Βασική άλγεβρα

Παρασκευή 10/10/2014

Δακτύλιοι

Ορισμός Ένα μη-κενό σύνολο Δ ονομάζεται Δακτύλιος (ring) εάν στο Δ ορίζονται δύο πράξεις

$(((3+5)+8)+9)$ $3\cdot 5\cdot 8$

$$\Delta\times\Delta \xrightarrow{+} \Delta,\quad (\alpha,\beta)\longmapsto \alpha+\beta$$
$$\Delta\times\Delta \xrightarrow{\cdot} \Delta,\quad (\alpha,\beta)\longmapsto \alpha\cdot\beta$$

με τις ιδιότητες:

1) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ προσετ.
2) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (μεταθετική)
3) Υπάρχει στο Δ ένα στοιχείο το 0 το λέμε μηδενικό στοιχείο με $x+0=0+x = x,\ \forall x\in\Delta$
4) Για κάθε $x\in\Delta$ υπάρχει $y\in\Delta$ με $x+y=y+x=0$. Το y το λέμε αντίθετο του x και το συμβολ. $-x$.
5) $(x+y)z=xz+yz\ \forall x,y,z$ (επιμεριστική)
6) $x(y+z)=xy+yz$
7) $(xy)z=x(yz)$

Σημ1 Αν επιπλέον $xy=yx\ \forall x,y\in\Delta$ τότε ο δακτύλιος Δ λέγεται μεταθετικός δακτύλιος.

Σημ2 Αν επιπλέον $\exists$ στοιχείο $w\in\Delta$ με $w\cdot x=x\cdot w=x\ \forall x$ τότε λέμε ότι ο δακτύλιος έχει μοναδιαίο στοιχείο το $w=1_\Delta$ ή 1 και το λέμε μοναδιαίο στοιχείο.

Παραδείγματα $(\mathbb{R}^{2\times 2},+,\cdot)$

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_v,+,\cdot)$

$(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ $(2\mathbb{Z}=\{0,\pm 2,\pm 4,\dots\})$

Κύρια θέματα στους δακτυλίους είναι: υποδακτύλιοι, ιδεώδη, ισομορφισμοί δακτ.

Ορισμός 1 Έστω Δ δακτύλιος. Το υποσύνολο A ονομάζεται υποδακτύλιος του Δ συμβ. $A\leqslant\Delta$ εάν

i) η υπόθεση $x,y\in A$ συνεπάγεται $x+y\in A$
ii) $0\in A$
iii) αν $x\in A, y\in A$ τότε $x\cdot y\in A$

Ορισμός 2 Το υποσύνολο I του δακτυλίου Δ ονομάζεται ιδεώδες (ideal) του Δ συμβ. $I\lhd\Delta$ εάν

i) $0\in I$
ii) η υπόθεση $x\in I, y\in I$ οδηγεί $x-y\in I$
iii) έστω $x\in I$ τότε $yx\in I$, $xy\in I\ \forall y\in\Delta$

Ορισμός 3 Δύο δακτύλιοι Δ_1,Δ_2 λέγονται ισόμορφοι συμβ. $\Delta_1\cong\Delta_2$ εάν υπάρχει $\theta:\Delta_1\to\Delta_2$ με θ 1-1, θ επί

$\theta(\alpha+\beta)=\theta(\alpha)+\theta(\beta)$
$\theta(\alpha\beta)=\theta(\alpha)\theta(\beta)$ $\forall\alpha,\beta\in\Delta$,

Ασκήσεις 1) Να βρεθούν τα ιδεώδη του δακτυλίου $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

$I=\mathbb{Z}$

Λύση Έστω $I\lhd\mathbb{Z}$

$I=\{0\}$ δεκτό είναι ιδεώδη.

$I\neq\{0\}$ άρα $\exists\alpha\in I,\ \alpha\neq 0$

Βρίσκουμε ότι το I έχει και θετικά στοιχεία

έστω v ο ελάχιστος θετικός $v\neq 0$, $v\in I$

Ισχυρ. $I=\{\lambda\cdot v,\lambda\in\mathbb{Z}\}$

η σχέση $\{\lambda\cdot v,\lambda\in\mathbb{Z}\}\subseteq I$ προφαν.

υποθ. $\alpha\in I$, $\alpha\nmid v$, $\alpha=\Pi\cdot v+u$, $0\leqslant u<v$

$u=0$ δεκτό

$u\neq 0$ άτοπ.

$u=\underset{I}{\alpha}-\underset{I}{\Pi\cdot v}$

$\Longrightarrow I\subseteq\{\lambda\cdot v,\lambda\in\mathbb{Z}\}$

Τελικά $I=\{\lambda\cdot v,\lambda\in\mathbb{Z}\}$

Άσκηση Να βρεθούν τα ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{R}[x]$ (των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές)

Λύση Έστω $I \triangleleft \mathbb{R}[x]$.

$I = \{\mathbb{O}, \mathbb{O}(x) = 0 \ \forall x\}$

$I \neq \{\mathbb{O}\} \Rightarrow \exists f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $f(x) \in I$, $f(x) \neq \mathbb{O}$

Επιλέγουμε μέσα στο I, ένα πολ. $d(x)$ ελαχίστου βαθμού

Ισχυρισμός $\boxed{I = \{d(x)\cdot\pi(x), \pi(x) \in \mathbb{R}[x]\}}$

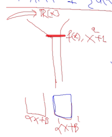
Έχουμε αρχικά ότι $\{d(x)\cdot\pi(x) \mid \pi(x) \in \mathbb{R}[x]\} \subseteq I$

αν $\alpha(x) \in I$ $\quad \alpha(x) \mid d(x)$ $\quad \alpha(x) = d(x)\cdot g(x) + u(x)$

$u(x) = 0 \ \forall x$ δεκτό

$u(x) \neq 0 \Rightarrow u(x) = \underbrace{\alpha(x)}_{I} - \underbrace{d(x)\cdot g(x)}_{I}$ αδύνατο.

Τελικά $I = \{d(x)\cdot\pi(x) \mid \pi(x) \in \mathbb{R}[x]\}$



$$Y = \{\alpha x + \beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$(\alpha x + \beta) + (\gamma x + \delta) = (\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)$

$(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) = \alpha\gamma x^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)x + \beta\delta$

$\equiv (\alpha\delta + \beta\gamma)x + (\beta\delta - \alpha\gamma)$

$\cancel{\alpha\gamma x^2} + (\alpha\delta + \beta\gamma)x + \beta\delta \mid x^2 + 1$

$\cancel{-\alpha\gamma x^2} - \alpha\gamma \quad \mid \alpha\gamma$

$(\alpha\delta + \beta\gamma)x + (\beta\delta - \alpha\gamma)$

$$\left\{\begin{array}{l} (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) \\ (\alpha, \beta)\cdot(\gamma, \delta) = (\alpha\delta + \beta\gamma, \beta\delta - \alpha\gamma) \end{array}\right\}$$

$\mathbb{R}^2$

Κατασκευάσαμε τον δακτύλιο των μιγαδικών

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Άσκηση Να βρεθούν τα ιδεώδη του Δακτυλίου των πινάκων $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$

Λύση $I \triangleleft \mathbb{R}^{2\times 2}$

$I = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$I \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ τότε $\exists \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{A} \in I$

έτσι ώστε ή $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ ή $\gamma \neq 0$ ή $\delta \neq 0$

άρα $\operatorname{rank} A$ 1 / 2

2 τότε ο πίνακας A είναι αντιστρ.

άρα $\exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}A \in I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in A$

Όμως στην περίπτωση αυτή κάθε πίνακας

$B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ γράφεται $B = B\cdot \underbrace{I_2}_{I} = B \in I$

άρα $I = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\operatorname{rank}(A) = 1$ $\quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

γνωρίζουμε (Γραμμ. Αλγ.) ότι $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$

άρα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ τότε $P' \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{I} Q' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Τελικά ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in I \Rightarrow I = \mathbb{R}^{2\times 2}$

Για το σπίτι: Να βρεθούν τα ιδεώδη του $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Για το δρόμο " " " " $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

επίσης $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ ιδεώδη;