ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΙΟΥΝΙΟΣ 2010 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1. (3 βαθμοί) Παρατηρούμε τις διαδοχικές ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος που φέρνει την ένδειξη 'Κ' με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και την ένδειξη 'Γ' με πιθανότητα $\frac{2}{3}$. Να υπολογιστούν:
(α) η πιθανότητα στις πρώτες 5 ρίψεις να εμφανιστούν 3 'Κ' και 2 'Γ',
(β) η δεσμευμένη πιθανότητα η πρώτη ρίψη να είναι 'Κ' δεδομένου ότι στις πρώτες 5 ρίψεις εμφανίστηκαν 3 'Κ' και 2 'Γ',
(γ) ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν δυο συνεχόμενες 'Κ'.

Θέμα 2. (3 βαθμοί) Από μια κάλπη, που περιέχει 50 διακριμένα σφαιρίδια που φέρουν τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 50$, επιλέγεται τυχαία ένα σφαιρίδιο. Έστω N η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στον αριθμό του σφαιριδίου που επιλέχθηκε. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι N φορές, δηλάδη όσες φορές δείχνει ο αριθμός του σφαιριδίου που επιλέχθηκε. Οι διαδοχικές ρίψεις του ζαριού θεωρούνται ανεξάρτητες. Έστω X το πλήθος των ρίψεων στις οποίες το ζάρι εμφάνισε την ένδειξη '6'. Να υπολογιστούν:
(α) η πιθανότητα $P(N = n, X = x)$, $n = 1, 2, \ldots, 50$ και $x = 0, 1, 2, \ldots, n$,
(β) η πιθανότητα $P(X = 0)$,
(γ) η δεσμευμένη πιθανότητα $P(N = n|X = 0)$, $n = 1, 2, \ldots, 50$,
(δ) η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|N = n]$, $n = 1, 2, \ldots, 50$,
(ε) η μέση τιμή $E[X]$.

Θέμα 3. (3 βαθμοί) Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(3x^2 + 2y) & \text{αν } 0 \le x \le 1 \text{ και } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν:
(α) η σταθερά c,
(β) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των X και Y,
(γ) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ της X δοθέντος ότι $Y = y$,
(δ) η πιθανότητα $P(X < Y)$,
(ε) η μέση τιμή $E[3X + 5]$.

Θέμα 4. (3 βαθμοί) Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο 2, δηλαδή έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η N είναι ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$ και έχει τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{1}{3}$ δηλαδή συνάρτηση πιθανότητας

$$p_N(n) = P(N = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της X_i, $i = 1, 2, \ldots$.
(β) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ και να βρεθεί τί κατανομή ακολουθεί η S_N.
(γ) Έστω $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ Να υπολογιστεί προσεγγιστικά, με χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος, η πιθανότητα $P(S_{100} \ge 50)$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 $\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!
Ο τελικός βαθμός υπολογίζεται ως το $\min($άθροισμα βαθμών θεμάτων$, 10)$.