ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Ενότητα: Τοπολογικοί χώροι

Γεώργιος Κουμουλλής

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1 Τοπολογικοί Χώροι

Μελετώντας κανείς τους μετρικούς χώρους και τις βασικές τους έννοιες εντοπίζει ότι για κάθε μετρικό χώρο ορίζεται, με αρκετά φυσιολογικό τρόπο, η οικογένεια των ανοικτών συνόλων, η οποία έχει τη βασική ιδιότητα να περιέχει την τομή οποιωνδήποτε δύο στοιχείων της, αλλά και την ένωση των στοιχείων οποιασδήποτε υποοικογένειάς της. Η ιδιότητα αυτή είχε καθοριστικό ρόλο στη μελέτη των μετρικών χώρων, καθώς επέτρεψε να εκφρασθούν και να μελετηθούν δομικές έννοιες, όπως η κλειστότητα και το σύνορο συνόλου, με αρχική έννοια το ανοικτό σύνολο και όχι τη μετρική του χώρου. Αυτό μας οδηγεί στο να προσεγγίσουμε την έννοια της **τοπολογίας**, δηλαδή της οικογένειας των ανοικτών υποσυνόλων ενός συνόλου και να γενικεύσουμε με ουσιαστικό τρόπο την έννοια του μετρικού χώρου, δημιουργώντας μία εξαιρετικά πλουσιότερη κλάση, αυτή των **τοπολογικών χώρων**.

1.1 Ανοικτά σύνολα, βάσεις και υποβάσεις

Ορισμός 1.1.1. *Έστω X σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X καλείται **τοπολογία** στο X, αν:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(ii) Κάθε πεπερασμένη τομή στοιχείων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. Δηλαδή αν $n \in \mathbb{N}$ και $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \mathcal{T}$ τότε $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$ και

(iii) Κάθε ένωση στοιχείων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. Δηλαδή αν I αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $G_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$ τότε $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$.

*Το ζεύγος $(X, \mathcal{T}) \equiv X$ καλείται **τοπολογικός χώρος** και τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ καλούνται **ανοικτά σύνολα** (ως προς $\mathcal{T}$ ή του $(X, \mathcal{T})$)*

Παρατηρήσεις 1.1.2. *(α) Εύκολα ελέγχεται με επαγωγή ότι η (ii) του ορισμού είναι ισοδύναμη με την*

(ii)′ αν $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$, τότε $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$

(β) Αν στην (iii) του ορισμού $I = \emptyset$ τότε έχουμε $\bigcup_{i \in \emptyset} G_i = \emptyset$, άρα $\emptyset \in \mathcal{T}$ (κάτι που περιέχεται στην (i) του ορισμού).

Ας εντοπίσουμε κάποια αρχικά παραδείγματα τοπολογικών χώρων.

Παράδειγμα 1.1.3. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε η οικογένεια*

$$\mathcal{T}_\rho = \{A \subseteq X : \forall \ x \in A \ \exists \ \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A\}$$

*των ανοικτών υποσυνόλων του X (ως προς τη μετρική ρ) είναι τοπολογία στο X και καλείται η **μετρική τοπολογία που καθορίζεται από τη** ρ.*

Ορισμός 1.1.4. *Ένας τοπολογικός χώρος* $(X,\mathcal{T})$ *λέγεται* ***μετρικοποιήσιμος*** *αν υπάρχει μετρική* ρ *στο* X*, τέτοια ώστε* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$*. Στην περίπτωση αυτή, η τοπολογία* $\mathcal{T}$ *λέγεται* ***μετρικοποιήσιμη****.*

Παραδείγματα 1.1.5. *Έστω* X *σύνολο. Οι παρακάτω οικογένειες υποσυνόλων του* X *είναι τοπολογίες του* X*:*
(α) $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(X)$*, η* ***διακριτή τοπολογία****. Ο διακριτός χώρος* $(X,\mathcal{T}_1)$ *είναι μετρικοποιήσιμος, αφού* $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_\rho$ *για* ρ *τη διακριτή μετρική του* X*.*

(β) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X\}$*, η* ***τετριμμένη τοπολογία****. Παρατηρούμε ότι σε κάθε μετρικό χώρο* (X,ρ) *τα μονοσύνολα είναι κλειστά, δηλαδή* $X \setminus \{x\} \in \mathcal{T}_\rho$, $\forall x \in X$*. Συνεπώς αν ο* X *έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, ο* $(X,\mathcal{T}_2)$ *δεν είναι μετρικοποιήσιμος, αφού* $X \setminus \{x\} \notin \mathcal{T}_2$ *για* $x \in X$ *τυχόν.*

(γ) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : x_0 \in A\}$ *(όπου* $x_0 \in X$*), η* ***τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου*** (x_0)*. Όπως πριν, αν ο* X *έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, ο* $(X,\mathcal{T}_3)$ *δεν είναι μετρικοποιήσιμος, αφού* $X \setminus \{x_0\} \notin \mathcal{T}_3$*. Στην ειδική περίπτωση* $X = \{a,b\}$ *(με* $a \neq b$*), η* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ *είναι η τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου* a *στο* X *και ο τοπολογικός χώρος* $(X,\mathcal{T})$ *λέγεται* ***χώρος του Sierpinski****.*

(δ) $\mathcal{T}_4 = \{X\} \cup \{A \subseteq X : x_0 \notin A\}$ *(όπου* $x_0 \in X$*), η* ***τοπολογία του εξαιρούμενου σημείου*** (x_0)*. Αν ο* X *έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, ο* $(X,\mathcal{T}_4)$ *δεν είναι μετρικοποιήσιμος, αφού* $X \setminus \{x\} \notin \mathcal{T}_4$*, για* $x \in X \setminus \{x_0\}$*.*

(ε) $\mathcal{T}_5 = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : A^c \equiv X \setminus A$ *πεπερασμένο*$\}$*, η* ***συμπεπερασμένη τοπολογία****. Δείχνουμε ότι η* $\mathcal{T}_5$ *είναι τοπολογία στο* X*:*

- *(i)* $\emptyset \in \mathcal{T}_5$ *και* $X \in \mathcal{T}_5$*, αφού* $X \setminus X = \emptyset$*, πεπερασμένο.*
- *(ii) Έστω* $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_5$*. Τότε, αν* $G_1 = \emptyset$ *ή* $G_2 = \emptyset$ *έχουμε* $G_1 \cap G_2 = \emptyset \in \mathcal{T}_5$*. Αν τώρα* $G_1 \neq \emptyset$ *και* $G_2 \neq \emptyset$*, τότε* G_1^c, G_2^c *πεπερασμένα, άρα και το* $G_1^c \cup G_2^c$ *είναι πεπερασμένο, δηλαδή* $(G_1 \cap G_2)^c$ *πεπερασμένο. Άρα* $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_5$
- *(iii) Έστω* $I \neq \emptyset$ *σύνολο δεκτών και* $G_i \in \mathcal{T}_5$ $\forall i \in I$*. Αν* $G_i = \emptyset$ $\forall i \in I$*, τότε* $\bigcup\limits_{i\in I} G_i = \emptyset \in \mathcal{T}_5$*. Διαφορετικά* $\exists\ i_0 \in I :\ G_{i_0} \neq \emptyset$*. Τότε* $(G_{i_0})^c$ *πεπερασμένο, και αφού* $\left(\bigcup\limits_{i\in I} G_i\right)^c \subseteq (G_{i_0})^c$*, έχουμε ότι* $\left(\bigcup\limits_{i\in I} G_i\right)^c$ *είναι πεπερασμένο, συνεπώς* $\bigcup\limits_{i\in I} G_i \in \mathcal{T}_5$*.*

Αν ο X *είναι πεπερασμένος, τότε* $(X,\mathcal{T}_5) = (X,\mathcal{T}_1)$*, άρα είναι μετρικοποιήσιμος. Αν ο* X *είναι άπειρος, τότε ο* $(X,\mathcal{T}_5)$ *δεν είναι μετρικοποιήσιμος. Πράγματι, σε κάθε μετρικό χώρο, με τουλάχιστον δύο σημεία, υπάρχουν ξένα ανοικτά μη κενά σύνολα (αφού αν* $x \neq y$*, τότε* $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$*, για* $\varepsilon = \frac{\rho(x,y)}{2} > 0$*). Όμως στον* $(X,\mathcal{T}_5)$ *δεν υπάρχουν τέτοια σύνολα. Αν υποθέσουμε ότι* G_1, G_2 *είναι ξένα ανοικτά μη κενά, τότε* G_1^c, G_2^c *είναι πεπερασμένα, άρα* $X = X \setminus (G_1 \cap G_2) = G_1^c \cup G_2^c$*, πεπερασμένο, πράγμα άτοπο.*

(στ) $\mathcal{T}_6 = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : A^c \equiv X \setminus A$ *αριθμήσιμο*$\}$*, η* ***συναριθμήσιμη τοπολογία****. Όπως πριν, ο* $(X,\mathcal{T}_6)$ *είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν το* X *είναι αριθμήσιμο σύνολο.*

Παρατήρηση 1.1.6. *Αν* $\mathcal{T}$ *είναι τοπολογία σε ένα σύνολο* X*, τότε* $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$*.*

Έστω ότι σε ένα σύνολο X έχει κατασκευαστεί μία οικογένεια τοπολογιών. Αποτελεί φυσιολογικό ερώτημα, το αν με απλές συνολοθεωρητικές πράξεις μπορούν να κατασκευαστούν επιπλέον τοπολογίες στο X.

Πρόταση 1.1.7. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ δύο τοπολογίες στο X. Τότε η $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ είναι τοπολογία στο X. Γενικότερα, αν $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια τοπολογιών στο X, τότε η $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ είναι τοπολογία στο X.*

Απόδειξη: (για τομή δύο τοπολογιών) (i) Άμεσα, $\emptyset, X \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

(ii) Έστω $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Τότε $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_1$ και $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_2$. Αφού $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ τοπολογίες, $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_1$ και $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_2$. Δηλαδή $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

(iii) Έστω $G_i \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ $\forall i \in I$, όπου I αυθαίρετο σύνολο. Τότε $\forall i \in I, G_i \in \mathcal{T}_1$ και $G_i \in \mathcal{T}_2$. Αφού $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ τοπολογίες, $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_1$ και $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_2$. Δηλαδή $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$.

Παρατήρηση 1.1.8. *Προφανώς, η $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ περιέχεται σε κάθε $\mathcal{T}_i$ και είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο X με αυτήν την ιδιότητα. Πράγματι, αν $\mathcal{T}$ τοπολογία στο X με $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_i$, $\forall i \in I$, τότε $\mathcal{T} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$.*

Σημειώνουμε ότι η (συνολοθεωρητική) ένωση δε συμπεριφέρεται εξίσου καλά. Ενδέχεται η ένωση δύο τοπολογιών να μην είναι τοπολογία, όπως φαίνεται από το ακόλουθο:

Παράδειγμα 1.1.9. *Αν $X = \{a, b, c\}$, με a, b, c διακεκριμένα, και $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$, τότε $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ είναι τοπολογίες στο X, ενώ η $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ δεν είναι τοπολογία, αφού $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ και $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$*

Όμως υπάρχει η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$. Το ίδιο ισχύει για κάθε οικογένεια C, υποσυνόλων του X.

Πρόταση 1.1.10. *Έστω X σύνολο και $C \subseteq \mathcal{P}(X)$. Τότε υπάρχει η μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στο X ώστε η $\mathcal{T}$ να περιέχει τη C.*

Απόδειξη: Θεωρουμε $\Gamma = \{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{S}$ τοπολογία στο X με $C \subseteq \mathcal{S}\}$. Τότε $\Gamma \neq \emptyset$ αφού $\mathcal{P}(X) \in \Gamma$. Θέτουμε $\mathcal{T} = \bigcap\{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \Gamma\}$. Τότε, από Πρόταση 1.1.7 η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο X και προφανώς $C \subseteq \mathcal{T}$. Αν τώρα $\mathcal{S}$ τοπολογία στο X με $C \subseteq \mathcal{S}$, δηλαδή $\mathcal{S} \in \Gamma$, τότε $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ (από τον ορισμό της $\mathcal{T}$). Δηλαδή η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την C

Ορισμός 1.1.11. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{B}$ υποοικογένεια της $\mathcal{T}$. Η $\mathfrak{B}$ καλείται **βάση** για την $\mathcal{T}$, αν κάθε ανοικτό σύνολο είναι μία ένωση στοιχείων της $\mathfrak{B}$. Δηλαδή, αν $\forall G \in \mathcal{T}$ $\exists (B_i)_{i \in I}$ οικογένεια στοιχείων της $\mathfrak{B}$, ώστε $G = \bigcup_{i \in I} B_i$. Τα στοιχεία της $\mathfrak{B}$ λέγονται **βασικά ανοικτά σύνολα**.*

Ιδιαίτερα, ισχύει η

$$\mathcal{T} = \left\{ G \subseteq X : \exists \ (B_i)_{i \in I} \text{ οικογένεια στοιχείων της } \mathfrak{B}, \text{ώστε } G = \bigcup_{i \in I} B_i \right\} \tag{1.1.0.1}$$

Παρατήρηση 1.1.12. *Αν X είναι ένα σύνολο, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ και $G \subseteq X$, τότε το G γράφεται ως ένωση των στοιχείων κάποιας υποοικογένειας της $\mathfrak{B}$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in G$ $\exists$ $B \in \mathfrak{B}$ ώστε $x \in B \subseteq G$. Πράγματι, για το ευθύ έχουμε ότι $G = \bigcup_{i \in I} B_i$ για κάποια υποοικογένεια $(B_i)_{i \in I}$ της $\mathfrak{B}$. Άρα αν $x \in G, \exists$ $i_0 \in I$ ώστε $x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = G$. Αντίστροφα, για κάθε $x \in G$ επιλέγουμε $B_x \in \mathfrak{B}$: $x \in B_x \subseteq G$. Τότε $G = \bigcup_{x \in G} B_x$, όπου $(B_x)_{x \in G}$ υποοικογένεια της $\mathfrak{B}$.*

Πρόταση 1.1.13. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$.

(ii) Για κάθε $G \in \mathcal{T}$ και για κάθε $x \in G, \exists\ B \in \mathfrak{B}$ ώστε $x \in B \subseteq G$.

Στην περίπτωση αυτή, για κάθε $G \subseteq X$ έχουμε:

$$G \in \mathcal{T} \iff \forall x \in G\ \exists\ B \in \mathfrak{B},\ \textit{ώστε}\ x \in B \subseteq G.$$

Απόδειξη: Άμεσο από την Παρατήρηση 1.1.12 και τη σχέση 1.1.0.1

Παραδείγματα 1.1.14. *(α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Οι οικογένειες $\mathfrak{B} = \{B(x,\varepsilon) :\ x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ και $\mathfrak{B}' = \{B\left(x,\frac{1}{n}\right) :\ x \in X,\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάσεις για την τοπολογία $\mathcal{T}_\rho$. Ειδικά στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία, η οικογένεια $\mathfrak{B} = \{(a,b) :\ a,b \in \mathbb{R}$ με $a < b\}$ είναι βάση (σημειώνουμε ότι $(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right)$).*

(β) Αν $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{B}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$, τότε κάθε οικογένεια $\mathfrak{B}'$ με $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}' \subseteq \mathcal{T}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$. Ειδικά, η $\mathcal{T}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$.

(γ) Αν $(X,\mathcal{T})$ ο διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε η $\mathfrak{B} = \{\{x\} :\ x \in X\}$ είναι (η μικρότερη) βάση για την $\mathcal{T}$.

Όπως γίνεται φανερό από τη σχέση 1.1.0.1, μία τοπολογία καθορίζεται πλήρως από κάθε βάση της. Είναι σημαντικό, όμως, να εξετάσουμε πότε μία οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X αποτελεί βάση για κάποια τοπολογία στο X. Αφού τα στοιχεία της οικογένειας αυτής θα πρέπει να είναι σε θέση να παράγουν κάθε ανοικτό σύνολο για εκείνη την τοπολογία, θα πρέπει να είναι σε θέση να παράγουν και το ίδιο το X. Επίσης μία υποψήφια βάση θα πρέπει να περιέχει και «μικρά» σύνολα, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η εσωτερική κάλυψη ανοικτών συνόλων. Το παραπάνω διατυπώνεται αυστηρά στο ακόλουθο:

Θεώρημα 1.1.15. *Έστω X σύνολο και $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για μία (μοναδική από την 1.1.0.1) τοπολογία στο X, αν και μόνο αν:*

(i) $X = \bigcup \mathfrak{B} \equiv \bigcup\{B :\ B \in \mathfrak{B}\}$ και

(i) Αν $B_1,B_2 \in \mathfrak{B}$ και $x \in B_1 \cap B_2$, τότε $\exists\ B_3 \in \mathfrak{B}$ ώστε $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ (δηλαδή, από Παρατήρηση 1.1.12, το $B_1 \cap B_2$ είναι ένωση στοιχείων της $\mathfrak{B}$ για κάθε $B_1,B_2 \in \mathfrak{B}$).

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Υποθέτουμε ότι η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για μία τοπολογία $\mathcal{T}$. Αφού $X \in \mathcal{T}$ και $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ για κάθε $B_1,B_2 \in \mathfrak{B}$, έπονται τα (i) και (ii).

$(\Leftarrow)$ Θέτουμε $\mathcal{T} = \{G \subseteq X :\ \exists\ C \subseteq \mathfrak{B}$ ώστε $G = \bigcup C\}$.

Η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ (για $C = \emptyset$) και $X \in \mathcal{T}$ (για $C = \mathfrak{B}$).

2. Έστω $G_1,G_2 \in \mathcal{T}$. Τότε $G_1 = \bigcup C_1$ και $G_2 = \bigcup C_2$ για $C_1,C_2 \subseteq \mathfrak{B}$. Άρα, $G_1 \cap G_2 = \bigcup\{B \cap C :\ B \in C_1, C \in C_2\}$ όπου $B \cap C$ είναι ένωση στοιχείων της $\mathfrak{B}$, λόγω του (ii). Άρα $G_1 \cap G_2$ είναι ένωση στοιχείων της $\mathfrak{B}$, δηλαδή $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$.

3. Έστω I σύνολο και $G_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$. Τότε $\exists$ $C_i \subseteq \mathfrak{B}$ ώστε $G_i = \bigcup C_i$ $\forall i \in I$. Θέτουμε $C = \bigcup_{i\in I} C_i$. Τότε $C \subseteq \mathfrak{B}$ και $\bigcup_{i\in I} G_i = \bigcup C$. Συνεπώς $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathcal{T}$.

Η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$:
Αφού για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ έχουμε $B \in \bigcup C$ για $C = \{B\}$, έπεται ότι κάθε στοιχείο της $\mathfrak{B}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$. Άρα, από τον ορισμό της $\mathcal{T}$, η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$.

Παραδείγματα 1.1.16. *(α) Έστω $\mathfrak{B} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ (όπου $(a,a] = \emptyset$). Η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία του $\mathbb{R}$, αφού:*

(i) $\mathbb{R} = \bigcup \mathfrak{B} \left(= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n,n] \right)$ *και*

(ii) Αν $(a_1,b_1],(a_2,b_2] \in \mathfrak{B}$ τότε η τομή $(a_1,b_1] \cap (a_2,b_2]$ ανήκει στη $\mathfrak{B}$, αφού, είτε είναι κενή, είτε $(a_1,b_1] \cap (a_2,b_2] = (a,b]$ με $a = \max\{a_1,a_2\}$ και $b = \min\{b_1,b_2\}$.

*Η μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}_S$ του $\mathbb{R}$ που έχει βάση την $\mathfrak{B}$ ονομάζεται **τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων**. Ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{R},\mathcal{T}_S) \equiv \mathbb{R}_S$ καλείται **ο χώρος των πραγματικών αριθμών με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων**. Η τοπολογία $\mathcal{T}_S$ είναι μεγαλύτερη από τη συνήθη τοπολογία $\mathcal{T}_{|\cdot|}$ του $\mathbb{R}$, διότι αν $a,b \in \mathbb{R}, a \leq b$ τότε $(a,b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}]$, όπου $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a \leq b - \frac{1}{n_0}$. Άρα $(a,b) \in \mathcal{T}_S$. Ακόμη $(a,b] \notin \mathcal{T}_{|\cdot|}$, με $(a,b] \in \mathcal{T}_S$ κι επομένως $\mathcal{T}_{|\cdot|} \subsetneq \mathcal{T}_S$.*

(β) Η οικογένεια $C = \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b,+\infty) : b \in \mathbb{R}\}$ δεν είναι βάση για κάποια τοπολογία του $\mathbb{R}$ διότι δεν ικανοποιείται η συνθήκη (ii) του Θεωρήματος 1.1.15. Πράγματι, αν $a,b \in \mathbb{R}, a < b$, τότε $(-\infty,a) \cap (b,+\infty) = (a,b)$, που δεν είναι ένωση στοιχείων της C. Όμως, όπως θα δούμε αναλυτικά παρακάτω, τα στοιχεία της μορφής $B \cap C : B,C \in C$ αποτελούν βάση για τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$.

Το τελευταίο παράδειγμα μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.17. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Μια υποοικογένεια C της $\mathcal{T}$ καλείται **υποβάση** για την $\mathcal{T}$ αν η οικογένεια των πεπερασμένων τομών στοιχείων της C αποτελεί βάση για την $\mathcal{T}$. Δηλαδή, αν η*

$$\mathfrak{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i : n \in \mathbb{N}, C_i \in C \text{ για } i = 1,2,\ldots,n \right\} \bigcup \{X\}$$

είναι βάση για την $\mathcal{T}$.

Αν C είναι υποβάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$, τότε τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ είναι ακριβώς τα σύνολα της μορφής

$$G = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} C_j^i \tag{1.1.0.2}$$

όπου I αυθαίρετο σύνολο, $n_i \in \mathbb{N}$ $\forall i \in I$ και $C_j^i \in C$.

Πρόταση 1.1.18. *Έστω $\mathcal{C}$ οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X. Τότε υπάρχει μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}$ στο X που έχει υποβάση τη $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη: Έστω

$$\mathfrak{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \,:\, n \in \mathbb{N}, C_i \in \mathcal{C} \text{ για } i = 1,2,\ldots,n \right\} \bigcup \{X\}$$

Τότε $X \in \mathfrak{B}$ και η τομή δύο στοιχείων της $\mathfrak{B}$ ανήκει στην $\mathfrak{B}$. Άρα, από το Θεώρημα 1.1.15, η $\mathfrak{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία $\mathcal{T}$ στο X. Για την $\mathcal{T}$ η $\mathcal{C}$ είναι υποβάση. Η μοναδικότητα έπεται από τη σχέση 1.1.0.2.

Παρατήρηση 1.1.19. *Αν $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ και $\mathcal{T}$ τοπολογία στο X με υποβάση τη $\mathcal{C}$, τότε από τη σχέση 1.1.0.2 η $\mathcal{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία στο X που περιέχει τη $\mathcal{C}$. Έτσι έχουμε μία δεύτερη απόδειξη της Πρότασης 1.1.10, κατά την οποία περιγράφονται πιο κατασκευαστικά τα ανοικτά σύνολα της τοπολογίας $\mathcal{T}$.*

Παραδείγματα 1.1.20. *(α) Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τότε κάθε βάση $\mathfrak{B}$ της $\mathcal{T}$ είναι και υποβάση για την $\mathcal{T}$. Πράγματι, αν $\mathfrak{B}'$ είναι η οικογένεια των πεπερασμένων τομών στοιχείων της $\mathfrak{B}$, τότε $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}' \subseteq \mathcal{T}$. Άρα η $\mathfrak{B}'$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$. Δηλαδή, η $\mathfrak{B}$ είναι υποβάση της $\mathcal{T}$.*

(β) Η οικογένεια $\mathcal{C} = \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b,+\infty) : b \in \mathbb{R}\}$ είναι υποβάση για τη συνήθη τοπολογία στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $\mathfrak{B}$ η οικογένεια των πεπερασμένων τομών στοιχείων της $\mathcal{C}$. Παρατηρούμε ότι $\forall a,b \in \mathbb{R}, a < b$, $(-\infty,a) \cap (b,+\infty) = (a,b)$. Άρα η $\mathfrak{B}$ περιέχει τη βάση για τη συνήθη τοπολογία $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ και προφανώς περιέχεται στη συνήθη τοπολογία. Έτσι, η $\mathfrak{B}$ είναι βάση και συνεπώς, η $\mathcal{C}$ υποβάση για τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$.

(γ) Ανάλογα με το (β), η $\mathcal{C} = \{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b,+\infty) : b \in \mathbb{R}\}$ είναι υποβάση για την τοπολογία $\mathcal{T}_S$ των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων.

1.2 Κλειστά σύνολα, εσωτερικό, κλειστότητα και σύνορο

Κατά τη μελέτη των μετρικών χώρων, πέρα από τα ανοικτά σύνολα, κεντρικά αντικείμενα ήταν τα κλειστά σύνολα καθώς και οι έννοιες του εσωτερικού, της κλειστότητας και του συνόρου. Οι ίδιες έννοιες θα μας απασχολήσουν και θα αποδειχθούν εξίσου κεντρικές κατά τη μελέτη των τοπολογικών χώρων. Στην αναζήτηση και απόδειξη των ιδιοτήτων των παραπάνω αντικειμένων, οδηγός μας θα είναι τα αντίστοιχα αποτελέσματα που εμφανίζονται στους μετρικούς χώρους.

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ένα $F \subseteq X$ καλείται **κλειστό** στο X (ή κλειστό ως προς $\mathcal{T}$), αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό. Δηλαδή το F είναι κλειστό αν $F^c \in \mathcal{T}$.*

Πρόταση 1.2.2. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τότε:*

1. *Τα $\emptyset, X$ είναι κλειστά στο X.*
2. *Η πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*
3. *Η αυθαίρετη τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη:

1. $\emptyset^c = X \in \mathcal{T} \implies \emptyset$ κλειστό, $X^c = \emptyset \in \mathcal{T} \implies X$ κλειστό.

2. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $F_1, F_2, \ldots, F_n \subseteq X$ κλειστά. Τότε τα $F_1^c, F_2^c, \ldots, F_n^c$ είναι ανοικτά. Άρα το $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i^c = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i\right)^c$ είναι ανοικτό. Επομένως το $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό.

3. Ανάλογα, χρησιμοποιώντας ότι η αυθαίρετη ένωση ανοικτών είναι ανοικτό.

Παραδείγματα 1.2.3. *(α) Στο διακριτό τοπολογικό χώρο όλα τα υποσύνολα είναι κλειστά (και συγχρόνως ανοικτά).*

(β) Στον τετριμμένο τοπολογικό χώρο τα μόνα κλειστά σύνολα είναι τα $\emptyset, X$.

(γ) Αν $(X, \mathcal{T})$ έχει τη συμπεπερασμένη τοπολογία, τότε τα κλειστά σύνολα είναι τα πεπερασμένα και το X.

(δ) Αν $(X, \mathcal{T})$ έχει τη συναριθμήσιμη τοπολογία, τότε τα κλειστά σύνολα είναι τα αριθμήσιμα και το X.

Ορισμός 1.2.4. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το σύνολο $\bigcup\{G : \ G \subseteq A$ και G ανοικτό$\}$ λέγεται **εσωτερικό** του A και συμβολίζεται με A° ή με $\mathrm{int}_{\mathcal{T}} A$.*

Παρατήρηση 1.2.5. *Το A° είναι ανοικτό σύνολο περιέχεται στο A και είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A.*

Πρόταση 1.2.6. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τότε για κάθε $A, B \subseteq X$:*

(i) $A^\circ \subseteq A$

(ii) $A \in \mathcal{T} \iff A^\circ = A$

(iii) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

(iv) Αν $A \subseteq B$, τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$

(v) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

Απόδειξη: (i), (ii) Άμεσα, από την Παρατήρηση 1.2.5.

(iii) Έπεται από τη (ii) αφού A° ανοικτό.

(iv) Αν $A \subseteq B$, τότε κάθε ανοικτό σύνολο που που περιέχεται στο A, περιέχεται και στο B. Επομένως, από τον ορισμό έπεται $A^\circ \subseteq B^\circ$.

(v)
$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{array}\right\} \overset{\text{(iv)}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} (A \cap B)^\circ \subseteq A \\ (A \cap B)^\circ \subseteq B \end{array}\right\} \Longrightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$$

Από την (i) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A^\circ \subseteq A \\ B^\circ \subseteq B \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B \\ A^\circ \cap B^\circ \text{ ανοικτό} \end{array}\right\} \Longrightarrow A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$$

Άρα $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$

Ορισμός 1.2.7. *Έστω* $(X,\mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος και* $A \subseteq X$*. Το σύνολο* $\bigcap\{F : F \supseteq A$ *και* F *κλειστό*$\}$ *λέγεται **κλειστότητα** (ή κλειστή θήκη) του* A *και συμβολίζεται με* $\overline{A}$ *ή με* $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}} A$.

Παρατήρηση 1.2.8. *Το* $\overline{A}$ *είναι κλειστό σύνολο, περιέχει το* A *και είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το* A.

Πρόταση 1.2.9. *Έστω* $(X,\mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος. Τότε για κάθε* $A, B \subseteq X$:

(i) $\overline{A} \supseteq A$

(ii) A *κλειστό* $\Longleftrightarrow \overline{A} = A$

(iii) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

(iv) *Αν* $A \subseteq B$, *τότε* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

(v) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Απόδειξη: Όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 1.2.6.

Παραδείγματα 1.2.10. *(α) Αν* $(X,\mathcal{T})$ *είναι ο διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε* $\overline{A} = A = A^\circ \ \forall A \subseteq X$.

(β) Αν $(X,\mathcal{T})$ *είναι ο τετριμμένος τοπολογικός χώρος, τότε*

$$A^\circ = \begin{cases} \emptyset, & A \neq X \\ X, & A = X \end{cases}, \qquad \overline{A} = \begin{cases} \emptyset, & A = \emptyset \\ X, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

(γ) Αν $(X,\mathcal{T})$ *έχει την συμπεπερασμένη τοπολογία, τότε*

$$A^\circ = \begin{cases} A, & \text{αν } A^c \text{ πεπερασμένο} \\ \emptyset & \text{αν } A^c \text{ άπειρο} \end{cases}, \qquad \overline{A} = \begin{cases} A, & \text{αν } A \text{ πεπερασμένο} \\ X, & \text{αν } A \text{ άπειρο} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις 1.2.11. *(α) Η ιδιότητα (v) του εσωτερικού και της κλειστότητας γενικεύεται με επαγωγή, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$, *ως εξής:*

$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ \cap \ldots \cap A_n^\circ \ \text{ και } \ \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$$

Όμως οι σχέσεις αυτές δεν ισχύουν για άπειρες τομές και ενώσεις. Για παράδειγμα στο $\mathbb{R}$ *έχουμε:*

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)^\circ = \{0\}^\circ = \emptyset \ \text{ ενώ } \ \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)^\circ = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

Άρα

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)^\circ \subsetneq \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)^\circ .$$

Ανάλογα

$$\overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\right)} = \overline{[0,1)} = [0,1] \ \text{ ενώ } \ \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{\left[0,1-\frac{1}{n}\right]} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,1-\frac{1}{n}\right] = [0,1).$$

Άρα

$$\overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\right)} \supsetneq \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{\left[0,1-\frac{1}{n}\right]}$$

(β) Δεν ισχύουν γενικά: $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$. *Για παράδειγμα στο* $\mathbb{R}$, *αν* $A = \mathbb{Q}$ *και* $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *έχουμε:*

$$\begin{array}{lcl} (A \cup B)^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R} & \text{και} & A^\circ \cup B^\circ = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \\ \overline{(A \cap B)} = \overline{\emptyset} = \emptyset & \text{και} & \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \end{array}$$

Πρόταση 1.2.12. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος και* $A \subseteq X$. *Τότε*

(i) $X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}$ *ή ισοδύναμα,* $A^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$.

(ii) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$ *ή ισοδύναμα,* $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$.

Απόδειξη: (i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} X \setminus A^\circ &= X \setminus \bigcup \{G \subseteq X : G \text{ ανοικτό}, G \subseteq A\} \\ &= \bigcap \{X \setminus G \subseteq X : G \text{ ανοικτό}, G \subseteq A\} \\ &= \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ κλειστό}, X \setminus A \subseteq F\} \\ &= \overline{(X \setminus A)} \end{aligned}$$

(ii) Από (i), θέτοντας $X \setminus A$ στη θέση του A, έχουμε:

$$X \setminus (X \setminus A)^\circ = \overline{(X \setminus (X \setminus A))} = \overline{A}$$

Άρα $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.

Πρόταση 1.2.13. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *τοπολογικός χώρος,* $A \subseteq X$ *και* $x \in X$. *Τότε*

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow G \cap A \neq \emptyset \quad \forall G \in \mathcal{T} : x \in G.$$

Απόδειξη: Από Πρόταση 1.2.12 (ii), έχουμε:

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin (X \setminus A)^\circ = \bigcup \{G \subseteq X, G \text{ ανοικτό και } G \subseteq X \setminus A\} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall G \in \mathcal{T} \text{ με } G \subseteq X \setminus A \text{ ισχύει } x \notin G \\ &\Leftrightarrow \quad \forall G \in \mathcal{T} \text{ με } x \in G \text{ ισχύει } G \nsubseteq X \setminus A, \text{ δηλαδή } G \cap A \neq \emptyset \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.2.14. *Αν* $\mathfrak{B}$ *είναι βάση για την* $\mathcal{T}$, *τότε η ισοδυναμία της Πρότασης 1.2.13 αναδιατυπώνεται ως εξής:*

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow B \cap A \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathfrak{B} : x \in B.$$

Παράδειγμα 1.2.15. *Στον* $\mathbb{R}_S$, $\overline{(a,b)} = (a,b]$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ *με* $a < b$. *Πράγματι,* $(a,b) \subseteq \overline{(a,b)}$ *και για* $x \in \mathbb{R} \setminus (a,b)$

- *αν* $x \leq a$, *τότε για* $B = (x-1, x] \in \mathfrak{B}$ *έχουμε* $B \cap (a,b) = \emptyset$. *Άρα* $x \notin \overline{(a,b)}$.
- *αν* $x > b$, *τότε για* $B = (b, x] \in \mathfrak{B}$ *έχουμε* $B \cap (a,b) = \emptyset$. *Άρα* $x \notin \overline{(a,b)}$.
- *αν* $x = b$ *και* $B \in \mathfrak{B}$ *με* $x \in B$, *τότε* $B \cap (a,b) \neq \emptyset$. *Άρα* $x \in \overline{(a,b)}$.

(όπου $\mathfrak{B}$ *η συνήθης βάση του* $\mathbb{R}_S$*)*

Ορισμός 1.2.16. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $D \subseteq X$. Το D λέγεται* ***πυκνό στο*** *X (ή πυκνό υποσύνολο του X) αν $\overline{D} = X$.*

Παρατήρηση 1.2.17. *Από την Πρόταση 1.2.13, ένα υποσύνολο D είναι πυκνό αν και μόνο αν $G \cap D \neq \emptyset\ \forall G \in \mathcal{T},\ G \neq \emptyset$. Αντίστοιχα, αν $\mathfrak{B}$ είναι μία βάση για την $\mathcal{T}$, τότε το D είναι πυκνό αν και μόνο αν $B \cap D \neq \emptyset\ \forall B \in \mathfrak{B},\ B \neq \emptyset$.*

Παραδείγματα 1.2.18. *(α) Αν $(X,\mathcal{T})$ είναι ο τετριμμένος τοπολογικός χώρος, τότε κάθε μη κενό $D \subseteq X$ είναι πυκνό.*

(β) Αν $(X,\mathcal{T})$ είναι ο διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε ένα $D \subseteq X$ είναι πυκνό στο X αν και μόνο αν $D = X$, αφού $\{x\} \in \mathcal{T}\ \forall x \in X$.

(γ) Αν $(X,\mathcal{T})$ έχει την τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου x_0, τότε το $\{x_0\}$ είναι πυκνό στο X.

(δ) Στον $\mathbb{R}_S$ το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό, διότι $\mathbb{Q} \cap (a,b] \neq \emptyset$ για κάθε $a,b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

Ορισμός 1.2.19. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x καλείται* ***σημείο συσσώρευσης του*** *A αν για κάθε $G \in \mathcal{T}$ με $x \in G$ ισχύει ότι $A \cap G \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Συμβολίζουμε με A' το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A. Το A' καλείται* ***παράγωγο σύνολο του*** *A. Κάθε σημείο του A που δεν είναι σημείο συσσώρευσης, καλείται* ***μεμονωμένο σημείο του*** *A.*

Παρατήρηση 1.2.20. *Ένα στοιχείο x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Πράγματι, από την Πρόταση 1.2.13 έχουμε ότι $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο G με $x \in G$ ισχύει $(A \setminus \{x\}) \cap G \neq \emptyset$, δηλαδή $A \cap G \setminus \{x\} \neq \emptyset$.*

Παραδείγματα 1.2.21. *(α) Αν $(X,\mathcal{T})$ είναι ο διακριτός τοπολογικός χώρος, τότε $A' = \emptyset$ για κάθε $A \subseteq X$ (παίρνουμε $G = \{x\}$ στον ορισμό). Δηλαδή κάθε σημείο του A είναι μεμονωμένο.*

(β) Αν $(X,\mathcal{T})$ έχει την τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου x_0, τότε $\{x_0\}' = X \setminus \{x_0\}$. Πράγματι, $x_0 \notin \{x_0\}'$ αφού $\overline{\{x_0\} \setminus \{x_0\}} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, άρα $x_0 \notin \overline{\{x_0\} \setminus \{x_0\}}$. Επίσης, αν $x \in X \setminus \{x_0\}$, τότε $x_0 \in \{x_0\}'$ αφού $\overline{\{x_0\} \setminus \{x\}} = \overline{\{x_0\}} = X$, άρα $x \in \overline{\{x_0\} \setminus \{x\}}$.

Πρόταση 1.2.22. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε*

(i) $\overline{A} = A' \cup A$

(ii) A *κλειστό αν και μόνο αν* $A' \subseteq A$

Απόδειξη: (i) Έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{rl} A \subseteq \overline{A} & \text{(Πρόταση 1.2.9)} \\ A' \subseteq \overline{A} & \text{(Πρόταση 1.2.13)} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \cup A' \subseteq \overline{A}.$$

Για την αντίστροφη σχέση, αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{A} \setminus A \subseteq A'$. Έστω $x \in \overline{A} \setminus A$ και $G \in \mathcal{T}$ με $x \in G$. Αφού $x \in \overline{A}$, έχουμε $A \cap G \neq \emptyset$ (Πρόταση 1.2.13). Αφού $x \notin A$, έχουμε $(A \setminus \{x\}) \cap G \neq \emptyset$. Επομένως $x \in A'$.

(ii) Άμεσο από (i).

Ορισμός 1.2.23. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το σύνολο $\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ καλείται* ***σύνορο*** *του A και συμβολίζεται με BdA.*

Παρατήρηση 1.2.24. *Το σύνορο ενός συνόλου είναι κλειστό σύνολο, ως τομή κλειστών συνόλων. Επιπλέον ισχύει ότι Bd$A =$ BdA^c $\forall A \subseteq X$, δηλαδή κάθε σύνολο έχει το ίδιο σύνορο με το συμπλήρωμά του.*

Πρόταση 1.2.25. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε*

(i) Bd$A = \overline{A} \setminus A^\circ$

(ii) Bd$A \cap A^\circ = \emptyset$

(iii) $\overline{A} =$ Bd$A \cup A^\circ$

(iv) *Τα σύνολα $A^\circ, (X \setminus A)^\circ,$ BdA διαμερίζουν το X.*

Απόδειξη: (i) Bd$A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \overline{A} \setminus A^\circ$.

(ii) Bd$A \cap A^\circ = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} \cap (X \setminus \overline{(X \setminus A)}) = \emptyset$.

(iii) Bd$A \cup A^\circ = A^\circ \cup (\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}) = A^\circ \cup (\overline{A} \cap (X \setminus A^\circ)) = \overline{A}$.

(iv) Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} A^\circ \cup \text{Bd A} \cup (X \setminus A)^\circ &= A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ \cup (\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}) \\ &= A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ \cup (\overline{A} \cap (X \setminus A^\circ)) \\ &= \overline{A} \cup (X \setminus \overline{A}) \\ &= X \end{aligned}$$

Επιπλέον, $A^\circ \cap (X \setminus A)^\circ \subseteq A \cap (X \setminus A) = \emptyset$, $A^\circ \cap$ Bd$A = \emptyset$ (από τη (ii)) και $(X \setminus A)^\circ \cap$ Bd$A =$ $(X \setminus A)^\circ \cap$ Bd$(X \setminus A) = \emptyset$.

Πρόταση 1.2.26. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Τότε*

(i) Bd$(\emptyset) = \emptyset$

(ii) Bd$A =$ Bd(A^c)

(iii) Bd$($Bd$A) \subseteq$ BdA

(iv) $A \cap B \cap$ Bd$(A \cap B) = A \cap B \cap (BdA \cup$ Bd$B)$

(v) *Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A \cap$ Bd$A = \emptyset$*

(vi) *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν Bd$A \subseteq A$*

Απόδειξη: Αφήνεται ως άσκηση.