ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Ενότητα: Σύγκλιση και Συνέχεια

Γεώργιος Κουμουλλής

Τμήμα Μαθηματικών

΄Αδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

3 Σύγκλιση και Συνέχεια

3.1 Σύγκλιση Δικτύων

Για τη μελέτη των μετρικών χώρων και των τοπολογικών ιδιοτήτων τους, κεντρικής σημασίας μέσο αποτέλεσαν οι ακολουθίες. Η χρηστικότητά τους εντοπίστηκε σε κομβικά σημεία, όπως στο χαρακτηρισμό της κλειστότητας ενός συνόλου ή της συνέχειας μίας συνάρτησης (αρχή της μεταφοράς). Ο ορισμός της σύγκλισης ακολουθιών γενικεύεται φυσιολογικά για ακολουθίες σε τοπολογικούς χώρους. Για το λόγο αυτό, φαίνεται δόκιμο το να εξετάσουμε κατά πόσο η έννοια της ακολουθίας είναι ικανή να διατηρήσει τον κεντρικό αυτό ρόλο στην ευρύτερη κλάση των τοπολογικών χώρων.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο X και $x \in X$. Λέμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x (θα γράφουμε $x_n \to x$) αν για κάθε περιοχή $U \in \mathfrak{N}_x$ υπάρχει $n_0 = n_0(U) \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in U$ για κάθε $n \geq n_0$.*

Παρατήρηση 3.1.2. *Είναι εμφανές ότι αν η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x, τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) συγκλίνει στο x.*

Παραδείγματα 3.1.3. *(α) Στον τοπολογικό χώρο $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, όπου $\mathcal{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία, η ακολουθία (x_n) με $x_n = n \; \forall n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε κάθε $x \in \mathbb{N}$. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{N}$ και $U \in \mathfrak{N}_x$. Τότε $x \in U^\circ \in \mathcal{T}$, άρα $X \setminus U^\circ$ πεπερασμένο και προφανώς $X \setminus U$ πεπερασμένο. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \notin X \setminus U$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή $x_n \in U$. Επομένως $x_n \to x$.*

(β) Στον τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, όπου X υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{T}$ η συναριθμήσιμη τοπολογία, παρατηρούμε τα εξής:

- *Αν (x_n) ακολουθία στο X και $x \in X$ ώστε $x_n \to x$, τότε η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ίση με x (δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n = x$ για $n \geq n_0$). Έστω, προς άτοπο, ότι η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή και ίση με x. Τότε το $\{n \in \mathbb{N} : \; x_n \neq x\}$ είναι άπειρο σύνολο. Άρα υπάρχει (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) με $x_{k_n} \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $U = X \setminus \{x_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε $x \in U$ και $\in \mathcal{T}$, άρα $U \in \mathfrak{N}_x$. Ακόμη $x_{k_n} \notin U$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $x_{k_n} \nrightarrow x$, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το ότι $x_n \to x$.*

- *$X' = X$. Πράγματι, έστω $x \in X$. Τότε για κάθε U ανοικτό με $x \in U$ έχουμε $U \cap X \setminus \{x\} = U \setminus \{x\} \neq \emptyset$, αφού το U είναι υπεραριθμήσιμο (γιατί;). Επομένως $x \in X'$*

Έτσι, για κάθε $x \in X$ έχουμε $x \in \overline{X \setminus \{x\}}$, αλλά δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $X \setminus \{x\}$, ώστε $x_n \to x$.

Τα παραπάνω παραδείγματα κάνουν φανερή, όχι μόνο τη στέρηση των συνήθων «καλών» ιδιοτήτων των ακολουθιών, όπως η μοναδικότητα του ορίου (Παράδειγμα 3.1.3(α)), αλλά και την ανικάνοτητα τους να περιγράψουν πλήρως έννοιες, όπως αυτή της κλειστότητας (Παράδειγμα 3.1.3(β)). Έτσι, η έννοια της ακολουθίας φαίνεται να είναι μάλλον ανεπαρκής για τους σκοπούς μας. Αυτή η παθογένεια εντοπίζεται, κατά κύριο λόγο, στο ότι όλες οι βάσεις περιοχών ενός σημείου σε έναν τοπολογικό χώρο ενδέχεται να είναι (πληθαριθμικά) πολύ μεγαλύτερες από το σύνολο των φυσικών αριθμών. Επομένως, αν επιθυμούμε να γενικεύσουμε την έννοια της ακολουθίας έτσι ώστε το νέο αντικείμενο να είναι ικανό να περιγράψει έναν τοπολογικό χώρο, όπως ακριβώς και οι ακολουθίες στην περίπτωση των μετρικών χώρων, θα πρέπει να επιτρέψουμε στο αντικείμενο αυτό να ορίζεται σε αυθαίρετα «μεγάλα» σύνολα (τα οποία θα εφοδιάζονται με την ελάχιστη ικανή έννοια διάταξης).

Ορισμός 3.1.4. *Έστω $(\Lambda, \leq)$ ένα προδιατεταγμένο σύνολο (δηλαδή $a \leq a$ για κάθε $a \in \Lambda$ και αν $a, b, c \in \Lambda$ με $a \leq b$ και $b \leq c$, τότε $a \leq c$). Το $(\Lambda, \leq)$ λέγεται κατευθυνόμενο σύνολο, αν για κάθε $a, b \in \Lambda$ υπάρχει $c \in \Lambda$ ώστε $a \leq c$ και $b \leq c$. Η δυϊκή σχέση $\geq$, της $\leq$ ορίζεται ως εξής: $a \geq b \iff b \leq a$. Λέμε τότε ότι ο a προηγείται του b.*

Παραδείγματα 3.1.5. *(α) Κάθε ολικά διατεταγμένο σύνολο είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Ειδικά τα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ είναι κατευθυνόμενα με τη συνήθη διάταξη.*

(β) Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ κάθε συνόλου X είναι κατευθυνόμενο σύνολο με τις:

$$A \leq_1 B \iff A \subseteq B \quad \text{και} \quad A \leq_2 B \iff A \supseteq B.$$

(γ) Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Το $\mathfrak{N}_x$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο με την

$$(*) \qquad U \leq V \iff U \supseteq V$$

Πράγματι, το $(\mathfrak{N}_x, \leq)$ είναι προφανώς προδιατεταγμένο. Έστω τώρα $U_1, U_2 \in \mathfrak{N}_x$. Τότε για το $U = U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{N}_x$ έχουμε ότι $U_1 \leq U$ και $U_2 \leq U$.
Γενικότερα, αν $\mathfrak{B}_x$ είναι βάση περιοχών του x, τότε το $\mathfrak{B}_x$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο με την $(*)$.

Ορισμοί 3.1.6. *(α) Έστω X σύνολο. Ένα δίκτυο στο X είναι μία συνάρτηση $p : \Lambda \to X$, όπου $(\Lambda, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο μη κενό σύνολο. Θέτουμε $p_\lambda \equiv p(\lambda)$ και συμβολίζουμε το δίκτυο p με $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ή με (p_λ).*

(β) Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ένα δίκτυο στο X και $x \in X$. Λέμε ότι το δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνει στο x, αν για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$ υπάρχει $\lambda_0 = \lambda_0(U) \in \Lambda$ ώστε $p_\lambda \in U$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. Γράφουμε τότε $p_\lambda \to x$ ή $\lim_\lambda p_\lambda = x$.

Παρατήρηση 3.1.7. *Προφανώς κάθε ακολουθία στο X είναι δίκτυο με κατευθυνόμενο σύνολο το $(\mathbb{N}, \leq)$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ορισμός της σύγκλισης δικτύου συμπίπτει με το γνωστό ορισμό της σύγκλισης μίας ακολουθίας.*

Παραδείγματα 3.1.8. *(α) Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι ο διακριτός τοπολογικός χώρος, ένα δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ συγκλίνει σε ένα $x \in X$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $p_\lambda = x$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ (αφού $\{x\} \in \mathfrak{N}_x$).*

(β) Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι ο τετριμμένος τοπολογικός χώρος, κάθε δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ στο X συγκλίνει σε κάθε $x \in X$, αφού $\mathfrak{N}_x = \{X\}$.

Παρατήρηση 3.1.9. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $x \in X$ και το κατευθυνόμενο σύνολο $(\mathfrak{B}_x, \leq)$. Για κάθε $U \in \mathfrak{B}_x$ επιλέγουμε $p_U \in U$. Έτσι ορίζεται ένα δίκτυο $(p_U)_{U \in \mathfrak{B}_x}$. Ισχύει ότι $p_U \to x$.*
Πράγματι, έστω $V \in \mathfrak{N}_x$. Τότε υπάρχει $U_0 \in \mathfrak{B}_x$ με $U_0 \subseteq V$, αφού $\mathfrak{B}_x$ βάση περιοχών του x. Για κάθε $U \in \mathfrak{B}_x$ με $U \geq U_0$ έχουμε $p_U \in U \subseteq U_0 \subseteq V$. Άρα $p_U \to x$.

Πρόταση 3.1.10. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$. Τότε $x \in \overline{A} \iff$ υπάρχει δίκτυο (p_λ) στο X ώστε $p_\lambda \in A \ \forall \lambda \in \Lambda$ και $p_\lambda \to x$.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Υποθέτουμε ότι $x \in \overline{A}$. Τότε $A \cap U \neq \emptyset$ για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$. Επιλέγουμε $p_U \in U$ για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$. Τότε το $(p_U)_{U \in \mathfrak{N}_x}$ είναι ένα δίκτυο στο X. Προφανώς $p_U \in A \ \forall U \in \mathfrak{N}_x$ και αφού $p_U \in U \ \forall U \in \mathfrak{N}_x$, από την Παρατήρηση 3.1.9, έχουμε ότι $p_U \to x$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $U \in \mathfrak{N}_x$. Αφού $p_\lambda \to x$, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $p_\lambda \in U$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. Ειδικά, $p_{\lambda_0} \in U \cap A$ (αφού $p_\lambda \in A \ \forall \lambda \in \Lambda$) κι έτσι $U \cap A \neq \emptyset$. Άρα $U \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$ και συνεπώς $x \in \overline{A}$.

Πόρισμα 3.1.11. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε*

(i) *A κλειστό $\iff$ για κάθε δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ στο X και για κάθε $x \in X$ με $p_\lambda \in A\ \forall \lambda \in \Lambda$ και $p_\lambda \to x$, ισχύει $x \in A$.*

(ii) *Ένα σημείο $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του A $\iff$ υπάρχει δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ στο X, ώστε $p_\lambda \in A \setminus \{x\}\ \forall \lambda \in \Lambda$ και $p_\lambda \to x$.*

Απόδειξη: (i) A κλειστό $\iff$ $A = \overline{A}$ $\iff$ $\overline{A} \subseteq A$. Το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 3.1.10.

(ii) Έπεται από την Πρόταση 3.1.10, αφού $x \in A'$ $\iff$ $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Ορισμοί 3.1.12. *(α) Έστω $(\Lambda, \leq)$ κατευθυνόμενο σύνολο και $\mathrm{N} \subseteq \Lambda$. Το N καλείται ομοτελικό (στο Λ), αν για κάθε $\lambda \in \Lambda$ υπάρχει $\nu \in \mathrm{N}$ με $\nu \geq \lambda$.*

(β) Έστω $(\Lambda, \leq)$, $(\mathrm{M}, \prec)$ κατευθυνόμενα σύνολα. Μία συνάρτηση $\phi : \mathrm{M} \to \Lambda$ καλείται αύξουσα αν για κάθε $\mu_1, \mu_2 \in \mathrm{M}$ με $\mu_1 \prec \mu_2$ ισχύει $\phi(\mu_1) \leq \phi(\mu_2)$.

(γ) Έστω $p : (\Lambda, \leq) \to X$ ένα δίκτυο στο X. Μία συνάρτηση $q : (\mathrm{M}, \prec) \to X$, όπου $(\mathrm{M}, \prec)$ κατευθυνόμενο σύνολο, καλείται υποδίκτυο του p αν υπάρχει αύξουσα συνάρτηση $\phi : (\mathrm{M}, \prec) \to (\Lambda, \leq)$ ώστε το $\phi(\mathrm{M})$ να είναι ομοτελικό στο Λ και $q = p \circ \phi$. Λέμε τότε ότι το υποδίκτυο q καθορίζεται από το ζεύγος (M, ϕ). Το υποδίκτυο q συμβολίζεται με $(p_{\phi(\mu)})_{\mu \in \mathrm{M}}$ ή με $(p_{\phi(\mu)})$ και προφανώς είναι δίκτυο.

Παρατηρήσεις 3.1.13. *(α) Ένα $\mathrm{M} \subseteq \mathbb{N}$ είναι ομοτελικό $\iff$ το M είναι άπειρο.*

(β) Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός χώρος και $x \in X$, το $\mathcal{B} \subseteq (\mathfrak{N}_x, \supseteq)$ είναι ομοτελικό αν και μόνο αν είναι βάση περιοχών του x.

(γ) Αν $(\Lambda, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο και $\lambda_0 \in \Lambda$, τότε το $\mathrm{M} = \{\lambda \in \Lambda :\ \lambda \geq \lambda_0\}$ είναι ομοτελικό καθώς και κάθε $\mathrm{N} \subseteq \Lambda$ με $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$ είναι ομοτελικό.

(δ) Κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) μίας ακολουθίας (x_n) είναι υποδίκτυο της ακολουθίας (αφού $k(\mathbb{N})$ είναι άπειρο). Προφανώς υπάρχουν υποδίκτυα της (x_n) που δεν είναι υπακολουθίες.

(ε) Κάθε ομοτελικό υποσύνολο M ενός κατευθυνόμενου συνόλου Λ είναι κατευθυνόμενο (με τον περιορισμό της προδιάταξης του Λ). Πράγματι, έστω $\mu_1, \mu_2 \in \mathrm{M}$. Αφού Λ κατευθυνόμενο, υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ ώστε $\lambda \geq \mu_1$ και $\lambda \geq \mu_2$. Αφού M ομοτελικό, υπάρχει $\mu \in \mathrm{M}$ ώστε $\mu \geq \lambda$. Τότε $\mu \geq \mu_1$ και $\mu \geq \mu_2$. Έπεται ότι:

Αν $p : (\Lambda, \leq) \to X$ είναι δίκτυο και $\mathrm{M} \subseteq \Lambda$ ομοτελικό, τότε το $q = p|_{\mathrm{M}}$ είναι υποδίκτυο του p.

Πράγματι, η συνάρτηση $\phi : \mathrm{M} \to \Lambda$ με $\phi(\mu) = \mu$ (M κατευθυνόμενο) είναι αύξουσα και $\phi(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$, ομοτελικό στο Λ και ισχύει $q = p \circ \phi$.

(στ) Αν (p_λ) είναι δίκτυο στον τοπολογικό χώρο X και $x \in X$, τότε ισχύει

$$\begin{aligned} p_\lambda \nrightarrow x \quad &\iff \quad \text{υπάρχει } U \in \mathfrak{N}_x \text{ ώστε } \forall \lambda_0 \in \Lambda\ \exists\ \lambda \geq \lambda_0 \text{ με } p_\lambda \notin U \\ &\iff \quad \text{υπάρχει } U \in \mathfrak{N}_x \text{ ώστε } p_\lambda \notin U\ \forall \lambda \in \mathrm{M}, \text{ όπου } \mathrm{M} \subseteq \Lambda \text{ ομοτελικό} \end{aligned}$$

Από το (ε), έπεται ότι το $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{M}}$ είναι υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ με $p_\lambda \notin U\ \forall \lambda \in \mathrm{M}$.

Πρόταση 3.1.14. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, (p_λ) δίκτυο στο X και $x \in X$. Τότε:*

$$p_\lambda \to x \iff \textit{κάθε υποδίκτυο του } (p_\lambda) \textit{ συγκλίνει στο } x$$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω $q = p \circ \phi : \mathrm{M} \to X$ υποδίκτυο του (p_λ) και $U \in \mathfrak{N}_x$. Αφού $p_\lambda \to x$, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $p_\lambda \in U \ \forall \lambda \geq \lambda_0$. Αφού $\phi(\mathrm{M})$ είναι ομοτελικό στο Λ, υπάρχει $\mu_0 \in \mathrm{M}$ ώστε $\phi(\mu_0) \geq \lambda_0$. Τότε για κάθε $\mu \in \mathrm{M}$ με $\mu \geq \mu_0$ έχουμε $\phi(\mu) \geq \phi(\mu_0) \geq \lambda_0$ κι έτσι $p_{\phi(\mu)} \in U$. Επομένως $p_{\phi(\mu)} \to x$.

$(\Leftarrow)$ Είναι προφανές, αφού το (p_λ) είναι υποδίκτυο του (p_λ).

Ορισμός 3.1.15. *Έστω (p_λ) ένα δίκτυο σε ένα τοπολογικό χώρο X και $x \in X$. Το x καλείται οριακό σημείο του (p_λ) αν για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$ και για κάθε $\lambda \in \Lambda$ υπάρχει $\mu \in \Lambda$ με $\mu \geq \lambda$ και $p_\mu \in U$. Δηλαδή το x είναι οριακό σημείο του (p_λ) αν για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$ το $\{\lambda \in \Lambda : \ p_\lambda \in U\}$ είναι ομοτελικό στο Λ.*

Παρατήρηση 3.1.16. *Αν $p_\lambda \to x$, τότε το x είναι οριακό σημείο του (p_λ). Πράγματι, έστω $U \in \mathfrak{N}_x$. Τότε υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $p_\lambda \in U$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$, δηλαδή $\{\lambda \in \Lambda : \ p_\lambda \in U\} \supseteq \{\lambda \in \Lambda : \ \lambda \geq \lambda_0\}$ κι έτσι, από Παρατήρηση 3.1.13(γ), το $\{\lambda \in \Lambda : \ p_\lambda \in U\}$ είναι ομοτελικό, δηλαδή το x είναι οριακό σημείο.*

Θεώρημα 3.1.17. *Έστω X τοπολογικός χώρος, (p_λ) δίκτυο στο X και $x \in X$. Το x είναι οριακό σημείο του (p_λ) αν και μόνο αν υπάρχει υποδίκτυο του (p_λ) που συγκλίνει στο x.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω x οριακό σημείο. Θέτουμε:

$$\mathrm{M} = \{(U,\lambda) : \ U \in \mathfrak{N}_x, \lambda \in \Lambda \text{ και } p_\lambda \in U\}$$

Ορίζουμε τη σχέση $\prec$ στο M ως εξής:

$$(U_1,\lambda_1) \prec (U_2,\lambda_2) \iff U_1 \supseteq U_2 \text{ και } \lambda_1 \leq \lambda_2$$

- Η $\prec$ είναι μία προδιάταξη στο M (γιατί;).
- Το $(\mathrm{M},\prec)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Πράγματι, αν $(U_1,\lambda_1),(U_2,\lambda_2) \in \mathrm{M}$, θέτουμε $U_3 = U_1 \cap U_2$ και επιλέγουμε $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $\lambda_0 \geq \lambda_1$ και $\lambda_0 \geq \lambda_2$. Αφού το x είναι οριακό σημείο του (p_λ), υπάρχει $\lambda_3 \in \Lambda$ με $\lambda_3 \geq \lambda_0$ και $p_{\lambda_3} \in U$. Τότε $(U_3,\lambda_3) \in \mathrm{M}$ και $(U_3,\lambda_3) \succ (U_1,\lambda_1),(U_2,\lambda_2)$.
- Ορίζουμε $\phi : \mathrm{M} \to \Lambda$ με $\phi(U,\lambda) = \lambda$. Τότε η ϕ είναι αύξουσα (από τον ορισμό της $\prec$) και $\phi(\mathrm{M})$ ομοτελικό στο Λ (αφού $\phi(\mathrm{M}) = \Lambda$).

Έτσι, το $p \circ \phi$ είναι υποδίκτυο του (p_λ). Θα δείξουμε ότι το $p \circ \phi$ συγκλίνει στο x. Έστω $U_0 \in \mathfrak{N}_x$. Αφού το x είναι οριακό σημείο του p_λ, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $p_{\lambda_0} \in U_0$. Τότε $(U_0,\lambda_0) \in \mathrm{M}$ και για κάθε $(U,\lambda) \in \mathrm{M}$ με $(U,\lambda) \succ (U_0,\lambda_0)$ έχουμε

$$(p \circ \phi)(U,\lambda) = p(\phi(U,\lambda)) = p(\lambda) = p_\lambda \in U \subseteq U_0.$$

Επομένως, το $p \circ \phi$ συγκλίνει στο x.

$(\Leftarrow)$ Έστω $q = (p_{\phi(\mu)})_{\mu \in \mathrm{M}}$ υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ με $p_{\phi(\mu)} \to x$. Έστω $U \in \mathfrak{N}_x$. Τότε υπάρχει $\mu_0 \in \mathrm{M}$ ώστε $p_{\phi(\mu)} \in U$ για κάθε $\mu \succ \mu_0$, δηλαδή:

$$\{\lambda \in \Lambda : \ p_\lambda \in U\} \supseteq \{\phi(\mu) : \ \mu \succ \mu_0\}.$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι το $\{\phi(\mu) : \ \mu \succ \mu_0\}$ είναι ομοτελικό στο Λ.

Έστω $\lambda_0 \in \Lambda$. Αφού $\phi(\mathrm{M})$ είναι ομοτελικό στο Λ, υπάρχει $\mu_1 \in \mathrm{M}$ με $\phi(\mu_1) \geq \lambda_0$. Ακόμη, αφού το M είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει $\mu \in \mathrm{M}$ ώστε $\mu \succ \mu_0$ και $\mu \succ \mu_1$. Τότε $\phi(\mu) \geq \phi(\mu_1) \geq \lambda_0$, άρα $\phi(\mu) \geq \lambda_0$ όπου $\mu \succ \mu_0$. Άρα το $\{\phi(\mu) : \ \mu \succ \mu_0\}$ είναι ομοτελικό στο Λ.

3.2 Συνέχεια

Προχωρούμε στη μελέτη συνεχών συναρτήσεων μεταξύ τοπολογικών χώρων. Θα δούμε ότι οι χαρακτηρισμοί της συνέχειας είναι ανάλογοι με αυτούς που είδαμε κατά τη μελέτη των μετρικών χώρων.

Ορισμός 3.2.1. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $x_0 \in X$. Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ θα λέμε ότι είναι συνεχής στο x_0, αν για κάθε $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$ υπάρχει $U \in \mathfrak{N}_{x_0}$ ώστε $f(U) \subseteq V$. Η f καλείται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X.*

Παρατηρήσεις 3.2.2. *(α) Η f είναι συνεχής στο $x_0 \iff$ για κάθε $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$ ισχύει $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_{x_0}$. Πράγματι,*

($\Rightarrow$) *Έστω $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$. Τότε υπάρχει $U \in \mathfrak{N}_{x_0}$ ώστε $f(U) \subseteq V$. Άρα $U \subseteq f^{-1}(V)$ κι επομένως $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_{x_0}$.*

($\Leftarrow$) *Έστω $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$. Τότε το $U = f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_{x_0}$ και προφανώς $f(U) \subseteq V$.*

(β) Στον Ορισμό 3.2.1 μπορούμε να θεωρήσουμε βάσεις περιοχών των $f(x_0)$ και x_0, αντί για τα $\mathfrak{N}_{f(x_0)}$ και $\mathfrak{N}_{x_0}$ αντίστοιχα. Άρα στην περίπτωση των μετρικών χώρων, ο ορισμός αυτός συμπίπτει με το γνωστό.

(γ) Αν η f είναι σταθερή, τότε είναι συνεχής (παίρνουμε $U = X$).

(δ) Αν ο X έχει τη διακριτή τοπολογία, τότε η f είναι αυτόματα συνεχής (παίρνουμε $U = \{x_0\}$)

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και μία συνάρτηση $f : X \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η f είναι συνεχής.

(ii) Για κάθε $G \subseteq Y$ ανοικτό, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό στο X.

(iii) Για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X.

(iv) Για κάθε $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(v) Για κάθε $B \subseteq Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(vi) Για κάθε $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.

Απόδειξη: (i)$\Rightarrow$(ii) Έστω $G \subseteq Y$ ανοικτό και $x \in f^{-1}(G)$. Τότε $f(x) \in G$ και $G \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$. Αφού f συνεχής, έπεται ότι $f^{-1}(G) \in \mathfrak{N}_x$ (Παρατήρηση 3.2.2(α)). Συνεπώς το $f^{-1}(G)$ είναι περιοχή κάθε σημείου του, άρα $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό. Τότε το $Y \setminus F$ είναι ανοικτό και, από το (ii), έπεται ότι το $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό. Δηλαδή το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Έστω $A \subseteq X$. Από το (iii) για το κλειστό $F = \overline{f(A)}$ έχουμε ότι το $f^{-1}(\overline{f(A)})$ είναι κλειστό στο X. Επιπλέον, $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Άρα, από τον ορισμό της κλειστότητας, $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(iv)⇒(v) Έστω $B \subseteq Y$. Από το (iv) για το $A = f^{-1}(B)$ έχουμε

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))}.$$

Ακόμη, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \Rightarrow \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$. Επομένως:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(\overline{f^{-1}(B)}) & \subseteq & \overline{f(f^{-1}(B))} \\ \overline{f(f^{-1}(B))} & \subseteq & \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{B} \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$$

(v)⇒(vi) Έστω $B \subseteq Y$. Τότε:

$$\begin{aligned} X \setminus (f^{-1}(B))^\circ &= \overline{X \setminus f^{-1}(B)} \\ &= \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \\ &\subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \quad \text{(από το (v))} \\ &= f^{-1}(Y \setminus B^\circ) \\ &= X \setminus f^{-1}(B^\circ) \end{aligned}$$

Άρα $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.

(vi)⇒(i) Έστω $x \in X$ και $V \in \mathfrak{N}_{f(x)}$. Τότε $f(x) \in V^\circ$, δηλαδή:

$$x \in f^{-1}(V^\circ) \subseteq (f^{-1}(V))^\circ \quad \text{(από το (vi))}.$$

Άρα $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_x$. Επομένως η f είναι συνεχής στο x. Αφού το $x \in X$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής.

Παρατηρήσεις 3.2.4. *(α) Έστω $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ τοπολογικοί χώροι, $\mathcal{B}$ μία βάση για την $\mathcal{S}$ και συνάρτηση $f : X \to Y$. Τότε η f είναι συνεχής αν και μόνο αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$. Πράγματι:*

($\Rightarrow$) *Είναι προφανές, αφού $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$.*

($\Leftarrow$) *Έστω $G \in \mathcal{S}$.Τότε $G = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ για κάποια υποοικογένεια $(B_i)_{i \in I}$ της $\mathcal{B}$. Άρα $f^{-1}(G) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}$, ως ένωση ανοικτών. Άρα η f είναι συνεχής.*

(β) Η προηγούμενη παρατήρηση ισχύει αν η $\mathcal{B}$ είναι υποβάση για την $\mathcal{S}$, κι όχι κατ' ανάγκη βάση (γιατί;).

Παράδειγμα 3.2.5. *Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}_S \to \mathbb{R}_S$ με $f(x) = -x$ δεν είναι συνεχής. Πράγματι, ενώ το σύνολο $(0, 1]$ είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}_S$, το $f^{-1}((0, 1]) = [-1, 0)$ δεν είναι ανοικτό.*

Πρόταση 3.2.6. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $x_0 \in X$ και συνάρτηση $f : X \to Y$. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν, για κάθε (p_λ) δίκτυο στο X με $p_\lambda \to x_0$, ισχύει $f(p_\lambda) \to f(x_0)$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω (p_λ) δίκτυο στο X με $p_\lambda \to x_0$. Έστω $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$. Από τη συνέχεια της f στο x_0, έπεται ότι $f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}_{x_0}$. Αφού $p_\lambda \to x_0$, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε $p_\lambda \in f^{-1}(V)$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. Τότε $f(p_\lambda) \in V$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. Επομένως $f(p_\lambda) \to f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι για κάθε (p_λ) με $p_\lambda \to x_0$, ισχύει $f(p_\lambda) \to f(x_0)$ κι έστω, προς άτοπο, ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε υπάρχει $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$ ώστε για κάθε $U \in \mathfrak{N}_{x_0}$ να ισχύει $f(U) \nsubseteq V$. Για κάθε $U \in \mathfrak{N}_{x_0}$ επιλέγουμε $p_U \in U$, ώστε $f(p_U) \notin V$. Έτσι, το $(p_U)_{U \in \mathfrak{N}_{x_0}}$ είναι δίκτυο με $p_U \to x_0$. Αφού όμως, $f(p_U) \notin V$ και $V \in \mathfrak{N}_{f(x_0)}$, έπεται ότι $f(p_U) \nrightarrow f(x_0)$, πράγμα άτοπο.

Πόρισμα 3.2.7. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και συνάρτηση $f : X \to Y$. Τότε η f είναι συνεχής αν και μόνο αν, για κάθε $x \in X$ και για κάθε (p_λ) δίκτυο στο X με $p_\lambda \to x$, ισχύει $f(p_\lambda) \to f(x)$.*

Παρατήρηση 3.2.8. *Η Πρόταση 3.2.6 και το Πόρισμα 3.2.7 δεν ισχύουν αν τα δίκτυα αντικατασταθούν με ακολουθίες. Για παράδειγμα, έστω* $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ *με* $\mathrm{id}(x) = x$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, *όπου* $\mathcal{T}$ *η συναριθμήσιμη τοπολογία. Αν* (x_n) *είναι ακολουθία στο* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *και* $x \in \mathbb{R}$, *ώστε* $x_n \to x$, *τότε η* (x_n) *είναι τελικά σταθερή και ίση με* x *κι επομένως* $\mathrm{id}(x_n) \to x = \mathrm{id}(x)$ *ως προς τη συνήθη τοπολογία. Όμως, αν* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *τότε το* (a,b) *είναι ανοικτό στο* $\mathbb{R}$, *ενώ* $\mathrm{id}^{-1}((a,b)) = (a,b) \notin \mathcal{T}$. *Άρα η* id *δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο.*

Είδαμε ότι οι ακολουθίες είναι ανεπαρκείς να χαρακτηρίσουν τη συνέχεια συναρτήσεων. Συμπεραίνουμε, λοιπόν ότι η ανάγκη γενίκευσης από τις ακολουθίες στα δίκτυα περιγράφει με ακρίβεια το μέτρο γενίκευσης από τους μετρικούς χώρους στους τοπολογικούς χώρους.

Πρόταση 3.2.9. *Έστω* X, Y, Z *τοπολογικοί χώροι,* $x_0 \in X$ *και συναρτήσεις* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. *Αν η* f *είναι συνεχής στο* x_0 *και η* g *είναι συνεχής στο* $f(x_0)$, *τότε η* $g \circ f : X \to Z$ *είναι συνεχής στο* x_0. *Άρα αν οι* f, g *είναι συνεχείς, τότε και η* $g \circ f$ *είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω (p_λ) δίκτυο στο X με $p_\lambda \to x_0$.

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 $\Longrightarrow$ $f(p_\lambda) \to f(x_0)$ (Πρόταση 3.2.6)
Αφού η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ $\Longrightarrow$ $g(f(p_\lambda)) \to g(f(x_0))$ (Πρόταση 3.2.6)

Δηλαδή, $(g \circ f)(p_\lambda) \to (g \circ f)(x_0)$. Άρα, από Πρόταση 3.2.6, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

3.2.1 Ανοικτές και κλειστές συναρτήσεις, Ομοιομορφισμοί

Ορισμός 3.2.10. *Έστω* X, Y *τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση* $f : X \to Y$ *καλείται ανοικτή (αντίστοιχα κλειστή), αν για κάθε* $A \subseteq X$ *ανοικτό (αντίστοιχα κλειστό) το* $f(A)$ *είναι ανοικτό (αντίστοιχα κλειστό) στο* Y.

Παρατηρήσεις 3.2.11. *(α) Αν* $\mathcal{B}$ *είναι βάση του τοπολογικού χώρου* X, *τότε η* f *είναι ανοικτή αν και μόνο αν για κάθε* $B \in \mathcal{B}$ *το* $f(B)$ *είναι ανοικτό στο* Y. *Πράγματι,*

($\Rightarrow$) *Είναι προφανές, αφού κάθε* $B \in \mathcal{B}$ *είναι ανοικτό.*

($\Leftarrow$) *Αν* $A \subseteq X$ *ανοικτό, τότε* $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ *όπου* $(B_i)_{i \in I}$ *υποοικογένεια της* $\mathcal{B}$. *Άρα το* $f(A) = \bigcup_{i \in I} f(B_i)$ *είναι ανοικτό, ως ένωση ανοικτών. Επομένως η* f *είναι ανοικτή.*

(β) Αν η $f : X \to Y$ *είναι* $1-1$ *και επί, τότε, αφού* $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ *για κάθε* $A \subseteq X$, *έχουμε* f *ανοικτή* $\Longleftrightarrow$ $f^{-1} : Y \to X$ *συνεχής* $\Longleftrightarrow$ f *κλειστή.*

(γ) Έστω $\mathcal{T}_1$ *και* $\mathcal{T}_2$ *δύο τοπολογίες στο* X *και* $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ *με* $\mathrm{id}(x) = x$ *για κάθε* $x \in X$. *Τότε:*

$$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \iff \mathrm{id} \text{ ανοικτή} \iff \mathrm{id}^{-1} \text{ συνεχής} \iff \mathrm{id} \text{ κλειστή.}$$

Παράδειγμα 3.2.12. *Η προβολή* $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *με* $\pi_1(x,y) = x$ *είναι ανοικτή, αλλά όχι κλειστή. Πράγματι,*

- *Για κάθε* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *και* $\varepsilon > 0$, $\pi_1(B((x,y),\varepsilon)) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ *ανοικτό, άρα από Παρατήρηση 3.2.11(α), η* π_1 *είναι ανοικτή.*
- *Αν* $F = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) : x > 0 \right\}$, *τότε το* F *είναι κλειστό στο* $\mathbb{R}^2$, *ενώ η εικόνα* $\pi_1(F) = (0, +\infty)$ *δεν είναι κλειστό στο* $\mathbb{R}$.

Πρόταση 3.2.13. *Έστω X,Y τοπολογικοί χώροι και μία συνάρτηση $f : X \to Y$. Η f είναι ανοικτή αν και μόνο αν $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$, για κάθε $A \subseteq X$.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω $A \subseteq X$. Τότε το A° είναι ανοικτό στο X, άρα και το $f(A^\circ)$ είναι ανοικτό στο Y. Αφού $f(A^\circ) \subseteq f(A)$, από τον ορισμό του εσωτερικού, έπεται ότι $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $A \subseteq X$ ανοικτό (άρα $A^\circ = A$). Τότε, από την υπόθεση, έπεται ότι $f(A) = f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$. Δηλαδή $f(A) \subseteq (f(A))^\circ$ κι έτσι, $f(A) = (f(A))^\circ$. Επομένως το $f(A)$ είναι ανοικτό. Συνεπώς η f είναι ανοικτή.

Πρόταση 3.2.14. *Έστω X,Y τοπολογικοί χώροι και μία συνάρτηση $f : X \to Y$. Η f είναι κλειστή αν και μόνο αν $f(\overline{A}) \supseteq \overline{f(A)}$, για κάθε $A \subseteq X$.*

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση (εργαστείτε ανάλογα με την Απόδειξη της Πρότασης 3.2.13).

Ορισμός 3.2.15. *Έστω X,Y τοπολογικοί χώροι. Μία $1-1$ και επί συνάρτηση $f : X \to Y$, ώστε η ίδια η f αλλά και η f^{-1} να είναι συνεχείς, καλείται ομοιομορφισμός των τοπολογικών χώρων X και Y. Όταν υπάρχει $f : X \to Y$ ομοιομορφισμός, λέμε ότι οι X και Y είναι ομοιομορφικοί και το συμβολίζουμε αυτό με $X \sim Y$.*

Παρατήρηση 3.2.16. *Η σχέση ``$\sim$" είναι σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των τοπολογικών χώρων. Κατά συνέπεια η κλάση των τοπολογικών χώρων διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας. Δύο τοπολογικοί χώροι που ανήκουν στην ίδια κλάση, από τοπολογικής άποψης, ταυτίζονται.*

Πρόταση 3.2.17. *Έστω X,Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία $1-1$ και επί συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

- *(i) Η f είναι ομοιομορφισμός.*
- *(ii) Η f είναι συνεχής και ανοικτή.*
- *(iii) Η f είναι συνεχής και κλειστή.*
- *(iv) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.*

Απόδειξη: Η ισοδυναμία των (i), (ii) και (iii) έπεται από την Παρατήρηση 3.2.11(β). Η ισοδυναμία των (iii) και (iv) έπεται από την Πρόταση 3.2.14 και το Θεώρημα 3.2.3.

Παραδείγματα 3.2.18. *(α) $\mathbb{R} \sim (-1,1)$. Πράγματι, η $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ είναι συνεχής, $1-1$, επί και η $f^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ με $f(y) = \frac{y}{1-|y|}$ είναι συνεχής.*

(β) Η ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id} : \mathbb{R}_S \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{id}(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_S$ είναι συνεχής (αφού για κάθε $a,b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, $\mathrm{id}^{-1}((a,b)) = (a,b) \in \mathcal{T}_S$), $1-1$ και επί. Όμως η $\mathrm{id}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_S$ δεν είναι συνεχής, αφού για το $(a,b] \in \mathcal{T}_S$, $(\mathrm{id}^{-1})^{-1}((a,b]) = (a,b]$ που δεν είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$.

(γ) Έστω X σύνολο, $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ και $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ οι τοπολογίες των ιδιαίτερων σημείων x_1, x_2 αντίστοιχα. Τότε η $f : (X,\mathcal{T}_1) \to (X,\mathcal{T}_2)$ με

$$f(x) = \begin{cases} x_2, & \text{αν } x = x_1 \\ x_1, & \text{αν } x = x_2 \\ x, & \text{αν } x \neq x_1, x_2 \end{cases}$$

είναι ομοιομορφισμός. Πράγματι, η f είναι προφανώς $1-1$ και επί. Έστω $G \in \mathcal{T}_2$. Αν $G \neq \emptyset$, τότε $x_2 \in G$, άρα $x_1 \in f^{-1}(G)$ κι επομένως $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_1$. Άρα η f είναι συνεχής. Ανάλογα, η f^{-1} είναι συνεχής.

(δ) Δύο διακριτοί τοπολογικοί X,Y είναι ομοιομορφικοί, αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $f : X \to Y$, $1-1$ και επί (αφού κάθε συνάρτηση ορισμένη σε διακριτό τοπολογικό χώρο είναι συνεχής).

3.3 Σύγκλιση κατά Υπερφίλτρο

Έστω (x_n) μία φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα θέλαμε να ορίσουμε μία γενικότερη έννοια ορίου της (x_n), το οποίο όριο θα συμβολίζουμε με $\lim^* x_n$. Φυσιολογική απαίτησή μας θα ήταν αυτή η έννοια ορίου να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Συμβατότητα: Αν το (σύνηθες) όριο της $\lim\limits_n x_n$ υπάρχει, τότε $\lim\limits_n x_n = \lim^* x_n$.
- Γραμμικότητα: Αν (y_n) είναι μία ακόμη φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και $c_1\, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε $\lim^*(c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 \lim^* x_n + c_2 \lim^* y_n$.
- Θετικότητα: Αν $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\lim^* x_n \geq 0$.

Εύκολα ελέγχει κανείς, ότι με δεδομένη τη γραμμικότητα και τη συμβατότητα, η θετικότητα της υποψήφιας έννοιας ορίου είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη επιθυμητή ιδιότητα:

- Αν $|x_n| \leq A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $|\lim^* x_n| \leq A$.

Αξίζει, επίσης, να παρατηρήσουμε ότι ο συνήθης ορισμός του ορίου για μία (φραγμένη) ακολουθία (x_n) μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής:

(3.3.0.1) $$\lim_n x_n = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ |\mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} :\ |x_n - l| < \varepsilon\}| < \infty$$

(δηλαδή, το l είναι το όριο της (x_n) αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μόνο πεπερασμένοι στο πλήθος τους, όροι της (x_n) απέχουν από το l απόσταση μεγαλύτερη από ε). Αφού κάθε μη τετριμμένο υπερφίλτρο περιέχει όλα τα συμπεπερασμένα σύνολα, η ακόλουθη προσέγγιση φαίνεται φυσιολογική.

Ορισμός 3.3.1 (όριο Banach). *Έστω μία φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n), $l \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε το σύνολο*
$$U(l,\varepsilon) = U(l,\varepsilon)[(x_n)] = \{n \in \mathbb{N} :\ |x_n - l| < \varepsilon\}$$
Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο του $\mathbb{N}$, ορίζουμε
$$\lim_{\mathcal{F}}{}^* x_n = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ U(l,\varepsilon) \in \mathcal{F}.$$

Παρατήρηση 3.3.2. *Το όριο Banach μίας φραγμένης ακολουθίας εξαρτάται από την επιλογή του μη τετριμμένου υπερφίλτρου.*

Θεώρημα 3.3.3. *Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μοναδικό όριο Banach. Επίσης το όριο Banach είναι συμβατό, γραμμικό και θετικό (κατά τον τρόπο που ορίστηκαν αυτές οι έννοιες στην αρχή της Παραγράφου).*

Απόδειξη: Έστω $(x_n), (y_n)$ φραγμένες ακολουθίες και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε διαδοχικά:

Ύπαρξη Έστω $L = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ και θέτουμε $I_0 = [-L, L]$. Διαιρούμε το I_0 στα ξένα διαστήματα $I_1^0 = [-L_0, 0)$, $I_1^1 = [0, L]$. Ακριβώς ένα από τα σύνολα $\{n \in \mathbb{N} :\ x_n \in I_1^0\}, \{n \in \mathbb{N} :\ x_n \in I_1^1\}$ ανήκει στο $\mathcal{F}$. Έστω, λοιπόν I_1 το διάστημα με αυτή την ιδιότητα. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μία φθίνουσα ακολουθία διαστημάτων $I_0, I_1, \dots$ με την ιδιότητα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το μήκος του I_k να είναι $2L/2^k$ και $\{n \in \mathbb{N} :\ x_n \in I_k\} \in \mathcal{F}$. Κατά συνέπεια, $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \overline{I}_k = \{l\}$ για κάποιο $l \in \mathbb{R}$ κι ακόμη, για κάθε $\varepsilon > 0$, $U(l,\varepsilon) \in \mathcal{F}$.

Μοναδικότητα Για $l \neq l'$ και $\varepsilon < \frac{|l-l'|}{2}$, τα σύνολα $U(l,\varepsilon)$ και $U(l',\varepsilon)$ είναι ξένα και κατά συνέπεια, το πολύ ένα από αυτά ανήκει στο $\mathcal{F}$.

Συμβατότητα Άμεσο, από την 3.3.0.1.

Γραμμικότητα Έστω ότι $\lim\limits_{\mathcal{F}}{}^* x_n = l_1$, $\lim\limits_{\mathcal{F}}{}^* y_n = l_2$ κι έστω ένα ε θετικό. Αρχικά υποθέτουμε ότι $c_1, c_2 \neq 0$. Έχουμε ότι τα σύνολα $U\,(l_1, \varepsilon/2c_1)\,[(x_n)]$, $U\,(l_2, \varepsilon/2c_2)\,[(y_n)]$ ανήκουν στο $\mathcal{F}$, άρα και η τομή τους. Για κάθε n στην τομή έχουμε ότι $|x_n - l_1| < \varepsilon/2c_1$ και $|y_n - l_2| < \varepsilon/2c_2$. Συνεπώς, από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι

$$|(c_1x_n + c_2y_n) - (c_1l_1 + c_2l_2)| < \varepsilon.$$

Άρα $U(c_1l_1 + c_2l_2, \varepsilon)[(c_1x_n + c_2y_n)] \in \mathcal{F}$. Για την περίπτωση που κάποιο από τα c_1, c_2 είναι ίσο με 0, η ίδια απόδειξη λειτουργεί (με τις προφανείς τροποποιήσεις).

Θετικότητα Έστω ότι $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κι έστω ένα $l < 0$. Τότε, αν $\varepsilon = |l|/2 > 0$, έχουμε ότι το $U(l,\varepsilon)$ είναι πεπερασμένο και συνεπώς δεν ανήκει στο $\mathcal{F}$. Άρα δεν μπορεί $\lim\limits_{\mathcal{F}}{}^* x_n = l$.

Η ακόλουθη Πρόταση περιγράφει μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα του χώρου Σ που ορίσαμε στο Παράδειγμα 2.2.12, η οποία θα φανεί χρήσιμη κατά την περιγραφή της Stone-Čech συμπαγοποίησης του συνόλου των φυσικών αριθμών.

Πρόταση 3.3.4. *Έστω $\mathcal{U}$ ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο σύνολο $\mathbb{N}$ και έστω ο τοπολογικός χώρος $\Sigma = \mathbb{N} \cup \{\mathcal{U}\}$. Για κάθε $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (συνεχή) φραγμένη συνάρτηση (δηλαδή, φραγμένη ακολουθία), υπάρχει μία συνεχής επέκταση $\hat{a}_{\mathcal{U}} : \Sigma \to \mathbb{R}$ (δηλαδή $\hat{a}_{\mathcal{U}}$ συνεχής και $\hat{a}_{\mathcal{U}}|_{\mathbb{N}} = a$).*

Απόδειξη: Έστω $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε την $\hat{a}_{\mathcal{U}} : \Sigma \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\hat{a}_{\mathcal{U}}(x) = \begin{cases} a(x) & \text{αν } x \in \mathbb{N} \\ \ell = \lim^*_{\mathcal{U}} a_n & \text{αν } x = \mathcal{U} \end{cases}$$

Η $\hat{a}_{\mathcal{U}}$ προφανώς επεκτείνει την a και είναι φραγμένη. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο $\mathcal{U}$. Έστω $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ βασική περιοχή του ℓ. Τότε, αφού $\ell = \lim^*_{\mathcal{U}} a_n$, έχουμε ότι $U(\ell, \varepsilon) \in \mathcal{U}$. Άρα, το $U(\ell,\varepsilon) \cup \{\mathcal{U}\}$ είναι βασική περιοχή του $\mathcal{U}$ και προφανώς $\hat{a}_{\mathcal{U}}(U(\ell,\varepsilon) \cup \{\mathcal{U}\}) \subseteq (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. Επομένως η $\hat{a}_{\mathcal{U}}$ είναι συνεχής.

Παρατήρηση 3.3.5. *Μία διαφορετική προσέγγιση στη γενίκευση του ορίου μίας φραγμένης ακολουθίας μπορεί να γίνει μέσω Συναρτησιακής Ανάλυσης και είναι αυτή που έγινε από τον ίδιο τον Banach στο βιβλίο του «Théorie des opérations linéaires». Ο χώρος ℓ^∞ των φραγμένων ακολουθιών είναι ένας γραμμικός χώρος που εφοδιάζεται με τη νόρμα $||(x_n)|| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Το σύνολο των συγκλινουσών ακολουθιών C, συνιστά έναν υπόχωρο του ℓ^∞. Ακόμη, η απεικόνιση $f : C \to \mathbb{R}$, που απεικονίζει κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στο όριό της, είναι γραμμική και έχει νόρμα τελεστή ίση με 1. Από το Θεώρημα Hahn-Banach, η f επεκτείνεται σε έναν τελεστή $\tilde{f} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$, που έχει επίσης νόρμα τελεστή 1. Έτσι, θα ορίζουμε ως όριο Banach μίας ακολουθίας $(x_n) \in \ell^\infty$ την τιμή $\tilde{f}((x_n))$. Εύκολα ελέγχει κανείς ότι αυτή η έννοια ορίου ικανοποιεί τις απαιτήσεις που θέσαμε στην αρχή της Παραγράφου.*