20/5/13 31º Μάθημα

Πιθανογεννήτριες - Ροπογεννήτριες

① Πιθανογεννήτριες

X διακριτή τ.μ. με τιμές στο $\{0, 1, \dots\}$
με σ.π.π. $\underset{p_n}{P(X=n)}$: $n = 0, 1, \dots$

Πιθανογεννήτρια της X :

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(X=n)}_{p_n} z^n \quad , \ |z| \leq 1$$

② Ιδιότητες

1| $P(X=n) = \dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Από Απειρ. ΙΙ: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

2| $P(X=n) = P(Y=n)$, $n = 0, 1, \dots \iff P_X(z) = P_Y(z)$

3| $P_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)]$ = n-οστή παραγοντική ροπή

ειδικά: $E[X] = P_X'(1)$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$
$$= E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2$$
$$= P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2$$

Απόδειξη

$$E[X(X-1)\cdots(X-n+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)P(X=k)$$

$$P_X^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)z^{k-n} \Rightarrow$$

$$P_X^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

4) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. ≥ 0, ακέραιες

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$\Downarrow$$
$$P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) \cdot P_{X_2}(z) \cdots P_{X_n}(z)$$

Απόδειξη

$$P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] = E[z^{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}]$$
$$= E[z^{X_1} z^{X_2} \cdots z^{X_n}]$$

ανεξάρτητες

$$= E[z^{X_1}]\, E[z^{X_2}] \cdots E[z^{X_n}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \cdots P_{X_n}(z)$$

5) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες. τ.μ. ≥ 0 ακερ. με πιθανογεννήτρια $P_X(z)$

$N \geq 0$ ακέραιη, ανεξάρτητη των X_i

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$$

Απόδειξη

θ. ολικής μέσης τιμής

$$P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] = E[E[z^{S_N} | N]]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[z^{S_N} | N=n]$$

N ανεξάρτητη των Xi

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \cancel{| N=n}]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, \underbrace{E[z^{X_1}]}_{P_X(z)}\, \underbrace{E[z^{X_2}]}_{P_X(z)} \cdots \underbrace{E[z^{X_n}]}_{P_X(z)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_{S_N}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, (P_X(z))^n = P_N(P_X(z))$$

③ Βασικές πιθανογεννήτριες

1| $X \sim Bernoulli(p)$

$P(X=1)=p \quad , P(X=0)=1-p \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\, z^n = 1-p+pz$$

2| $X \sim Bin(n,p)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \; 0 \leq k \leq n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\, z^k = \dots$$

$X = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad , \; I_i \sim Bernoulli(p)$ ανεξ.

$$\overset{4|}{\Rightarrow} P_X(z) = P_{I_1}(z)\, P_{I_2}(z) \cdots P_{I_n}(z) = (1-p+pz)^n$$

$$E[X] = P_X'(1) = np$$

3| $X \sim Geom(p)$

$$P(X=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \quad , \; n = 1, 2, \dots$$

$\Downarrow$

$$P_X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n)\, z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p \cdot z^n$$

$$= p \cdot z \sum_{n=1}^{\infty} [(1-p)\, z]^{n-1}$$

$$= \frac{p \cdot z}{1-(1-p)z}$$

4| $X \sim NegBim(n,p)$

$X = \#$ δοκιμών ως τη n-οστή επιτυχία σε ακολουθία δοκιμών Bernoulli (p)

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \left.\begin{array}{l} x_i \text{ ανεξάρτητες} \\ x_i \sim Geom(p) \end{array}\right\} \Rightarrow P_X(z) = \left(\frac{p \cdot z}{1-(1-p)z}\right)^n$$

5| $X \sim Poisson$

$$P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad , n = 0, 1, \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

$$= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!}}_{e^{\lambda z}} = e^{-\lambda(1-z)}$$

Άρα:

$X \sim Bernoulli(p) \longrightarrow P_X(z) = 1 - p + pz$

$X \sim Bim(n,p) \longrightarrow P_X(z) = (1-p+pz)^n$

$X \sim Geom(p) \longrightarrow P_X(z) = \dfrac{pz}{1-(1-p)z}$

$P(X=n) = (1-p)^{n-1} p \quad , n \geq 1$

$X \sim NegBim(p) \longrightarrow P_X(z) = \left(\dfrac{pz}{1-(1-p)z}\right)^n$

$X \sim Poisson(\lambda) \longrightarrow P_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

④ Αναγεννητικές ιδιότητες

1) $X \sim Bin(n,p)$ $\Longrightarrow$ $X+Y \sim Bin(n+m,p)$
$Y \sim Bin(m,p)$

Απόδειξη

$$P_{X+Y}(z) = P_X(z)P_Y(z)$$
$$= (1-p+pz)^n (1-p+pz)^m$$
$$= (1-p+pz)^{n+m}$$

πιθανογεννήτρια της $Bin(n+m,p)$

2) $X \sim Poisson(\lambda)$ $\Longrightarrow$ $X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$
$Y \sim Poisson(\mu)$
X, Y ανεξάρτητες

Απόδειξη

$$P_{X+Y}(z) = P_X(z)P_Y(z)$$
$$= e^{-\lambda(1-z)} \cdot e^{-\mu(1-z)}$$
$$= e^{-(\lambda+\mu)(1-z)}$$

πιθανογεννήτρια της $Poisson(\lambda+\mu)$

⑤ Παράδειγμα

$N =$ # πελατών σε τράπεζα σε μία μέρα $\sim$ Poisson (λ)

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{ο } i \text{ πελάτης καταθέτει χρήματα} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$M =$ # πελατών που καταθέτουν χρήματα σε μία μέρα

$P(M=m) = ;$

$$P(N=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$P(I_i = 0) = 1-p$, $P(I_i = 1) = p$

ανεξάρτητες μεταξύ τους και με το N

$P(M=m) = ;$

ΛΥΣΗ

$$M = \sum_{i=1}^{N} I_i$$

$$P_M(z) = P_N(P_I(z))$$

Όμως $N \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow P_N(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

$I_i \sim \text{Bernoulli}(p) \Rightarrow P_I(z) = 1-p+pz$

$$\Downarrow$$

$$P_M(z) = e^{-\lambda(1-P_I(z))} = e^{-\lambda p(1-z)}$$

$$\Downarrow$$

$$M \sim \text{Poisson}(\lambda p)$$

Άρα $P(M=m) = e^{-\lambda p} \dfrac{(\lambda p)^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \dots$

6) Παράδειγμα (Αντιστροφή πιθανογεννήτριας)

Έστω X διακριτή ακέραια ≥ 0 τ.μ. με πιθανογεννήτρια $P_X(z) = \frac{c}{6-z-z^2}$

$P(X=n) = ;$, $n=0,1,\dots$

ΛΥΣΗ

$P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1$

$* \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , |z|<1$

$$\boxed{P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1} \Rightarrow \frac{c}{6-1-1^2} = 1 \Rightarrow c=4$$

$$P_X(z) = \frac{4}{6-z-z^2} = \frac{4}{-(z+3)(z-2)} = \frac{4}{(z+3)(2-z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{3+z} \quad (*)_1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{z+3} = A + \frac{B}{3+z}(2-z) \xRightarrow{z=2} A = \frac{4}{5}$$

$$(*)_1 \Rightarrow \frac{4}{2-z} = \frac{A}{2-z}(3+z) + B \xRightarrow{z=-3} B = \frac{4}{5}$$

Άρα

$$P_X(z) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2-z} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3+z} = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{4}{15}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{3})}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) \overset{\shortparallel}{=} z^n$

$$= \frac{4}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{4}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X=n) = \frac{4}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad , n=0,1,\dots$$

22/5/13

Ροπογεννήτριες - Ανισότητες

1 Ροπογεννήτρια Τυχαίας Μεταβλητής

X τ.μ.

Η ροπογεννήτρια της X

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P_X(x) & \text{σ.π. της } X \quad X\text{: διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & \text{σ.π.π. της } X \quad X\text{: συνεχής} \end{cases}$$

2 Ιδιότητες

ίδια κατανομή (distribution)

(i) $X \overset{d}{=} Y$ (X, Y : ισόνομες) $\iff M_X(t) = M_Y(t)$

(ii) $\underbrace{E[X^n]}_{\text{Ροπή n-τάξης}} = M_X^{n}(0)$

Απόδειξη

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \Rightarrow M_X^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} E[e^{tX}]$$

$$= E[\frac{d^n}{dt^n} e^{tX}]$$

$$= E[X^n \cdot e^{tX}]$$

$$\Rightarrow M_X^{(n)}(0) = E[X^n]$$

iii) $X_1, X_2, \ldots, X_n$: ανεξάρτητες
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
$\Rightarrow M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) \ldots M_{X_n}(t)$

Απόδειξη

$$M_{S_n}(t) = E[e^{tS_n}] = E[e^{tX_1 + tX_2 + \ldots + tX_n}]$$

$$= E[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2} \cdot \ldots \cdot e^{tX_n}]$$

ανεξάρτητες

$$= E[e^{tX_1}]\, E[e^{tX_2}] \cdot \ldots \cdot E[e^{tX_n}]$$

$$= M_{X_1}(t)\, M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$$

(iv) $X_1, X_2, X_3, \ldots$: ανεξάρτητες
κ' ισόνομες
με ροπογεννήτρια
$M_X(t)$

N: ακέραια τ.μ. ≥ 0, ανεξάρτητη των X_i

(Μπορεί να έχει και διαφορετική κατανομή)

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$\Rightarrow M_{S_N}(t) = P_N(M_X(t))$

Πιθανογεννήτρια της N, όχι Ροπογεννήτρια !!!

$e^{t\sum x_i}$

Απόδειξη

$$M_{S_N}(t) = E[e^{tS_n}] = E[e^{t\sum_{i=1}^{N} x_i}] = E[E[e^{t\sum_{i=1}^{N} x_i} \mid N]]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[e^{t\sum_{i=1}^{n} x_i} \mid N=n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[e^{t\sum_{i=1}^{n} x_i}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, (M_x(t))^n$$

$$= P_N(M_x(t))$$

(v) Σχέση Πιθανογεννήτριας - Ροπογεννήτριας.

X: ακέραια τ.μ. ≥ 0 (οπότε έχει πιθανογεννήτρια) $\Rightarrow M_x(t) = P_x(e^t)$

Απόδειξη

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = E[(e^t)^x] = P_x(e^t)$$

3. Ροπογεννήτριες Κλασσικών κατανομών

(i) $X \sim Bernoulli(p)$

$$P(X=i) = \begin{cases} p, & i=1 \\ 1-p, & i=0 \end{cases} \Rightarrow M_x(t) = 1-p+pe^t$$

(ii) $X \sim Bin(n,p)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \Rightarrow M_x(t) = (1-p+pe^t)^n$$

(iii) $X \sim Geom(p)$

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \; k \geq 1 \Rightarrow M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

(iv) $X \sim NegBin(n,p) \Rightarrow M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^n$

(v) Poisson (λ)

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \; k \geq 0 \Rightarrow M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$$

(vi) $X \sim exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x>0 \Rightarrow M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x}\,dx$$

$$= \lambda \left[\frac{e^{-(\lambda-t)x}}{-(\lambda-t)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda-t}, \; t<\lambda$$

(vii) $X \sim Gamma(n,\lambda)$

$\Downarrow$ $\quad$ ↳ $Erlang(n,\lambda)$ $\quad \Rightarrow M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$X_i \sim Exp(\lambda)$: ανεξάρτητες.

(viii) $Z \sim N(0,1)$

σ.π.π. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$M_Z(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 - 2tx}{2}} dx$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x^2 - 2tx + t^2)}{2}} dx$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx$$

σ.π.π. $N(t,1)$

$$\Rightarrow M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

(ix) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$M_X(t) = ;$, $X = \sigma Z + \mu$.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = E[e^{t(\sigma Z + \mu)}] = e^{t\mu} E[e^{t\sigma Z}]$$

$$= e^{t\mu} M_Z(\sigma t)$$

$$= e^{t\mu} e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{t\mu + \frac{\sigma^2}{2} t^2}$$

4. Βασικές Ανισότητες στη Θ. Πιθανοτήτων

(i) Ανισότητα Markov: $X \geq 0,\ a > 0 \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

(ii) Ανισότητα Chebyshev: $P(|X - E[X]| \geq c) \leq \frac{Var[X]}{c^2}$

(iii) Ανισότητα Chernoff: $t > 0 \Rightarrow P(X \geq a) \leq e^{-ta} M_X(t)$
$a \in \mathbb{R}$

(iv) Cauchy-Schwartz: $|E[XY]| \leq E[X^2]^{1/2} E[Y^2]^{1/2}$

(v) Jensen: f: κυρτή $\Rightarrow f(E[X]) \leq E[f(X)]$

Απόδειξη

(i) $I(X) = \begin{cases} 1, & X \geq a \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \Rightarrow aI(X) \leq X$

$aP(X \leq a) = aE[I(X)] = E[aI(X)] \leq E[X] \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

Για X: συνεχής με σ.π.π. $f_X(x)$

$aP(X \geq a) = a\int_a^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_a^{\infty} a f_X(x)\,dx \leq \int_a^{\infty} x f_X(x)\,dx \leq \underbrace{\int_0^{\infty} x f_X(x)\,dx}_{=E[X]}$

(ii) $P(|X-E[X]| \geq c) = P((X-E[X])^2 \geq c^2) \overset{\text{Markov}}{\leq} \dfrac{E[(X-E[X])^2]}{c^2} = \dfrac{Var[X]}{c^2}$

(iii) $P(X \geq a) \overset{t>0}{=} P(tX \geq ta) = P(e^{tX} \geq e^{ta}) \underset{\text{Markov}}{\leq} \dfrac{E[e^{tX}]}{e^{ta}} = e^{-ta} M_X(t)$

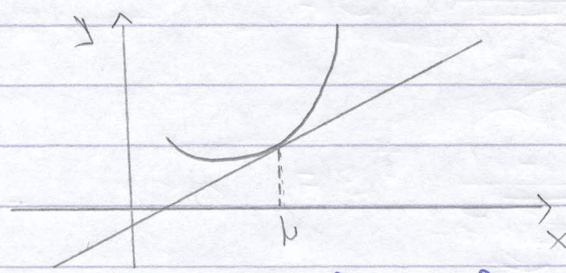
(Better than Markov)

$$P(X \geq a) \leq \inf_{t>0} \{ e^{-ta} M_X(t) \}$$

(iv) $\rho(X,Y) \in [-1,1] \Rightarrow Cov(X,Y) \leq Var[X]^{1/2} \cdot Var[Y]^{1/2}$

$\Rightarrow \ldots \quad \left(|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n| \leq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \right)$ (*)

(v) f: κυρτή



$f(x) \geq f(\mu) + (x-\mu) f'(\mu) \Rightarrow f(x) \geq f(E[X]) + (x - E[X]) f'(E[X])$

$\Rightarrow f(X) \geq f(E[X]) + (X - E[X]) f'(E[X])$

$\Rightarrow E[f(X)] \geq E[f(E[X]) + (X - E[X]) f'(E[X])]$

$\Rightarrow E[f(X)] \geq f(E[X])$

5. $Var[X] = 0 \Rightarrow X$: σταθερή

$P(|X-E[X]| > 0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ |X - E[X]| > \frac{1}{n} \right\} \right)$

$= \lim_{n\to\infty} P\left(|X-E[X]| > \frac{1}{n}\right) \overset{\text{Chebysev}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \dfrac{\overbrace{Var[X]}^{=0}}{1/n^2}$

$\Rightarrow P(X = E[X]) = 1$

6. Παράδειγμα

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Να βρεθεί το φράγμα Chernoff για $P(X \geq x)$

$$P(X \geq x) \leq \inf_{t>0} e^{-tx} M_X(t)$$

$$= \inf_{t>0} \left(e^{-tx} e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2} \right)$$

$$= \inf_{t>0} e^{\frac{\sigma^2}{2} t^2 + (\mu - x) t}$$