S.O.S.

3. Άσκηση

X διακριτή κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας $P(X=i)=c(1+i)$

$i=0,1,\dots,n$

(i) $c=$;

(ii) $E[X]=$;

(iii) $Var[X]=$;

(iv) $P(X=1 \mid X\leq 2)=$;

(i) $$\sum_{i=0}^{n} P(X=i)=1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c(1+i)=1 \Rightarrow c\sum_{i=0}^{n}(1+i)=1$$

$$\Rightarrow c\left(n+1+\sum_{i=0}^{n} i\right)=1$$

$$\Rightarrow c\left(n+1+\frac{n(n+1)}{2}\right)=1$$

$$\Rightarrow c(n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right)=1$$

$$\Rightarrow c=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

(ii) $$E[X]=\sum iP(X=i)=\sum_{i=0}^{n} i\,\frac{2(i+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{i=0}^{n} i^2+\sum_{i=0}^{n} i\right)$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

(iii) $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

↳ γνωστό από το (ii)

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{n} i^2 \frac{2(i+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{i=0}^{n} i^3 + \sum_{i=0}^{n} i^2 \right) = \ldots$$

$\sum_{i=0}^{n} i^2 \rightarrow \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$\sum_{i=0}^{n} i^3 \rightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(iv) $$P(X=1 \mid X \leq 2) = \frac{P(X=1, X\leq 2)}{P(X\leq 2)} = \frac{P(X=1)}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)}$$

$$= \frac{\frac{2(1+1)}{(n+1)(n+2)}}{\frac{2}{(n+1)(n+2)}(0+1+1+1+2+1)}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4. Άσκηση

Εταιρεία κατασκευής λαμπτήρων
P(ελαττωματικός λαμπτήρας) = 1%

Συσκευασία 10 λαμπτήρων.
Αν μια συσκευασία περιέχει περισσότερους από 1 ελαττωματικούς λαμπτήρες τότε αντικαθίσταται.

Ποσοστό των συσκευασιών που θα αντικατασταθούν

⇓

Πιθανότητα μια συσκευασία να αντικατασταθεί

⇓

Πιθανότητα σε 10 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli να έχω τουλάχιστον 2 επιτυχίες.

(λαμπτήρας → ελαττωματικός επιτυχία
→ όχι ελαττωματικός αποτυχία

$X = \#$ ελαττωματικών σε μια συσκευασία $\sim Bin(10, 0.01)$

$$\sum_{i=2}^{10} \binom{10}{i} 0.01^i \cdot 0.99^{10-i} = 1 - 0.99^{10} - 10 \cdot 0.01 \cdot 0.99^9$$

συμπληρωματικό

5. Άσκηση

Κινητήρες που χρησιμοποιούνται σε 2-κινητήρια ή σε 4-κινητήρια αεροσκάφη

Πιθανότητα βλάβης κινητήρα κατά την πτήση $= p$
Το αεροπλάνο δεν πέφτει όταν λειτουργούν πάνω από τους μισούς κινητήρες → ($\geq$)

Ποιο είναι πιο ασφαλές: ένα 2-κινητήριο ή ένα 4-κινητήριο

$P_{2\text{-πτώσης}} = P(\#$ λειτουργούντων κινητήρων να είναι μικρότερος του 1) → X_2

$$Bin(2, 1-p) = P(X_2 = 0) = \binom{2}{0}(1-p)^0 p^{2-0}$$
$$= p^2$$

$P_{4\text{-πτώσης}} = P(\#$λειτουργούντων κινητήρων να είναι μικρότερος του 2) → $X_4 \leq 1$

$$Bin(4, 1-p) = P(X_4 = 0) = \binom{4}{0}(1-p)^0 p^4 + \binom{4}{1}(1-p)^1 \cdot p^3$$
$$= p^4 + 4(1-p)p^3$$

Το 2-κινητήριο είναι πιο ασφαλές απ' το 4-κινητήριο $\iff$

$P_{4-\text{πτώσης}} > P_{2-\text{πτώσης}} \iff p^4 + 4(1-p)p^3 > p^2$

$$\iff p^2 + 4(1-p)p > 1$$
$$\iff p^2 + 4p - 4p^2 - 1 > 0$$
$$\iff \frac{1}{3} < p < 1$$

6. Ασκηση

Εχουμε N πούλμαν χωρητικότητας από 1 εως m.
N_i = # πούλμαν χωρητικότητας i

$\sum_{i=1}^{m} N_i = N \rightarrow$ συνολικό πλήθος πούλμαν

Πείραμα Τύχης 1: Διαλέγω τυχαία οδηγό.

$P_1(i) = P($ο οδηγός είναι σε πούλμαν μεγέθους $i)$

Πείραμα Τύχης 2: Διαλέγω τυχαία άνθρωπο.

$P_2(i) = P($ο άνθρωπος είναι σε πούλμαν μεγέθους $i)$.

$P_1(i) = \frac{N_i}{N} \rightarrow$ ποσοστό των πούλμαν μεγέθους i

ή

$= \frac{N_i}{\sum_{i=1}^{m} N_i}$ Πιθανότητα ένα πούλμαν να έχει μέγεθος i

$P_2(i) = \frac{i N_i}{\sum_{i=1}^{m} i N_i}$