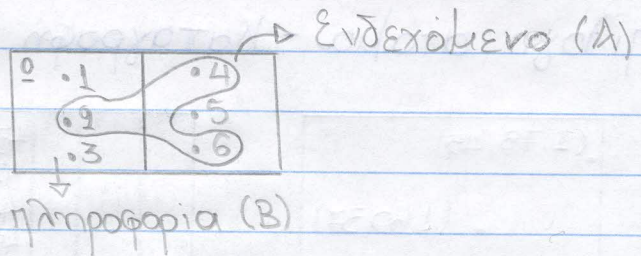


25/9/13

Δεδομένην Πιθανότητα

1. Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης: Ριγν γαριού
 $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$



$P(\text{άρτιος}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\text{άρτιος} | \leq 3) = \frac{1}{3}$

$P(A|B) = \frac{\text{πληθος δειγματικων Γηκειων στο AB}}{\text{πληθος δειγματικων Γηκειων στο B}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$

► Περιορισμος δειγματικου χωρου

2. Ορισμος

$(\Omega, A, P) \rightarrow$ χωρος πιθανοτητας

Δεδομένην πιθανότητα του δεδομένου του B: οιδάτα

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

3. Παράδειγμα

Πείραμα τύχης πεπερασμένου πληθους N ατόμων.

Επιλογή ατόμου - καταγραφή ύψους - ναυμερο γαηηηουττου

(1.78, 45)				43
				42
(1.60, 37)				44
				45
				⋮

↑
ύψος 1.80

$\rightarrow P(\text{ναυμερο } 45 / \text{ύψος } 1.80) = ?$
 " " " " " "

$\frac{\# \text{ ατόμων } (45, 1.80)}{\# \text{ ατόμων ύψους } 1.80}$

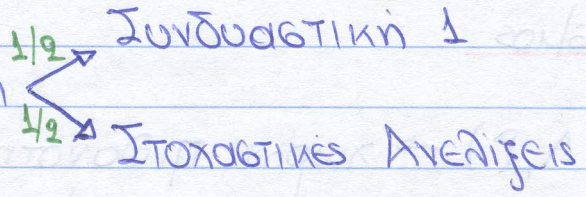
► $P(A|B) \neq P(B|A)$

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

4. Παράδειγμα

Φοιτητής θκέρφεται να δώσει



1^ο στάδιο: Ποιό μάθημα θα δώσει

$P(\text{να περάσει} / \text{δίνει Συνδυαστική}) = 60\%$

$P(\text{να περάσει} / \text{δίνει Στοχαστικές αναδίδεις}) = 80\%$

2^ο στάδιο: Πέρασε ή όχι

1^ο στάδιο

2^ο στάδιο

$P_1 = P(\text{να δώσει Συνδυαστική και να περάσει})$

$P_2 = P(\text{να περάσει}) \rightarrow 2^ο \text{στάδιο}$

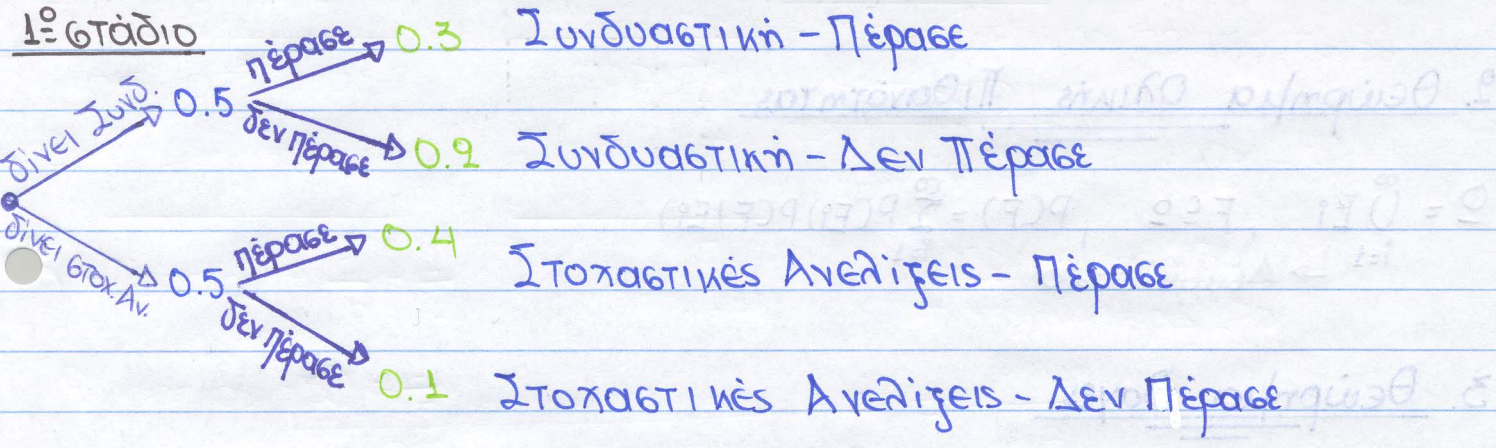
$P_3 = P(\text{να δώσει Συνδυαστική / να έχει περάσει})$

1^ο στάδιο

2^ο στάδιο

2^ο στάδιο

1^ο στάδιο



- A : δίνει Συνδυαστική
- A^c : δίνει Στοχαστικές Ανεπίρροες
- B : Περνάει
- B^c : Δεν περνάει

$P_1 = P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3$

$P_2 = P(B) = P(BA) + P(BA^c) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) = 0,7$

$P_3 = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$

$P(A) = P(A^c) = 0,5$

$P(B|A) = 0,6$

$P(B|A^c) = 0,8$

5. Βασικά Υπολογιστικά Θεωρήματα

1. Πολλαπλασιαστικός Νόμος

$$P(E_1 E_2 \dots E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_3 | E_1 E_2) \dots P(E_n | E_1 E_2 \dots E_{n-1})$$

2. Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, F \subseteq \Omega, P(F) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) P(F | E_i)$$

$i=1 \rightarrow$ Ασυμβίβαστα

3. Θεώρημα Bayes

$$P(E | F) = \frac{P(E) P(F | E)}{P(F)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: $P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ έχει νόημα μόνο για $P(B) \neq 0$.

6. Αποδείξεις

$$\begin{aligned} P(E_1 E_2 \dots E_n) &= P(E_1) \frac{P(E_2 E_1)}{P(E_1)} \cdot \frac{P(E_3 E_2 E_1)}{P(E_1 E_2)} \dots \frac{P(E_n \dots E_1)}{P(E_1 \dots E_{n-1})} \\ &= P(E_1) P(E_2 | E_1) P(E_3 | E_1 E_2) \dots P(E_n | E_1 E_2 \dots E_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap \Omega) = P(F \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \frac{P(F E_i)}{P(E_i)} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) P(F | E_i) \end{aligned}$$

$$P(E | F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{P(F | E) P(E)}{P(F)}$$

7. Παράδειγμα

Αιματολογικό τεστ για μια επώδυνη ασθένεια.

$$P(\text{ασθενής}) = 1\% = 0.001$$

$$P(\text{αληθές θετικό}) = 99\% = 0.99 \rightarrow P(\text{θετικό} / \text{ασθενής})$$

$$P(\text{ψευδές θετικό}) = 2\% = 0.02 \rightarrow P(\text{θετικό} / \text{υγιής})$$

Τι ενδιαφέρει όμως;

$$P(\text{ασθενής} / \text{θετικό}) = \frac{P(\text{ασθενής}) P(\text{θετικό} / \text{ασθενής})}{P(\text{θετικό})}$$

$$\begin{aligned} P(\text{θετικό}) &= P(\text{ασθενής}) P(\text{θετικό} / \text{ασθενής}) + P(\text{υγιής}) P(\text{θετικό} / \text{υγιής}) \\ &= 0.001 \cdot 0.99 + 0.999 \cdot 0.02 \end{aligned}$$

$$P(\text{ασθενής}) P(\text{θετικό} / \text{ασθενής}) = 0.001 \cdot 0.99$$

$$P(\text{ασθενής} / \text{θετικό}) = \frac{99}{99 + 1998} = 0.0479 \approx 4\%$$

4/3/13

Στοχαστική Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

1. Ίδια

$P(E|F)$, E, F : ανεξαρτησία $\Leftrightarrow P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} = P(F)$

↑ πληροφορία

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = P(E)$$

$$P(EF) = P(E) P(F)$$

2. Ορισμός

$E, F \subseteq \Omega$, ανεξαρτησία αν και μόνο αν $P(EF) = P(E) P(F)$

Γενικά, $E_1, E_2, \dots \subseteq \Omega$, ανεξαρτησία αν και μόνο αν $P(E_{i_1} E_{i_2} E_{i_3} \dots) = P(E_{i_1}) P(E_{i_2}) \dots P(E_{i_n})$

$\forall \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$

π.χ.

E, F, G : ανεξαρτησία $\Leftrightarrow P(EFG) = P(E) P(F) P(G)$

$P(EF) = P(E) P(F)$

$P(EG) = P(E) P(G)$

$P(FG) = P(F) P(G)$

3. Ασυμβασιμα / Ανεξαρτηνια

A, B : ασυμβασιμα $\Leftrightarrow AB = \emptyset$
 \Uparrow \Downarrow

A, B : ανεξαρτηνια $\Leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

A, B : ασυμβασιμα και ανεξαρτηνια $\Leftrightarrow 0 = P(AB) = P(A)P(B)$
 $\Rightarrow P(A) = 0$ η $P(B) = 0$

4. Παρατηρηση

- $E, A \cup B$: ανεξαρτηνια
- E, AB : ανεξαρτηνια
- E, A^c : ανεξαρτηνια
- $E, A^c B$: ανεξαρτηνια

η.χ.

$$\begin{aligned}
 P(E(A \cup B)) &= P(EA \cup EB) = P(EA) + P(EB) - P(EAB) \\
 &= P(E)P(A) + P(E)P(B) - P(E)P(A|E)P(B|E) \rightarrow P(E)P(AB) \\
 &= P(E) [P(A) + P(B) - P(AB)] \\
 &= P(E) \cdot P(A \cup B)
 \end{aligned}$$

5. Ανεξαρτησία ανά δύο

$E_1, E_2, \dots \subseteq \Omega$ λέγονται ανεξαρτησία ανά δύο $\Leftrightarrow P(E_i, E_j) = P(E_i)P(E_j)$
 $\forall i \neq j$

$E_1, E_2, \dots \subseteq \Omega$ ανεξαρτησία \Rightarrow ανεξαρτησία ανά δύο
 \nLeftarrow (όχι το ανάποδο)

6. (Αντι-)Παράδειγμα

Ρίψη 2 ζαριών
 $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\} \leftarrow 36$ στοιχεία

A: η πρώτη ζαριά να είναι 4.

B: η δεύτερη ζαριά να είναι 3.

Γ: το άθροισμα των ζαριών να είναι 7.

$\hookrightarrow \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \leftarrow 6$ στοιχεία

$P(A) = \frac{1}{6}$	$P(AB) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B)$	} A, B, Γ είναι ανά δύο <u>ανεξαρτησία</u>
$P(B) = \frac{1}{6}$	$P(AG) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(G)$	
$P(G) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$P(BG) = \frac{1}{36} = P(B) \cdot P(G)$	

$P(ABG) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(G) = \frac{1}{6^3}$

↓
A, B, Γ όχι ανεξαρτησία

Όμοια με πριν (όχι το Γ)

Δ: Το άθροισμα των ζαριών να είναι 5.

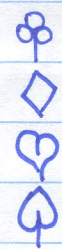
↳ $\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$ ← 4 στοιχεία

$$P(A \cap \Delta) = \frac{1}{36}, \quad P(A)P(\Delta) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{36} = \frac{1}{54} \Rightarrow P(A \cap \Delta) \neq P(A) \cdot P(\Delta)$$

Α, Δ όχι ανεξάρτητα

7. Παράδειγμα

Α 2 3 ... 10 J Q K



Α: Είναι ♠
B: Είναι K

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{13}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52} = P(A)P(B)$$

A, B ανεξάρτητα

Εναλλακτικά

Αν λείπει το 2 ♠

A, B → ανεξάρτητα;

$$P(A) = \frac{13}{51}, \quad P(B) = \frac{4}{51}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{51}$$

$P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \rightarrow A, B$ όχι ανεξάρτητα

8. Ανεξαρτησία Ενδεχομένων - Λόγος Πιθανογένεσης (odds)

odds του A = $\frac{P(A)}{P(A^c)}$

N. Bayes : $\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} \cdot \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)}$ \Leftrightarrow

odds του A μετά την παρατήρηση του E = αρχικά odds του A
" " "
 $\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)} = \frac{P(A)}{P(A^c)}$

Απόδειξη

$\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} \Rightarrow \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)} = 1$

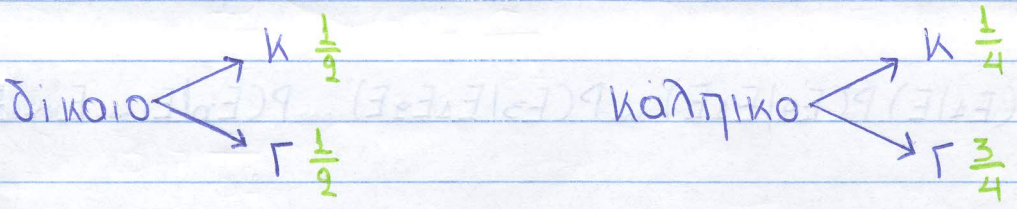
$\Rightarrow P(E|A) = P(E|A^c) \Rightarrow \frac{P(E|A)}{P(A)} = \frac{P(E|A^c)}{1-P(A)}$
 $\hookrightarrow P(A^c)$

$\Rightarrow P(E|A) = P(E|A)P(A) + P(E|A^c)P(A) = P(E)P(A)$

▶ Στην περίπτωση αυτή η συνεπαγωγικά πληθαίνει και αναπόδα (\Leftrightarrow)

9. Παράδειγμα

9 νομίσματα σε ένα συρτάρι



Πείραμα τυχής : 1^ο στάδιο : επιλογή νομίσματος
2^ο στάδιο : ριπή

odds να είναι κάληκο νόμισμα αν έφερε "κ" = 0

$$\text{odds "Το νόμισμα είναι κάληκο"} = \frac{P(\text{είναι κάληκο})}{P(\text{είναι δίκαιο})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{9}} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{odds "Το νόμισμα είναι κάληκο αφού έφερε "κ"} &= \frac{P(A|E)}{P(A^c|E)} \\ &= \frac{P(A)}{P(A^c)} \cdot \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

10. Η δεσμευμένη πιθανότητα ως νέο μέτρο πιθανότητας

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \leftarrow$ χώρος πιθανότητας
 $E \in \mathcal{A}, P(E) > 0$

$$P_E(A) = P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \quad \text{είναι μέτρο πιθανότητας}$$

► Όλες οι ιδιότητες για την $P(\cdot)$ ισχύουν και για την $P(\cdot|E)$

(i) $P(\Omega|E) = 1$

(ii) $A_1, A_2, \dots \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | E) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | E)$

↳ αλληλοαποκλειόμενα ανά δυο

(iii) $P(A \cup B | E) = P(A|E) + P(B|E) - P(AB|E)$

⋮

π.χ.

$$P(E_1 E_2 \dots E_n | E) = P(E_1 | E) P(E_2 | E_1 E) \dots P(E_3 | E_1 E_2 E) \dots P(E_n | E_1 \dots E_{n-1} E)$$

11. Παράδειγμα

3 κάρτες

M	M
---	---

,

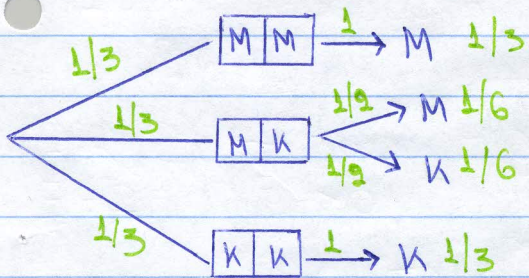
M	K
---	---

,

K	K
---	---

Πείραμα Τύχης: Επιλογή κάρτας
Εμφάνιση πλευράς

P (η άλλη επίσης κηλε / κηλε πλευρά)



A_1 : Επιλέγεται η κάρτα MM

A_2 : Επιλέγεται η κάρτα MK

A_3 : Επιλέγεται η κάρτα KK

E : Δείχνεται M

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2) + P(A_3)P(E|A_3)}$$

↑
N. Bayes

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$$

$$= \frac{2}{3}$$