ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Ενότητα: Τοπικές έννοιες

Γεώργιος Κουμουλλής

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

2 Τοπικές Έννοιες

2.1 Περιοχές και Βάσεις Περιοχών

Η προσοχή μας τώρα μεταφέρεται από τις ολικές έννοιες, που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στη συμπεριφορά της τοπολογίας κοντά σε κάθε σημείο του χώρου. Για κάθε σημείο του χώρου θα θεωρήσουμε το σύστημα περιοχών του, δηλαδή την οικογένεια των συνόλων που περιέχουν το σημείο στο εσωτερικό τους. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε οικογένειες βασικών περιοχών του σημείου, οι οποίες αποτελούν ανάλογο της οικογένειας των μπαλών με σταθερό κέντρο, οι οποίες αποτέλεσαν κεντρικό εργαλείο κατά τη μελέτη των μετρικών χώρων.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ένα $U \subseteq X$ καλείται περιοχή του x αν $x \in U^\circ$. Το σύνολο των περιοχών του x καλείται σύστημα περιοχών του x και συμβολίζεται με $\mathfrak{N}_x$ (ή με $\mathfrak{N}_x^{\mathcal{T}}$ για διάκριση της τοπολογίας).*

Παρατηρήσεις 2.1.2. *(α) Ισχύει ότι $U \in \mathfrak{N}_x \Longleftrightarrow \exists\ G \in \mathcal{T}$ με $x \in G \subseteq U$, αφού $U^\circ = \bigcup\{G \in \mathcal{T} : G \subseteq U\}$.*

(β) Σύμφωνα με τον ορισμό που έχουμε δώσει, δεν απαιτείται από το σύνολο U να είναι ανοικτό, για να είναι περιοχή. Για παράδειγμα, αν $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, τότε το $(a,b]$ στο $\mathbb{R}$ είναι περιοχή κάθε σημείου $x \in (a,b)$, ενώ το $(a,b]$ δεν είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.1.3. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τότε τα συστήματα περιοχών $\mathfrak{N}_x$ έχουν τις εξής ιδιότητες:*

(i) Αν $U \in \mathfrak{N}_x$, τότε $x \in U$ (άρα $U \neq \emptyset$).

(ii) Αν $U_1, U_2 \in \mathfrak{N}_x$, τότε $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{N}_x$.

(iii) Αν $U \in \mathfrak{N}_x$ και $U \subseteq V \subseteq X$, τότε $V \in \mathfrak{N}_x$.

(iv) Ένα $G \subseteq X$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν $G \in \mathfrak{N}_x\ \forall x \in G$.

(v) Αν $U \in \mathfrak{N}_x$ τότε υπάρχει $G \in \mathfrak{N}_x$ με $G \subseteq U$ και $G \in \mathfrak{N}_y\ \forall y \in G$.

Απόδειξη: (i) Αν $U \in \mathfrak{N}_x$, τότε $x \in U^\circ \subseteq U$. Άρα $x \in U$.

(ii) Αν $U_1, U_2 \in \mathfrak{N}_x$, τότε $x \in U_1^\circ$ και $x \in U_2^\circ$. Άρα $x \in U_1^\circ \cap U_2^\circ = (U_1 \cap U_2)^\circ$. Επομένως $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{N}_x$.

(iii) $$\left.\begin{array}{lcl} U \in \mathfrak{N}_x & \Rightarrow & x \in U^\circ \\ U \subseteq V & \Rightarrow & U^\circ \subseteq V^\circ \end{array}\right\} \Longrightarrow x \in V^\circ \Longrightarrow V \in \mathfrak{N}_x.$$

(iv) Έστω $G \subseteq X$. Το G είναι ανοικτό $\Longleftrightarrow$ $G = G^\circ$ $\Longleftrightarrow$ $G \subseteq G^\circ$ $\Longleftrightarrow$ για κάθε $x \in G$ ισχύει $x \in G^\circ \Longleftrightarrow G \in \mathfrak{N}_x\ \forall x \in G$.

(v) Έστω $U \in \mathfrak{N}_x$. Τότε υπάρχει $G \in \mathcal{T}$ με $x \in G \subseteq U$ (Παρατήρηση 2.1.2 (α)). Τότε, από την (iv), $G \in \mathfrak{N}_y\ \forall y \in G$. Ειδικά, για $y = x$ έχουμε $G \in \mathfrak{N}_x$.

Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα (iv) δίνει ένα χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων με χρήση της έννοιας της περιοχής. Επίσης οι ιδιότητες (i), (ii), (iii), (v) χαρακτηρίζουν την τοπολογία, κατά την έννοια του ακόλουθου Θεωρήματος, το οποίο μας παρέχει έναν επιπλέον μηχανισμό παραγωγής τοπολογιών.

Θεώρημα 2.1.4. *Έστω X ένα σύνολο και για κάθε $x \in X$ έστω $\mathcal{N}_x$ μία μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X με τις ιδιότητες:*

1. *Αν $U \in \mathcal{N}_x$, τότε $x \in U$.*
2. *Αν $U_1, U_2 \in \mathcal{N}_x$, τότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}_x$.*
3. *Αν $U \in \mathcal{N}_x$ και $U \subseteq V \subseteq X$, τότε $V \in \mathcal{N}_x$.*
4. *Αν $U \in \mathcal{N}_x$, τότε υπάρχει $G \in \mathcal{N}_x$, τέτοιο ώστε $G \subseteq U$ και $G \in \mathcal{N}_y$ $\forall y \in G$.*

Θέτουμε $\mathcal{T} = \{G \subseteq X : G \in \mathcal{N}_x \ \forall x \in G\} \cup \{\emptyset\}$. Τότε

- *Η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X.*
- *Το σύστημα περιοχών κάθε σημείου $x \in X$, ως προς την $\mathcal{T}$, είναι η οικογένεια $\mathcal{N}_x$. Δηλαδή, $\mathfrak{N}_x^{\mathcal{T}} = \mathcal{N}_x$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη: *Η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X:*

(i) Από τον ορισμό της $\mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$. Ακόμη, αφού $\mathcal{N}_x \neq \emptyset$ για κάθε $x \in X$, υπάρχει $U_x \in \mathcal{N}_x$, $U_x \subseteq X$. Άρα, από την ιδιότητα 3, $X \in \mathcal{N}_x$ για κάθε $x \in X$. Συνεπώς $X \in \mathcal{T}$.

(ii) Έστω $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$. Αν $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, τότε προφανώς $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$. Διαφορετικά, έστω $x \in G_1 \cap G_2$. Τότε $x \in G_1$ και $x \in G_2$. Άρα $G_1 \in \mathcal{N}_x$ και $G_2 \in \mathcal{N}_x$. Από την ιδιότητα 2 παίρνουμε ότι $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{N}_x$. Αφού το $x \in G_1 \cap G_2$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$.

(iii) Έστω I αυθαίρετο σύνολο και $G_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$. Έστω $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$. Υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0} \in \mathcal{T}$. Άρα $G_{i_0} \in \mathcal{N}_x$. Από την ιδιότητα 3, παίρνουμε ότι $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{N}_x$. Συνεπώς $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$.

$\mathfrak{N}_x^{\mathcal{T}} = \mathcal{N}_x$ για κάθε $x \in X$:

Έστω $x \in X$ και $U \in \mathfrak{N}_x^{\mathcal{T}}$, μία περιοχή του x ως προς την $\mathcal{T}$. Τότε $x \in U^\circ$, με $U^\circ \in \mathcal{T}$. Άρα $U^\circ \in \mathcal{N}_x$. Από την ιδιότητα 3, παίρνουμε ότι $U \in \mathcal{N}_x$. Συνεπώς $\mathfrak{N}_x^{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{N}_x \ \forall x \in X$. Αντίστροφα, έστω $U \in \mathcal{N}_x$. Από την ιδιότητα 4, υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \in \mathcal{N}_x$ με $G \subseteq U$. Από την ιδιότητα 1, έχουμε ότι $x \in G$. Συνεπώς $G \in \mathfrak{N}_x^{\mathcal{T}}$. Τώρα, αφού $G \subseteq U$, έπεται ότι $U \in \mathfrak{N}_x^{\mathcal{T}}$. Άρα $\mathcal{N}_x \subseteq \mathfrak{N}_x^{\mathcal{T}}$. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι $\mathfrak{N}_x^{\mathcal{T}} = \mathcal{N}_x$ για κάθε $x \in X$.

Ορισμός 2.1.5. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Μία υποοικογένεια $\mathfrak{B}_x$ του $\mathfrak{N}_x$ λέγεται βάση περιοχών του x, αν για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$ υπάρχει $B \in \mathfrak{B}_x$ ώστε $B \subseteq U$. Τα στοιχεία της $\mathfrak{B}_x$ λέγονται βασικές περιοχές του x. Η $\mathfrak{B}_x$ (για διάκριση της τοπολογίας) συμβολίζεται και με $\mathfrak{B}_x^{\mathcal{T}}$.*

Παρατήρηση 2.1.6. *$\mathfrak{N}_x = \{U \subseteq X : \exists B \in \mathfrak{B}_x \text{ με } B \subseteq U\}$ Δηλαδή ένα υποσύνολο του X είναι περιοχή του x αν και μόνο αν περιέχει μία βασική περιοχή του x (η ισότητα εξασφαλίζεται από την Πρόταση 2.1.3 (iii)).*

Παραδείγματα 2.1.7. *(α) Το $\mathfrak{N}_x$ είναι βάση περιοχών του x.*

(β) Αν $\mathfrak{B}_x$ είναι βάση περιοχών του x, τότε $\mathfrak{B}_x = \mathfrak{N}_x \iff \forall B \in \mathfrak{B}_x$ και $U \subseteq X$ με $B \subseteq U$ ισχύει $U \in \mathfrak{B}_x$.

Πράγματι,

($\Rightarrow$) *Από Πρόταση 2.1.3 (iii).*

($\Leftarrow$) *Έστω $U \in \mathfrak{N}_x$. Τότε, από τον ορισμό της βάσης περιοχών, υπάρχει $B \in \mathfrak{B}_x$ ώστε $B \subseteq U$. Από την υπόθεση, έπεται ότι $U \in \mathfrak{B}_x$ (άρα $\mathfrak{N}_x \subseteq \mathfrak{B}_x$). Επομένως $\mathfrak{N}_x = \mathfrak{B}_x$.*

(γ) Η οικογένεια $\mathfrak{B}_x = \{G \subseteq X : G$ ανοικτό και $x \in G\}$ είναι βάση περιοχών του x. Προφανώς $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$ και για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$, το $U^\circ \in \mathfrak{B}_x$ και $U^\circ \subseteq U$.

(δ) Σε κάθε μετρικό χώρο (X,ρ), η οικογένεια $\mathfrak{B}_x = \{B(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ είναι βάση περιοχών του x (για κάθε $x \in X$). Πράγματι $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$ γιατί κάθε $B(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το x. Αν U είναι μία περιοχή του x ($U \in \mathfrak{N}_x$), τότε $x \in U^\circ \in \mathcal{T}$, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq U^\circ \subseteq U$, όπου $B(x,\varepsilon) \in \mathfrak{B}_x$. Ανάλογα, οι οικογένειες $\{B(x,\varepsilon) : \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$ και $\{B\left(x,\frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάσεις περιοχών του x.

(ε) Σε κάθε διακριτό τοπολογικό χώρο, η $\mathfrak{B}_x = \{\{x\}\}$ είναι βάση περιοχών του x, αφού $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$ και για κάθε $U \in \mathfrak{N}_x$ έχουμε $\{x\} \in \mathfrak{B}_x$ και $\{x\} \subseteq U$.

Πρόταση 2.1.8. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και για κάθε $x \in X$, έστω $\mathfrak{B}_x$ βάση περιοχών του x. Τότε*

(i) *Αν $B \in \mathfrak{B}_x$, τότε $x \in B$ (άρα $B \neq \emptyset$).*

(ii) *Αν $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_x$, τότε υπάρχει $B_3 \in \mathfrak{B}_x$ ώστε $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

(iii) *Ένα $G \subseteq X$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B_x \in \mathfrak{B}_x$ ώστε $B_x \subseteq G$.*

(iv) *Αν $B \in \mathfrak{B}_x$, τότε υπάρχει $G \subseteq X$ ώστε $x \in G \subseteq B$ και $\forall y \in G\ \exists B_y \in \mathfrak{B}_y$ ώστε $B_y \subseteq G$.*

Απόδειξη: (i) Αν $B \in \mathfrak{B}_x$, τότε $B \in \mathfrak{N}_x$. Άρα από Πρόταση 2.1.3 (i), $x \in B$.

(ii) Αν $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_x$, τότε $B_1, B_2 \in \mathfrak{N}_x$. Άρα, από Πρόταση 2.1.3 (ii), $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{N}_x$. Άρα, αφού $\mathfrak{B}_x$ βάση περιοχών του x, υπάρχει $B_3 \in \mathfrak{B}_x$ ώστε $B_3 \in B_1 \cap B_2$.

(iii) G ανοικτό $\iff$ $G \in \mathfrak{N}_x\ \forall x \in G$ (Πρόταση 2.1.3 (iv)) $\iff$ $\forall x \in G\ \exists\ B_x \in \mathfrak{B}_x$ ώστε $B_x \subseteq G$ (Παρατήρηση 2.1.5).

(iv) Έστω $B \in \mathfrak{B}_x$. Τότε $B \in \mathfrak{N}_x$, άρα υπάρχει $G \subseteq X$ ανοικτό, ώστε $x \in G \subseteq B$. Από την (iii), για κάθε $y \in G$ υπάρχει $B_y \in \mathfrak{B}_y$ ώστε $B_y \subseteq G$.

Το ακόλουθο Θεώρημα δίνει μία επιπλέον μέθοδο κατασκευής τοπολογιών, ανάλογη με τη μέθοδο του Θεωρήματος 2.1.4, αυτή τη φορά με κεντρική έννοια τη βασική περιοχή.

Θεώρημα 2.1.9. *Έστω X ένα σύνολο και για κάθε $x \in X$ έστω $\mathcal{B}_x$ μία μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X με τις ιδιότητες:*

1. *Αν $B \in \mathcal{B}_x$, τότε $x \in B$.*
2. *Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*
3. *Αν $B \in \mathcal{B}_x$, τότε υπάρχει $G \subseteq X$, τέτοιο ώστε $x \in G \subseteq B$ και για κάθε $y \in G$ υπάρχει $B_y \in \mathcal{B}_y$ ώστε $B_y \subseteq G$.*

Θέτουμε $\mathcal{T} = \{G \subseteq X : $ *για κάθε* $x \in G$ *υπάρχει* $B \in \mathcal{B}_x$ *ώστε* $B \subseteq G\} \cup \{\emptyset\}$. *Τότε*

- *Η* $\mathcal{T}$ *είναι τοπολογία στο* X.
- *Για κάθε* $x \in X$ *η οικογένεια* $\mathcal{B}_x$ *είναι μία βάση περιοχών του* x *ως προς την τοπολογία* $\mathcal{T}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 2.1.4 και γι' αυτό αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα 2.1.10 (Κριτήριο Hausdorff). *Έστω* X *σύνολο και* $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ *δύο τοπολογίες στο* X. *Για κάθε* $x \in X$ *έστω* $\mathfrak{B}_x^1, \mathfrak{B}_x^2$ *βάσεις περιοχών του* x *ως προς* $\mathcal{T}_1$ *και* $\mathcal{T}_2$ *αντίστοιχα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$

(ii) Για κάθε $x \in X$ *και* $B_1 \in \mathfrak{B}_x^1$, *υπάρχει* $B_2 \in \mathfrak{B}_x^2$ *ώστε* $B_2 \subseteq B_1$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνθήκη:

(iii) $\mathfrak{N}_x^1 \subseteq \mathfrak{N}_x^2$ *για κάθε* $x \in X$

όπου $\mathfrak{N}_x^1, \mathfrak{N}_x^2$ είναι τα συστήματα περιοχών του x ως προς $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι (i) $\iff$ (iii) $\iff$ (ii).

(i)$\Rightarrow$(iii) Έστω $x \in X$ και $U \in \mathfrak{N}_x^1$. Τότε υπάρχει $G \in \mathcal{T}_1$ ώστε $x \in G \subseteq U$. Από το (i) έπεται ότι $G \in \mathcal{T}_2$. Άρα $U \in \mathfrak{N}_x^2$. Επομένως $\mathfrak{N}_x^1 \subseteq \mathfrak{N}_x^2$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Έστω $G \in \mathcal{T}_1$. Τότε $G \in \mathfrak{N}_x^1$ $\forall x \in G$ (Πρόταση 2.1.3 (iv)). Από το (iii) έπεται ότι $G \in \mathfrak{N}_x^2$ $\forall x \in G$. Άρα $G \in \mathcal{T}_2$. Επομένως $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

(iii)$\Rightarrow$(ii) Έστω $x \in X$ και $B_1 \in \mathfrak{B}_x^1$. Τότε $B_1 \in \mathfrak{N}_x^1$, άρα από το (iii), $B_1 \in \mathfrak{N}_x^2$. Αφού $\mathfrak{B}_x^2$ είναι βάση περιοχών του x ως προς $\mathcal{T}_2$, έπεται ότι υπάρχει $B_2 \in \mathfrak{B}_x^2$ με $B_2 \subseteq B_1$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Έστω $x \in X$ και $U \in \mathfrak{N}_x^1$. Αφού $\mathfrak{B}_x^1$ είναι βάση περιοχών του x ως προς $\mathcal{T}_1$, υπάρχει $B_1 \in \mathfrak{B}_x^1$ ώστε $B_1 \subseteq U$. Από το (ii), υπάρχει $B_2 \in \mathfrak{B}_x^2$ ώστε $B_2 \subseteq B_1$. Τότε $B_2 \subseteq U$ κι έτσι $U \in \mathfrak{N}_x^2$. Επομένως $\mathfrak{N}_x^1 \subseteq \mathfrak{N}_x^2$.

Πρόταση 2.1.11. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος και* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. *Τότε, η* $\mathcal{B}$ *είναι βάση για την* $\mathcal{T}$ $\iff$ *για κάθε* $x \in X$ *η οικογένεια* $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ *είναι βάση περιοχών του* x.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το χαρακτηρισμό βάσης για την $\mathcal{T}$ (Πρόταση 1.1.13).

$(\Rightarrow)$ Έστω $x \in X$. Έχουμε $\mathcal{B}_x \subseteq \mathfrak{N}_x$ διότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{B}_x$ είναι ανοικτό και περιέχει το x. Έστω $U \in \mathfrak{N}_x$. Τότε $x \in U^\circ \in \mathcal{T}$. Αφού $\mathcal{B}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$, από την Πρόταση 1.1.13, υπάρχει $B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U^\circ$. Πρόφανώς $B \in \mathcal{B}_x$ και $B \subseteq U$. Έπεται ότι η $\mathcal{B}_x$ είναι βάση περιοχών του x.

$(\Leftarrow)$ Έστω $G \in \mathcal{T}$ και $x \in G$. Τότε $G \in \mathfrak{N}_x$. Αφού $\mathcal{B}_x$ βάση περιοχών του x, υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$, ώστε $B \subseteq G$. Τότε $B \in \mathcal{B}$ και $x \in B \subseteq G$. Άρα, από την Πρόταση 1.1.13, η $\mathcal{B}$ είναι βάση περιοχών για την $\mathcal{T}$.

Συμπεραίνουμε ότι ολικά ερωτήματα, όπως το αν μία τοπολογία είναι ισχυρότερη από μία άλλη, μεταφράζονται και απαντώνται πλήρως με χρήση τοπικών εννοιών, όπως οι βάσεις περιοχών.

2.2 Φίλτρα και Υπερφίλτρα

Η έννοια του φίλτρου και αντίστοιχα, του υπερφίλτρου, αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο τόσο για τη Θεωρία Συνόλων όσο και για την Τοπολογία. Η σημασία των υπερφίλτρων είναι φανερή κατά την περιγραφή της Stone-Čech συμπαγοποίησης του συνόλου των φυσικών αριθμών, αλλά και μέσα από τις πλούσιες εφαρμογές. Μια μη τετριμμένη εφαρμογή αποτελεί η απόδειξη του Θεωρήματος Ramsey, την οποία θα παρουσιάσουμε παρακάτω. Οι ιδιότητες ενός συστήματος περιοχών και μίας βάσης περιοχών ενός σημείου σε έναν τοπολογικό χώρο παρουσιάζουν ιδιαίτερο συνολοθεωρητικό ενδιαφέρον γι' αυτό απομονώνονται στον ορισμό του φίλτρου.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω ένα σύνολο X και $\mathcal{F}$ μία μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{F}$ καλείται φίλτρο στο X αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) *Αν $A, B \in \mathcal{F}$, τότε και $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

(iii) *Αν $A \in \mathcal{F}$ και $B \supseteq A$, τότε $B \in \mathcal{F}$.*

Σε αυτό το σημείο θα ήταν γόνιμο να αναρωτηθεί κανείς τι θα σήμαινε η φράση «μεγάλο» υποσύνολο του X. Με άλλα λόγια, τι είδους ιδιότητες θα αναμέναμε να ικανοποιέι μία οικογένεια $\mathcal{L}$, «μεγάλων» υποσυνόλων του X; Παραθέτουμε κάποιες μάλλον φυσιολογικές ιδιότητες:

- $X \in \mathcal{L}$ και $\emptyset \notin \mathcal{L}$.
- Αν $A \in \mathcal{L}$ και $B \supseteq A$, τότε $B \in \mathcal{L}$.

Υπάρχουν κι άλλες ιδιότητες, με περιθώρια διαπραγμάτευσης. Δύο πιθανές είναι οι:

- Δεν μπορεί να υπάρχουν $A, B \in \mathcal{L}$, με $A \cap B = \emptyset$.
- Αν $A \in \mathcal{L}$ και $B \notin \mathcal{L}$ για κάποιο $B \subseteq A$, τότε $A \setminus B \in \mathcal{L}$.

Η τελευταία ιδιότητα εμπεριέχει μία έννοια σταθερότητας για την οικογένεια $\mathcal{L}$: ένα μεγάλο σύνολο δεν μπορεί να γίνει μη-μεγάλο εξαιτίας μίας αφαίρεσης ενός μη-μεγάλου υποσυνόλου του. Μία συνέπεια αυτού είναι το ότι αν $A, B \in \mathcal{L}$,τότε και $A \cap B \in \mathcal{L}$. Αυτό διότι, αν $A \cap B \notin \mathcal{L}$, τότε $A \setminus (A \cap B), B \setminus (A \cap B \in \mathcal{L})$, αλλά αυτά τα σύνολα είναι ξένα. Η έννοια του *υπερφίλτρου* αποτυπώνει πλήρως τη φύση του «μεγέθους», όπως αυτή περιγράφεται από τις τέσσερις ιδιότητες που αναφέραμε.

Ορισμός 2.2.2. *Ένα φίλτρο καλείται υπερφίλτρο αν είναι μεγιστικό (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι). Δηλαδή, ένα φίλτρο στο X είναι υπερφίλτρο αν δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα φίλτρο στο X.*

Παράδειγμα 2.2.3. *Για ένα μη κενό $S \subseteq X$, το σύνολο $\mathcal{F}(S) = \{A \subseteq X : S \subseteq A\}$ είναι ένα φίλτρο. Το $\mathcal{F}(S)$ είναι υπερφίλτρο αν και μόνο αν $S = \{x\}$, μονοσύνολο. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\mathcal{F}(x)$ αντί του $\mathcal{F}(S)$.*

Ορισμός 2.2.4. *Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ καλείται πρωταρχικό (ή τετριμμένο) αν υπάρχει $x \in X$ ώστε $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$.*

Ορισμός 2.2.5. *Θα λέμε ότι μία μη κενή οικογένεια $\mathcal{I}$ υποσυνόλων του X έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{I}$ ισχύει ότι $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.*

Παράδειγμα 2.2.6. *Κάθε φίλτρο έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.*

Πρόταση 2.2.7. *Αν $\mathcal{F}$ είναι μία μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, τότε υπάρχει ένα υπερφίλτρο $\mathcal{F}'$ στο X με $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Ιδιαίτερα, κάθε φίλτρο περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την οικογένεια

$$\Gamma = \{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X) : \text{ με } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \text{ και η } \mathcal{I} \text{ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής}\}$$

Στην οικογένεια Γ θεωρούμε τη μερική διάταξη $(\Gamma, <)$ με $\mathcal{I}_1 < \mathcal{I}_2 \iff \mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$. Έστω C μία αλυσίδα στη Γ. Τότε η $\mathcal{I} = \bigcup C \in \Gamma$. Πράγματι, έχουμε προφανώς ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ και αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{I}$, τότε υπάρχει στοιχείο της αλυσίδας $\mathcal{I}_0$ που να περιέχει όλα τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ και αφού $\mathcal{I}_0 \in \Gamma$, έχουμε ότι $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$. Άρα κάθε αλυσίδα στη Γ έχει άνω φράγμα. Συνεπώς, από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο $\mathcal{F}' \in \Gamma$. Ισχυριζόμαστε ότι το $\mathcal{F}'$ είναι υπερφίλτρο. Πράγματι,

- $\emptyset \notin \mathcal{F}'$ αφού το $\mathcal{F}'$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
- Αν $A \in \mathcal{F}'$ και $B \supseteq A$, τότε $B \in \mathcal{F}'$, διότι διαφορετικά θα μπορούσαμε να επισυνάψουμε το B στο $\mathcal{F}'$ χωρίς να βλάψουμε την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
- Αν $A, B \in \mathcal{F}'$, τότε $A \cap B \in \mathcal{F}'$, για τον ίδιο λόγο.

Έτσι, το $\mathcal{F}'$ είναι φίλτρο. Αν $\mathcal{G}$ είναι φίλτρο με $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{G}$, τότε $\mathcal{G} \in \Gamma$ και από τη μεγιστικότητα του $\mathcal{F}'$, έπεται $\mathcal{G} = \mathcal{F}'$. Άρα το $\mathcal{F}'$ είναι υπερφίλτρο.

Πόρισμα 2.2.8. *Έστω $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ υπερφίλτρα στο X. Τότε*

(i) Αν για ένα $B \subseteq X$ ισχύει ότι $B \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$, τότε $B \in \mathcal{F}$.

(ii) Αν για $A, B \subseteq X$ ισχύει ότι $B \cup A \in \mathcal{F}$, τότε το $\mathcal{F}$ περιέχει τουλάχιστον ένα από τα A, B.

(iii) Αν $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$, τότε υπάρχουν $A \in \mathcal{F}$ και $B \in \mathcal{G}$ ώστε $A \cap B = \emptyset$.

Απόδειξη: (i) Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ είναι μη κενή και έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, συνεπώς επεκτείνεται σε ένα υπερφίλτρο $\mathcal{F}'$. Έχουμε ότι $B \in \mathcal{F}'$, αλλά και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ (γιατί;). Άρα $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ και $B \in \mathcal{F}'$.

(ii) Αν $A, B \notin \mathcal{F}$, τότε από (i), υπάρχουν $C, D \in \mathcal{F}$ ώστε $A \cap C = \emptyset$ και $B \cap D = \emptyset$. Άρα $(A \cup B) \cap (C \cap D) = \emptyset$ και αφού $C \cap D \in \mathcal{F}$ έχουμε ότι $A \cup B \notin \mathcal{F}$, πράγμα άτοπο.

(iii) Αφού $\mathcal{G} \nsubseteq \mathcal{F}$, υπάρχει $B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$. Άρα, από (i), υπάρχει $A \in \mathcal{F}$ με $A \cap B = \emptyset$.

Με επαγωγή, μπορούμε να γενικεύσουμε τη (ii) του Πορίσματος 2.2.8 ως εξής:

Πόρισμα 2.2.9. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα υπερφίλτρο και $A \in \mathcal{F}$. Αν το A γράφεται $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, τότε τουλάχιστον ένα από τα A_i ανήκει στο $\mathcal{F}$. Αν επιπλέον τα A_i είναι ξένα ανά δύο, τότε ακριβώς ένα από τα A_i ανήκει στο $\mathcal{F}$.*

Δίνουμε τώρα ένα χαρακτηρισμό των υπερφίλτρων.

Πρόταση 2.2.10. *Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{F}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο αν και μόνο αν ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(ii) *Αν* $A, B \in \mathcal{F}$, *τότε* $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(iii) *Για κάθε* $A \subseteq X$, *είτε* $A \in \mathcal{F}$ *είτε* $A^c \in \mathcal{F}$.

Ιδιαίτερα, ένα φίλτρο $\mathcal{G}$ στο X είναι υπερφίλτρο αν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq X$, είτε $A \in \mathcal{G}$ είτε $A^c \in \mathcal{G}$.

Απόδειξη: Αν η $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο, τότε προφανώς ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες. Αντίστροφα, έστω ότι η $\mathcal{F}$ ικανοποιεί τις (i), (ii), (iii). Έστω $A \in \mathcal{F}$ και $B \supseteq A$. Υποθέτοντας ότι $B \notin \mathcal{F}$ παίρνουμε ότι $B^c \in \mathcal{F}$ κι έτσι $A \cap B^c = \emptyset \in \mathcal{F}$, πράγμα άτοπο. Συνεπώς η $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο. Η μεγιστικότητα εξασφαλίζεται από την (iii).

Ένα ακόμη σημαντικό αποτέλεσμα που θα χρειαστούμε είναι η ύπαρξη μη τετριμμένων υπερφίλτρων.

Πρόταση 2.2.11. *Έστω X ένα άπειρο σύνολο. Τότε υπάρχει μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο X. Επιπλέον, κάθε στοιχείο ενός μη τετριμμένου υπερφίλτρου είναι άπειρο.*

Απόδειξη: Για ένα άπειρο σύνολο X, η οικογένεια $\mathcal{C}$ των συμπεπερασμένων υποσυνόλων του X (δηλαδή των συνόλων με πεπερασμένο συμπλήρωμα) έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. ΄Αρα, από Πρόταση 2.2.7, η $\mathcal{C}$ περιέχετα σε ένα υπερφίλτρο $\mathcal{F}$, το οποίο είναι βέβαια μη τετριμμένο (γιατί;). Το ότι κάθε στοιχείο ενός μη τετριμμένου υπερφίλτρου είναι άπειρο, έπεται άμεσα από την Πρόταση 2.2.8 (ii).

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε έναν τοπολογικό χώρο που θα μας απασχολήσει αρκετά στο μέλλον.

Παράδειγμα 2.2.12. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών (η ύπαρξη του οποίου εξασφαλίστηκε από την Πρόταση 2.2.11). Ορίζουμε το σύνολο*

$$\Sigma = \mathbb{N} \cup \{\mathcal{F}\}$$

και θέτουμε για τα στοιχεία του Σ:

$$\mathfrak{B}_n = \{\{n\}\} \text{ για } n \in \mathbb{N} \text{ και } \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} = \{A \cup \{\mathcal{F}\} : \ A \in \mathcal{F}\}$$

Οι οικογένειες $\mathfrak{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιούν με τετριμμένο τρόπο τις συνθήκες του Θεωρήματος 2.1.9. Ελέγχουμε τις συνθήκες για την $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$.

1. *Προφανώς* $\mathcal{F} \in A \cup \{\mathcal{F}\}$ *για κάθε* $A \cup \mathcal{F} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$.

2. *Αν* $A_1 \cup \{\mathcal{F}\}, A_2 \cup \{\mathcal{F}\} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$, *τότε* $(A_1 \cup \{\mathcal{F}\}) \cap (A_2 \cup \{\mathcal{F}\}) = (A_1 \cap A_2) \cup \{\mathcal{F}\} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$, *αφού* $(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{F}$ *(το $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο).*

3. *Αν* $A \cup \{\mathcal{F}\} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$, *θέτουμε* $G = A \cup \{\mathcal{F}\}$. *Προφανώς* $\mathcal{F} \in G \subseteq A \cup \{\mathcal{F}\}$. *Έστω τώρα* $y \in G$. *Αν* $y = \mathcal{F}$, *θέτουμε* $B_y = G \in \mathfrak{B}_y$ *και έχουμε τετριμμένα* $B_y \subseteq G$. *Αν* $y \in A$, *θέτουμε* $B_y = \{y\} \in \mathfrak{B}_y$ *και έχουμε ότι* $B_y \subseteq G$.

Άρα, από το Θεώρημα 2.1.9, υπάρχει τοπολογία $\mathcal{T}$ στο Σ στην οποία κάθε $x \in \Sigma$ έχει τη $\mathfrak{B}_x$ ως βάση περιοχών του.

Παρατηρούμε ότι κάθε σημείο $n \in \mathbb{N}$ είναι μεμονωμένο σημείο του Σ, ενώ το $\mathcal{F}$ είναι σημείο συσσώρευσης του Σ. Επίσης, το $\mathbb{N}$ είναι πυκνό υποσύνολο του Σ. Το ότι το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο δε χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά για τον ορισμό της τοπολογίας του χώρου Σ. Η χρησιμότητα θα φανεί, όταν επιστρέψουμε στη μελέτη του χώρου Σ και των ιδιοτήτων του.

Κλείνουμε αυτήν την αναφορά μας στα φίλτρα και τις ιδιότητές τους με μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή. Σημειώνουμε ότι για ένα σύνολο S και έναν αριθμό $n \in \mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε με $[S]^n$ το σύνολο $\{A \subseteq S : |A| = n\}$, δηλαδή την οικογένεια των υποσυνόλων του S με ακριβώς n στοιχεία.

Θεώρημα 2.2.13 (Ramsey)**.** *Έστω X ένα άπειρο σύνολο, $n, r \in \mathbb{N}$ κι έστω ότι $[X]^n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$. Τότε υπάρχει $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ και ένα απειρο υποσύνολο S του X, έτσι ώστε $[S]^n \subseteq A_j$*

Προτού προχωρήσουμε στην απόδειξη, ας εξηγήσουμε λίγο το όλο πλαίσιο. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα σύνολα A_i που καλύπτουν το $[X]^n$ είναι ανά δύο ξένα (γιατί;). Ακόμη, συνηθίζουμε να σκεφτόμαστε τους αριθμούς $1, 2, \ldots, r$ ως ένα πεπερασμένο πλήθος χρωμάτων κι ότι ένα σύνολο $\tilde{x} \in [X]^n$ έχει το χρώμα i αν $\tilde{x} \in A_i$. Τότε το Θεώρημα ανάγεται στο ότι, αν το σύνολο $[X]^n$ χρωματιστεί με πεπερασμένο πλήθος χρωμάτων, τότε υπάρχει άπειρο υποσύνολο S του X, έτσι ώστε το $[H]^n$ να είναι μονοχρωματικό.
Απόδειξη: Περνώντας σε ένα υποσύνολο του X, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το X είναι αριθμήσιμο (άπειρο) σύνολο. Χάριν απλότητας, αντικαθιστούμε το σύνολο X με ένα σύνολο ίδιου πληθάριθμου, το $\mathbb{N}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη διάταξη.

Για $n = 1$, το συμπέρασμα είναι άμεσο από την αρχή του Περιστερώνα. Παρουσιάζουμε την απόδειξη για την απλούστερη μη τετριμμένη περίπτωση, $n = 2$. Η γενική περίπτωση αφήνεται ως άσκηση. Ουσιαστικά θα εργαστούμε στη συνάρτηση χρωματισμού

$$c : [\mathbb{N}]^2 \to I = \{1, 2, \ldots, r\} \text{ με } c(\{x, y\}) = i \iff \{x, y\} \in A_i$$

Έστω $\mathcal{F}$ ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο του $\mathbb{N}$. Για $i \in I$ και $x \in X$ θέτουμε

$$A_i(x) = \{y \in \mathbb{N} : c(\{x, y\}) = i\}.$$

Τότε για κάθε $x \in \mathbb{N}$ τα σύνολα $A_i(x)$ είναι ξένα ανά δύο και η ένωσή τους είναι το σύνολο $X \setminus \{x\} \in \mathcal{F}$, αφού το $\mathcal{F}$ είναι μη τετριμμένο. Έπεται ότι υπάρχει ακριβώς ένα $i \in I$ τέτοιο ώστε $A_i(x) \in \mathcal{F}$. Στη συνέχεια θέτουμε

$$B_j = \{x \in \mathbb{N} : A_j(x) \in \mathcal{F}\}.$$

Τα B_j καλύπτουν το $\mathbb{N}$ και από τα παραπάνω προκύπτει ότι επιπλέον είναι ξένα ανά δύο. Έτσι, υπάρχει μοναδικό $j_0 \in I$ ώστε $B_{j_0} \in \mathcal{F}$.

Για την κατασκευή του μονοχρωματικού υποσυνόλου εργαζόμαστε επαγωγικά. Έστω $a_1 \in B_{j_0}$ τυχόν. Αν έχουμε επιλέξει $a_1, a_2, \ldots, a_m$ έτσι ώστε $c(\{a_s, a_t\}) = j_0$ για κάθε $1 \leq s \neq t \leq m$, ορίζουμε

$$S = B_{j_0} \bigcap \left(\bigcap_{s=1}^{m} A_{j_0}(a_s) \right).$$

Το S είναι πεπερασμένη τομή στοιχείων του $\mathcal{F}$, άρα $S \in \mathcal{F}$. Επιλέγουμε στοιχείο $a_{m+1} \in S \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Αυτό είναι εφικτό, αφού το $\mathcal{F}$ είναι μη τετριμμένο και κατά συνέπεια κάθε στοιχείο του είναι άπειρο (Πρόταση 2.2.11).