

Δεσμευμένη πιθανότητα και ανεξαρτησία

Ασκήσεις

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

29 Μαρτίου 2010

Άσκηση 1: Θεωρούμε 3 κάλπες. Η κάλπη A περιέχει 2 λευκά και 4 κόκκινα σφαιρίδια, η κάλπη B περιέχει 8 λευκά και 4 κόκκινα σφαιρίδια και η κάλπη C περιέχει 1 λευκό και 3 κόκκινα σφαιρίδια. Επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο από κάθε κάλπη. Ποια είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε από την κάλπη A να είναι λευκό, δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι ακριβώς δυο από τα τρία επιλεγθέντα σφαιρίδια ήταν λευκά.

Άσκηση 2: Σε μια γειτονιά, το 36% των οικογενειών έχουν σκύλο και το 22% των οικογενειών που έχουν σκύλο έχει επιπλέον και γάτα. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το 30% των οικογενειών της γειτονιάς έχει γάτα.

1. Ποιά είναι η πιθανότητα μια οικογένεια της γειτονιάς να έχει και σκύλο και γάτα;
2. Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα μια οικογένεια της γειτονιάς να έχει σκύλο δεδομένου ότι έχει γάτα;

Άσκηση 3: Θεωρούμε δυο κάλπες I και II . Η κάλπη I περιέχει 2 λευκά και 4 κόκκινα σφαιρίδια, ενώ η κάλπη II περιέχει 1 λευκό και 1 κόκκινο σφαιρίδιο. Επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα σφαιρίδια της κάλπης I και το τοποθετούμε στην κάλπη II . Κατόπιν επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα σφαιρίδια της κάλπης II .

1. Ποια είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε από την κάλπη II να είναι λευκό;
2. Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα το σφαιρίδιο που μεταφέρθηκε από την κάλπη I στην κάλπη II να ήταν λευκό, δεδομένου ότι από την κάλπη II επιλέχθηκε λευκό σφαιρίδιο;

Άσκηση 4: Η αγγλική και η αμερικάνικη ορθογραφία της λέξης 'ρίγκορ' (αυστηρότητα) είναι 'rigour' και 'rigor' αντίστοιχα. Σε ένα ξενοδοχείο μένουν 40 Άγγλοι και 60 Αμερικάνοι. Από αυτούς επιλέγεται τυχαία ένας και του ζητείται να γράψει τη λέξη 'ρίγκορ'. Κατόπιν από τα γράμματα της λέξης που γράφει επιλέγεται ένα στην τύχη. Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ο άνθρωπος που επιλέχθηκε να είναι Άγγλος, δεδομένου ότι το γράμμα που επιλέχθηκε στην τύχη ήταν φωνήεν;

Άσκηση 5: Θεωρούμε 2 κάλπες A και B . Η κάλπη A έχει 5 λευκά και 7 μαύρα σφαιρίδια, ενώ η κάλπη B έχει 3 λευκά και 12 μαύρα σφαιρίδια. Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι κορώνα τότε επιλέγεται ένα σφαιρίδιο από την κάλπη A ενώ αν είναι γράμματα τότε επιλέγεται ένα σφαιρίδιο από την κάλπη B . Ποιά η δεσμευμένη πιθανότητα το νόμισμα να έφερε γράμματα, δεδομένου ότι το σφαιρίδιο που επιλέχθηκε είναι λευκό;

Άσκηση 6: Οι παίχτες A και B παίζουν μια σειρά παιχνιδιών. Σε κάθε παιχνίδι, η πιθανότητα να κερδίσει ο A είναι p και η πιθανότητα να κερδίσει ο B είναι $1 - p$. Το παιχνίδι σταματά την πρώτη φορά που κάποιος από τους δυο παίχτες έχει πάρει προβάδισμα 2 νικών και ο παίχτης αυτός ανακηρύσσεται νικητής του αγώνα.

1. Βρείτε την πιθανότητα ο αγώνας να διαρκέσει 4 παιχνίδια.
2. Βρείτε την πιθανότητα ο A να είναι ο νικητής του αγώνα.

Άσκηση 7: Έστω το σύνολο $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Επιλέγουμε εντελώς τυχαία και ανεξάρτητα δυο υποσύνολα A και B του S (δηλαδή όλα τα 2^n υποσύνολα του S , συμπεριλαμβανομένου του \emptyset και του S είναι εξίσου πιθανά).

1. Βρείτε την πιθανότητα $P(A \subseteq B)$.
2. Βρείτε την πιθανότητα $P(AB = \emptyset)$.

Άσκηση 8: Θεωρούμε ένα επαναλαμβανόμενο πείραμα τύχης το οποίο σε κάθε επανάληψή του έχει πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας $1 - p$ (ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli). Έστω P_n η πιθανότητα σε n επαναλήψεις του πειράματος να έχει σημειωθεί άρτιος αριθμός επιτυχιών (δηλαδή $0, 2, 4, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ επιτυχίες). Αποδείξτε ότι

1. $P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1}, \quad n \geq 1,$
2. $P_n = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}.$

Άσκηση 9: Ένα δίκαιο νόμισμα ρίπτεται 3 φορές. Γνωρίζουμε ότι μια τουλάχιστον από τις ρίψεις ήταν κορώνα. Ποια είναι τότε η πιθανότητα τουλάχιστον μια από τις άλλες ρίψεις να ήταν επίσης κορώνα;

Άσκηση 10: Οι εμπειρογνώμονες πιστεύουν ότι ένα ναυάγιο βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη θαλάσσια περιοχή με πιθανότητα $p = 0.4$. Αν το ναυάγιο βρίσκεται στη συγκεκριμένη περιοχή, τότε η αναζήτηση στην περιοχή θα το εντοπίσει με πιθανότητα $d = 0.9$. Ποια είναι η πιθανότητα το ναυάγιο να βρίσκεται στη συγκεκριμένη περιοχή αν μετά την αναζήτηση το ναυάγιο δεν εντοπίστηκε στην περιοχή αυτή;