13/9/13

1. Πλαίσιο

Πείραμα τύχης
Δειγματικός χώρος = Σύνολο αποτελεσμάτων
Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα
Ενδεχόμενο = Υποσύνολο από αποτελέσματα
Πιθανότητα = Αριθμός στο [0,1]
Τυχαία Μεταβλητή = Αριθμητικό χαρακτηριστικό

2. Παράδειγμα

Πείραμα → ρίψη 2 ζαριών

- Δειγματικός χώρος $\underline{\Omega}$

$\underline{\Omega} = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$
δειγματικό σημείο

- Ενδεχόμενα

A_1 = Το άθροισμα των ζαριών να είναι $3 = \{(1,2),(2,1)\}$

A_2 = Η $1^η$ ζαριά είναι $6 = \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$

- Πιθανότητες

$P(A_1) = \frac{2}{36} \qquad P(A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- Τυχαία μεταβλητή

X_1 = η $1^η$ ένδειξη
X_2 = Το άθροισμα των ενδείξεων

3. Παράδειγμα

Πείραμα τύχης
10 άλογα τρέχουν στον Ιππόδρομο

Αποτέλεσμα → Δειγματικό σημείο = Σειρά τερματισμού

Δειγματικός χώρος = Σύνολο των Μεταθέσεων των 10 αλόγων.

$|\underline{\Omega}| = 10!$

4. Παράδειγμα

Πείραμα τύχης
Γέννηση παιδιού σε οικογένεια - καταγραφή φύλου
Δειγματικός χώρος $= \underline{\Omega} = \{ -, A, K, AA, AK, KA, KK, \ldots \}$

5. Έννοιες Πιθανότητας

(i) Κλασσική Πιθανότητα
(ii) Οριακή σχετική συχνότητα
(iii) Γεωμετρική πιθανότητα
(iv) Εμπειρική πιθανότητα

} Μαθηματική Αξιωματική Θεμελίωση Kolmogorov

6. Κλασσική Πιθανότητα

- Πεπερασμένος Πληθυσμός
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού

$$\text{Πιθανότητα} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$$

Αυτός ο ορισμός ισχύει μόνο για: (i) Πεπερασμένο δειγμ. χώρο
(ii) Ισοπίθανα δειγμ. σημεία

7. Οριακή σχετική συχνότητα

Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται

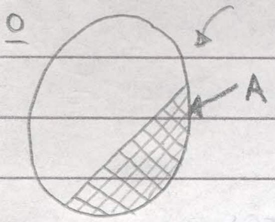
Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = # επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιείται το ενδεχόμενο σε n επαναλήψεις / n

$n \to \infty$

Πιθανότητα ενδεχομένου

8. Γεωμετρική Πιθανότητα

Μόνο για τυχαία πειράματα που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα παριστάνονται ως επίπεδα σχήματα.



Νόμισμα Ο που το ρίχνω τυχαία

Πιθανότητα κέντρο του νομίσματος στο A = Εμβαδό του A / Εμβαδό του Ω

9. Εμπειρική Πιθανότητα

- Πιθανότητα να περάσω το μάθημα σε αυτή την εξεταστική;
- Πιθανότητα να βρω τον αδερφό μου σπίτι =;
- Πιθανότητα = Υποκειμενική εκτίμηση

10. Αξιωματικό Πλαίσιο Kolmogorov

(Ω, A, P) Τυχαίο πείραμα ≡ Χώρος Πιθανότητας

Συνάρτηση πιθανότητας

Οικογένεια ενδεχομένων

Δειγματικός χώρος

$$P: A \longrightarrow [0,1]$$

Ενδεχόμενο A ⟶ πιθανότητα πραγματοποίησης του $P(A)$

Αξιώματα

(i) $0 \le P(A) \le 1$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $A_1, A_2, \ldots$, ξένα ανά δυο $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A)$

11 Το δίλημμα Monty Hall

1	2	3

3 πόρτες ↓ 1 Δώρο + 2 Αποτυχίες

1ο: Κρύψιμο 1Δ+2Α

2ο: Παίχτης μαντεύει Πόρτα

3ο: Ανοίγει μια μη-επιλεγμένη Πόρτα

Ο Παίχτης έχει 2 επιλογές

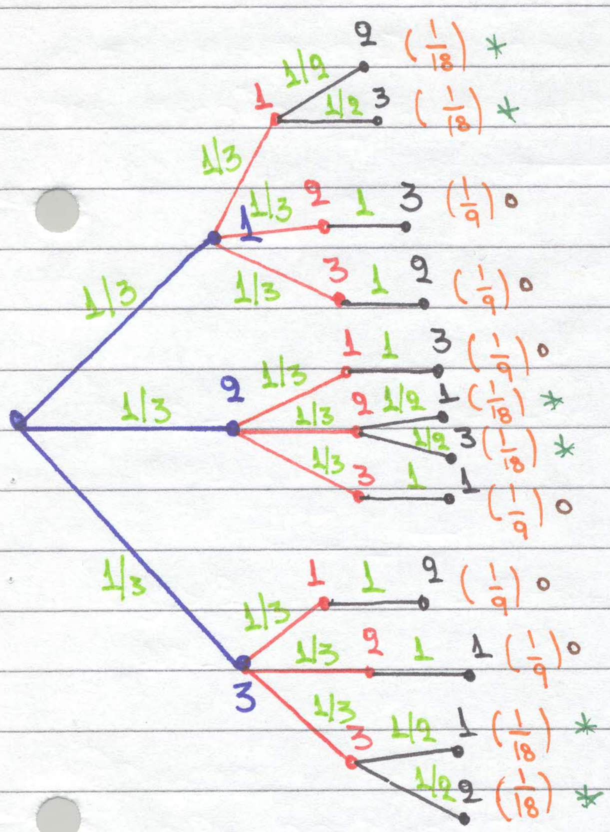
1. Μένει πιστός στην αρχική επιλογή

2. Αλλάζει επιλογή

$P(1) = P($Παίχτης κερδίζει με τη στρατηγική $1)$

$P(2) = P($Παίχτης κερδίζει με τη στρατηγική $2)$

Κρύψιμο Δώρου - Επιλογή πόρτας



$$P_1^{*} = 6 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{3}$$

$$P_2^{\circ} = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

▶ Η συμφέρουσα στρατηγική είναι να αλλάξει επιλογή.

12. Παράδειγμα

Οι Α,Β,Γ ρίχνουν ένα ζάρι

P(ο Γ να φέρει όσο το άθροισμα των Α,Β)

Αποτελέσματα $= (\alpha, \beta, \gamma)$

Α Β Γ

Δειγματικός χώρος: $\Omega = \{(\alpha,\beta,\gamma) : \alpha,\beta,\gamma = 1,2,\ldots,6\}$

$P(\text{Ενδειξη του } \Gamma = \text{ένδειξη του } A + \text{ένδειξη του } B) = \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$

$\#$ Δυνατών $= 6^3$

Ευνοϊκές $= \{(1,1,2), (1,2,3), (2,1,3), \ldots (1,5,6)\}$

$\#$ Ευνοϊκών $= 1+2+3+4+5 = \dfrac{5 \cdot 6}{2} = 15$

$P(\Gamma) = \dfrac{15}{6^3}$

15/9/13

Παραδείγματα

1. Πλαίσιο

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \leftrightarrow$ Χώρος Πιθανότητας

↳ Συνάρτηση πιθανότητας

Δειγματικός χώρος

οικογένεια ενδεχομένων

Αξίωμα 1: $0 \le P(A) \le 1$

Αξίωμα 2: $P(\Omega) = 1$

Αξίωμα 3: $A_1, A_2, \dots$ ξένα ανά δύο (Ασυμβίβαστα)

↳ (αν γίνει το ένα δεν γίνονται τα άλλα)

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

2. Ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$ Αδύνατο ενδεχόμενο

(Πιθανότητα κενού → 0 όμως 0 πιθανότητα όχι κατά ανάγκην κενό σύνολο)

2. $P(E^c) = 1 - P(E)$

3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(\overset{\text{Τομή}}{EF})$ (Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού)

4. $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) - \dots + (-1)^{n+1} (E_1 E_2 \dots E_n)$

5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

6. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ (Η ισότητα ισχύει όταν είναι ασυμβίβαστα)

7. $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(E_n)$

8. $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$, $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(E_n)$

3. Αποδείξεις

1. $P(\emptyset) = 0$

$E_1 = \Omega$, $E_2 = E_3 = \dots = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \Rightarrow \underset{1}{P(\Omega)} = \underset{1}{P(E_1)} + \cancelto{0}{P(\emptyset)} + \cancelto{0}{P(\emptyset)} + \dots$$

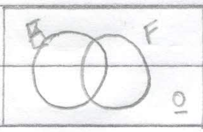
$$\Rightarrow P(\emptyset) = 0 \quad (P(\emptyset) \geq 0)$$

2. $P(E^c) = 1 - P(E)$

$E_1 = E$, $E_2 = E^c$, $E_3 = E_4 = \dots = \emptyset$

Όμοια με την 1

3. $P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$



$$P(E\cup F) = P(EF^c \cup EF \cup E^cF)$$
$$= \underbrace{P(EF^c) + P(EF)}_{P(E)} + P(E^cF) \quad \text{(Το } P(EF) \text{ έχει χρησιμοποιηθεί 2 φορές)}$$

$P(EF) + P(E^cF) = P(F)$

$$= P(E) + P(F) - P(EF)$$

4. $P(E_1\cup E_2\cup \cdots \cup E_n) = \sum P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_iE_j) + \sum_{i<j<k} P(E_iE_jE_k) - \cdots + (-1)^{n+1}(E_1E_2\cdots E_n)$

Όπως η 3 + Επαγωγή

5. $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

$B = A\cup(BA^c)$ → ασυμβίβαστα

$\Rightarrow P(B) = P(A) + \boxed{P(BA^c)} \geq 0$

$\Rightarrow P(A)\leq P(B)$

6. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

F_1, F_2, F_3, F_n → Ξένα μεταξύ τους

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2E_1^c \cup E_3E_2^cE_1^c \cup \cdots \cup E_nE_1^cE_2^c\cdots E_{n-1}^c$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

ΒΑΣΙΚΗ ΤΕΧΝΙΚΗ

Γενικά, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$

$F_i \subseteq E_i$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

→ ασυμβίβαστα

7. $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$, $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

Θέτουμε $F_i = E_i E_1^c E_2^c \dots E_{i-1}^c = E_i \cdot E_{i-1}^c$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} F_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

$\hookrightarrow P(E_n)$

8. $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$, $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

$E_1^c \subseteq E_2^c \subseteq E_3^c \subseteq \dots$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c) \Rightarrow P((\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)^c) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

$$\Rightarrow 1 - P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n) \Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n).$$

4. Παράδειγμα

Οικογένεια με 4 παιδιά
Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών;
3-1 ή 2-2;

Υποψήφιοι Δειγματικοί χώροι.

$\Omega_1 = \{0-4, 1-3, 2-2, 3-1, 4-0\}$
Α-Κ (Με βάση το πλήθος των αγοριών)

$\Omega_2 = \{$4 όμοιου φύλου, 3 όμοιου φύλου - 1 διαφορετικού, 2-2$\}$

$\Omega_3 = \{ΑΑΑΑ, ΑΑΑΚ, ΑΑΚΑ, \ldots, ΚΚΚΚ\}$
(Με βάση την καταγραφή του φύλου με τη σειρά γέννησης)

▶ Από όλους τους δειγματικούς χώρους "καλός" είναι αυτός που έχει ισοπίθανα στοιχεία.

Ο Ω_3 έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.

Πιθανότητα "3-1" $= \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$

Πιθανότητα "2-2" $= \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

Πιθανότητα "4-0" $= \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$

5. Παράδειγμα

3 φίλοι πάνε σινεμά. Ρίχνουν (δίκαιο) νόμισμα.
Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει.

Ο Δειγματικός χώρος με ισοπίθανα δειγματικά σημεία:

Δειγματικός χώρος = {κκκ, κκγ, κγκ, κγγ, γκκ, γκγ, γγκ, γγγ}

$$P(\text{κερνάει}) = 1 - P(\text{δεν κερνάει})$$
$$= 1 - P(\{\text{κκκ}, \text{γγγ}\})$$
$$= 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$$

6. Παράδειγμα

Παιχνίδι "Chuck-a-luck" (π.χ. στοιχηματίζω στο "5").
Ένας παίχτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
Ρίχνονται 3 ζάρια.
Κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά στην οποία στοιχημάτισε τουλάχιστο μια φορά.

Έστω ότι ο παίχτης στοιχηματίζει στην έδρα i.
Α = Στην πρώτη ζαριά έρχεται η ένδειξη i.
Β = Στη δεύτερη ζαριά έρχεται η ένδειξη i.
Γ = Στη τρίτη ζαριά έρχεται η ένδειξη i

(ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ-ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ)

Πιθανότητα να κερδίσει $= P(A \cup B \cup \Gamma)$

$$= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{216} = \frac{91}{216}$$