g_1, g_2, \dots, g_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $|g_k(y)| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{k-1}$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ και $|f(y) - \sum_{k=1}^{n} g_k(y)| \leq (\frac{2}{3})^n$ για κάθε $y \in F$. Πάλι, εφαρμόζοντας την κατασκευή για τη συνάρτηση $f - g_1 - g_2 - \cdots - g_n$ (και $r = (\frac{2}{3})^n$) λαμβάνουμε μία συνάρτηση $g_{n+1} : X \to \mathbb{R}$ με

$$|g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \ \forall x \in X \text{ και } \left|f(y) - \sum_{k=1}^{n+1} g_k(y)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \ \forall y \in F.$$

Αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\sup_{x \in X} |g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 < \infty,$$

από το κριτήριο του Weierstrass έχουμε ότι η συνάρτηση

$$g : X \to [-1, 1] \text{ με } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

ορίζεται καλά ($|\sum_{k=1}^{n} g_k| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) και είναι συνεχής (αφού η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη). Επιπλέον, για κάθε $y \in F$ έχουμε ότι

$$\left|f(y) - \sum_{k=1}^{n} g_k(y)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Άρα, παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$, έπεται ότι $f(y) = g(y)$. Επομένως $g|_F = f$.

(ii) Αφού το διάστημα $(-1, 1)$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση f παίρνει τιμές στο $(-1, 1)$. Από το (i) έχουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $h : X \to [-1, 1]$ η οποία επεκτείνει την f. Σκοπός μας είναι να εντοπίσουμε μία συνεχή συνάρτηση $g : X \to (-1, 1)$ που να επεκτείνει την f. Θεωρούμε το σύνολο $K = h^{-1}(\{-1, 1\} \subseteq X$. Το K είναι κλειστό (αφού η h είναι συνεχής) και $F \cap K = \emptyset$ (αφού $h(F) = f(F) \subseteq (-1, 1)$). Από το Λήμμα του Urysohn έπεται ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to [0, 1]$ με $\phi(x) = 0$ για κάθε $x \in F$ και $\phi(y) = 1$ για κάθε $y \in K$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g = h \cdot \phi : X \to \mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής και για κάθε $x \in F$ έχουμε ότι

$$g(x) = h(x)\phi(x) = h(x) \cdot 1 = h(x) = f(x).$$

Συνεπώς η g επεκτείνει την f. Μένει να ελέγξουμε ότι $g(X) \subseteq (-1, 1)$. Για $x \in K$ έχουμε ότι $g(x) = h(x) \cdot 0 = 0$. Αν $x \notin K$, τότε $|g(x)| \leq |h(x)| \leq 1$. Σε κάθε περίπτωση, $g(x) \in (-1, 1)$.

Ορισμός 5.4.15. *Έστω ένας τοπολογικός χώρος X και $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Μία οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $\phi_i : X \to [0,1]$, για $i = 1, 2, \dots, n$, καλείται (πεπερασμένη) διαμέριση της μονάδας, επαγόμενη από το κάλυμμα $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, αν*

(i) $\overline{\{x \in X : \ \phi_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_i$ *για κάθε* $i = 1, 2, \dots, n$.

(ii) $\phi_1(x) + \phi_2(x) + \cdots + \phi_n(x) = 1$ *για κάθε* $x \in X$.

Θεώρημα 5.4.16 (Υπαρξη πεπερασμένων διαμερίσεων της μονάδας)**.** *Έστω X ένας φυσιολογικός χώρος και $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει διαμέριση της μονάδας που επάγεται από το $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 5.4.5, υπάρχει συρρίκνωση $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ του καλύμματος $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$. Για τον ίδιο λόγο, υπάρχει συρρίκνωση $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ του $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$. Από το Λήμμα του Urysohn υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n : X \to [0,1]$, τέτοιες ώστε $f(\overline{W}_k) = \{1\}$ και $f(X \setminus V_k) = \{0\}$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Αφού το $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ είναι (ανοικτό) κάλυμμα του X, έπεται ότι $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Συνεπώς για κάθε k ορίζεται καλά η συνάρτηση

$$\phi_k : X \to [0,1] \ \text{ με } \phi_k = \frac{f_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}.$$

Αφού $f_k^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq V_k$, έχουμε ότι $\overline{\{x \in X : \ f_k(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{V}_k \subseteq U_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Άρα εύκολα ελέγχει κανείς ότι οι συναρτήσεις $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ αποτελούν διαμέριση της μονάδας.

Πρόταση 5.4.17. *Έστω X ένας φυσιολογικός τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ με $A = f^{-1}\{0\}$ αν και μόνο αν το A είναι κλειστό G_δ*[1] *υποσύνολο του X.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ με $A = f^{-1}\{0\}$. Τότε το A είναι κλειστό, αφού η f είναι συνεχής. Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$\left\{ x \in X : \ f(x) < \frac{1}{n} \right\} = f^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n} \right) \right)$$

είναι ανοικτό και $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \ f(x) < \frac{1}{n}\}$. Επομένως το A είναι G_δ σύνολο.

($\Leftarrow$) Έστω ότι το A είναι κλειστό, G_δ υποσύνολο του X. Τότε $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, όπου τα U_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq \cdots$. Τότε τα σύνολα A και U_n^c είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους, άρα από το Λήμμα του Urysohn έχουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_n : X \to [0,1]$ με $f_n|_A = 0$ και $f_n|U_n^c = 1$. Θέτουμε

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}.$$

Η f είναι καλά ορισμένη στο X και συνεχής, από το κριτήριο του Weierstrass. Επιπλέον $f|_A = 0$ και αν $x \notin A$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin U_{n_0}$. Συνεπώς $f_{n_0}(x) = 1$ και έτσι $f(x) > 0$. Επομένως $A = f^{-1}(\{0\})$.

[1]Ένα υποσύνολο ένος τοπολογικού χώρου X καλείται G_δ σύνολο, αν είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών υποσυνόλων του X

5.5 Τελείως Κανονικοί Χώροι

Το Λήμμα του Urysohn υποδεικνύει μία (φαινομενικά για την περίπτωση των φυσιολογικών χώρων) ισχυρότερη έννοια διαχωρισμού αντικειμένων, δηλαδή μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης. Αποτελεί φυσιολογικό ερώτημα το αν είναι εφικτή η ίδια μέθοδος διαχωρισμού σε κανονικούς χώρους, δηλαδή αν ισχύει ένα αντίστοιχο «Λήμμα Urysohn», ή μία τέτοια απαίτηση θα δημιουργήσει ένα νέο διαχωριστικό αξίωμα.

Μία πρώτη προσέγγιση είναι να ανατρέξουμε στην απόδειξη του Λήμματος Urysohn και να προσπαθήσουμε να την τροποποιήσουμε για να εφαρμόζεται σε κανονικούς χώρους. Με μία πρόχειρη ματιά, όλα φαίνονται να λειτουργούν. Έστω ένας κανονικός τοπολογικός χώρος X, ένα $F \subseteq X$ κλειστό και $x \in B^c$. Ορίζουμε, όπως και στην απόδειξη του Λήμματος Urysohn, $U(1) = B^c$ και επιλέγουμε ένα $U(0)$ ανοικτό, ώστε $x \in U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1)$ (με χρήση της κανονικότητας του X). Όμως, στο αμέσως επόμενο βήμα, εμφανίζεται πρόβλημα. Θα θέλαμε να ορίσουμε ένα ανοικτό σύνολο $U(\frac{1}{2})$, τέτοιο ώστε

$$\overline{U(0)} \subseteq U(\tfrac{1}{2}) \subseteq \overline{U(\tfrac{1}{2})} \subseteq U(1).$$

Για το βήμα αυτό, η κανονικότητα του X δεν επαρκεί. Συνεπώς, ξεκινούμε να αντιμετωπίζουμε τη συνθήκη ως ένα διαφορετικό διαχωριστικό αξίωμα.

Ορισμός 5.5.1. *Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται τελείως κανονικός ή χώρος $T_{3\frac{1}{2}}$ αν για κάθε $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$, υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in F$.*

Παρατηρήσεις 5.5.2. *(α) Κάθε τελείως κανονικός χώρος είναι κανονικός, αφού για κάθε $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$, αν $f : X \to [0,1]$ είναι μία συνεχής συνάρτηση με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in F$, τότε $x \in f^{-1}((-\infty,1/2))$ και $F \subseteq f^{-1}((1/2,+\infty))$ και τα σύνολα $f^{-1}((-\infty,1/2)), f^{-1}((1/2,+\infty))$ είναι ανοικτά και ξένα.*

(β) Κάθε φυσιολογικός T_1 τοπολογικός χώρος X είναι τελείως κανονικός. Πράγματι, αν ένα $F \subseteq X$ είναι κλειστό και $x \in X \setminus F$, τότε το $\{x\}$ είναι κλειστό στο X (και προφανώς $\{x\} \cap F = \emptyset$). Άρα, από το Λήμμα του Urysohn, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$, με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in F$. Επομένως ο X είναι τελείως κανονικός.

(γ) Το διάστημα $[0,1]$ στον ορισμό δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαιτερότητα, αλλά μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[a,b]$. Πράγματι, αν $a,b \in \mathbb{R}$, αντικαθιστώντας την f με την $g = (b-a)f + a$, τότε λαμβάνουμε μία συνεχή συνάρτηση $g : X \to [a,b]$ με $g(x) = a$ και $g(y) = b$ για κάθε $y \in F$.

Πρόταση 5.5.3. *Αν X είναι ένας $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικός χώρος και Y είναι ένας τοπολογικός χώρος, ομοιομορφικός με τον X, τότε και Y είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ χώρος.*

Απόδειξη: Έστω $y \in Y$ και $F \subseteq Y$ κλειστό με $y \notin F$. Αν $\phi : X \to Y$ είναι ένας ομοιομορφισμός των X, Y και $f : X \to [0,1]$ η συνεχής συνάρτηση που διαχωρίζει τα $\phi^{-1}(y)$ και $\phi^{-1}(F)$, τότε η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1} : Y \to [0,1]$ έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες.

Πρόταση 5.5.4. *Αν X είναι ένας $T_{3\frac{1}{2}}$ χώρος και A ένας υπόχωρός του, τότε και ο A είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Απόδειξη: Έστω $x \in A$ και $F \subseteq A$ κλειστό στο A με $x \notin F$. Υπάρχει K, κλειστό υποσύνολο του X ώστε $F = K \cap A$. Αφού ο X είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in K$. Τότε ο περιορισμός $f|_A : A \to [0,1]$ έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες.

Πρόταση 5.5.5. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$. Τότε το x ανήκει στο ανοικτό F^c. Άρα υπάρχει βασικό ανοικτό σύνολο $\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(V_k)$, όπου $V_k \subseteq X_{i_k}$ ανοικτό για κάθε k, ώστε $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(V_k) \subseteq F^c$. Έχουμε $\pi_{i_k}(x) = x_{i_k} \in V_k$ άρα $x_{i_k} \notin V_k^c$, το οποίο είναι κλειστό στο X_{i_k} για κάθε k. Αφού οι χώροι X_{i_k} είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_k : X_{i_k} \to [0,1]$ ώστε $f_k(x_{i_k}) = 0$ και $f(V_k^c) \subseteq \{1\}$. Έτσι, οι συναρτήσεις $f_k \circ \pi_{i_k} : X \to [0,1]$, για $k = 1,\ldots,n$, είναι συνεχείς, άρα η $f : X \to [0,1]$ με $f(y) = \max_{k=1,\ldots,n} f_k \circ \pi_{i_k}(y)$ είναι συνεχής και ισχύουν τα εξής:

- $f(x) = \max_{k=1,\ldots,n} f_k \circ \pi_{i_k}(x) \max_{k=1,\ldots,n} f_k(x_{i_k}) = 0$, αφού $f_k(x_{i_k}) = 0$ για κάθε $k = 1,\ldots,n$.

- Αν $y \in F$, τότε $y \notin \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(V_k)$, άρα υπάρχει $k_0 \in \{1,\ldots,n\}$ τέτοιο ώστε $y_{i_{k_0}} = \pi_{i_{k_0}} \notin V_{k_0}$, δηλαδή $y_{i_{k_0}} \in V_{k_0}^c$, επομένως $f_{k_0}(y_{i_{k_0}}) = 1$. Άρα $f(y) = 1$.

Παραδείγματα 5.5.6. *(α) Ο χώρος $\mathbb{R}_S$ είναι T_4 και T_1, επομένως είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.*

(β) Κάθε μετρικός χώρος είναι T_4 και T_1, επομένως είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.

(γ) Ο χώρος του Sorgenfrey $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, ως γινόμενο $T_{3\frac{1}{2}}$ χώρων, αλλά δεν είναι T_4.

Ακόμη δεν έχει δοθεί κάποια ικανοποιητική απάντηση για το αν η κλάση των $T_{3\frac{1}{2}}$ είναι γνήσια μεγαλύτερη της κλάσης των T_3 χώρων. Αν εξετάσει κανείς τους T_3 χώρους που έχουμε ορίσει μέχρι τώρα δε θα καταφέρει να βρει κάποιο αντιπαράδειγμα. Η κατασκευή ενός κανονικού χώρου που δεν είναι $T_{3\frac{1}{2}}$, δεν είναι καθόλου απλή. Τέτοιοι χώροι όμως υπάρχουν κι έτσι συμπεραίνουμε ότι ένας κανονικός χώρος δεν είναι, εν γένει, τελείως κανονικός.