8|4|13

Πολυδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

1. Διδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

$(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$

$\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$ λέγεται 2-διάστατη τυχαία μεταβλητή

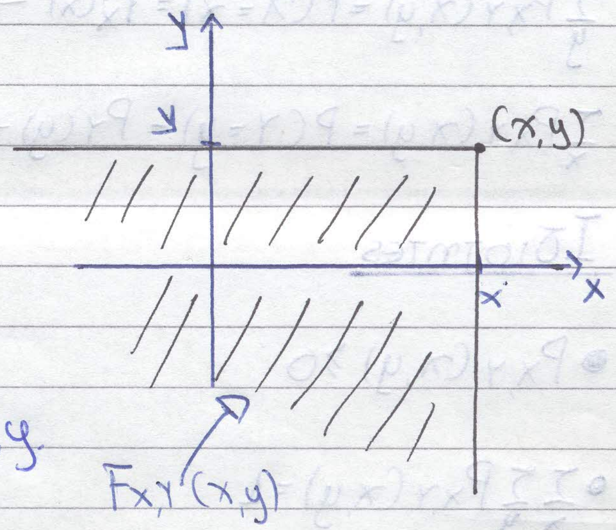
αν $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\} \in \mathcal{A}$ → οικογένεια ενδεχομένων

2. Συνάρτηση Κατανομής

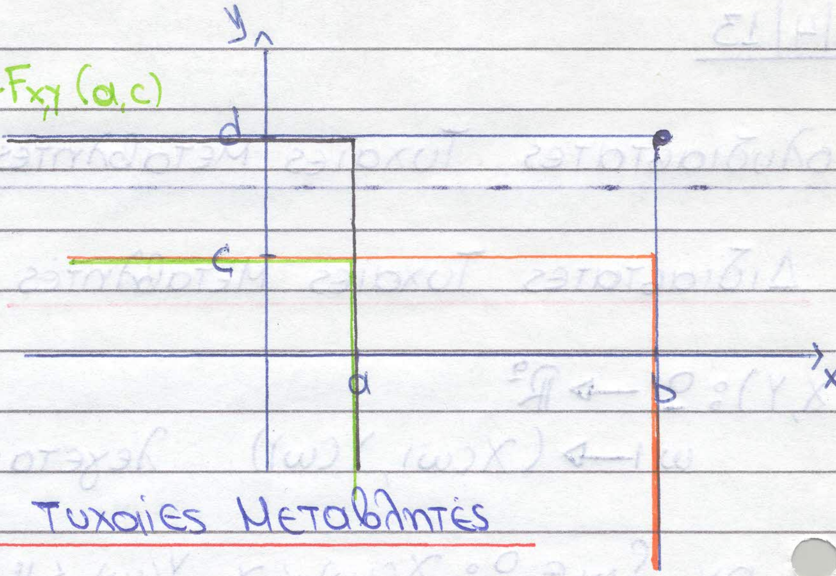
$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ → (από κοινού) συνάρτηση κατανομής της (X,Y).

Ιδιότητες

- $\lim\limits_{x,y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$
- $\lim\limits_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x) = F_X(x)$ → Περιθώρια συνάρτηση κατανομής της X.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$ → Περιθώρια συνάρτηση κατανομής της Y
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $F_{X,Y}(x,y)$: αύξουσα ως προς x, y
- $F_{X,Y}(x,y)$: δεξιά συνεχής ως προς x, y.



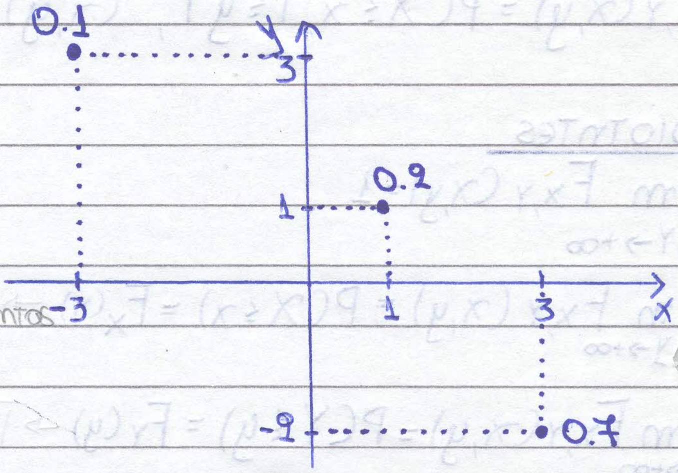
• $P(a<X\leq b,\ c<Y\leq d)$
$= F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$



3. Διακριτές Δι-διάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός

(X,Y) λέγεται 2-διάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή αν $\exists\ S=\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots\}$ ώστε $P((X,Y)\in S)=1$



$P((X,Y)\in\{(1,1),(3,-2),(-3,3)\})=1$

$P_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y)$
↳ (από κοινού) συνάρτηση Πιθανότητας (X,Y)

$\sum_y P_{X,Y}(x,y)=P(X=x)=P_X(x)$ → Περιθώρια συνάρτηση Πιθανότητας της X.

$\sum_x P_{X,Y}(x,y)=P(Y=y)=P_Y(y)$ → Περιθώρια συνάρτηση Πιθανότητας της Y

Ιδιότητες

• $P_{X,Y}(x,y)\geq 0$

• $\sum_x\sum_y P_{X,Y}(x,y)=1$

4. Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης : Επιλογή Οικογένειας και Καταγραφή # παιδιών.
(αγόρια, κορίτσια)

X = # αγοριών
Y = # κοριτσιών
$(X,Y) \in \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\} = 1$

15% οικογενειών → 0 παιδιά
25% οικογενειών → 1 παιδί
20% οικογενειών → 2 παιδιά
40% οικογενειών → 3 παιδιά

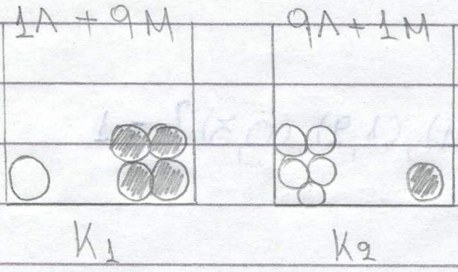
Πίνακας Συνάρτησης Πιθανότητας (X,Y)

$P_{X,Y}(x,y)$

X \ Y	0	1	2	3	$P_X(x)$
0	$\frac{15}{100}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	0	0	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{20}$	0	0	0	$\frac{1}{20}$
$P_Y(y)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	1

5. Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης: 2 κάλπες - Επιλέγω κάλπη
Επιλέγω 2 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση



X = Επιλογή Κάλπης
Y = # Λευκών σφαιριδίων

(X,Y): διακριτή;
$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$
$P_X(x) = P(X=x)$
$P_Y(y) = P(Y=y)$

$(X,Y) \in (\{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2)\}) = 1$, άρα (X,Y): διακριτή

X \ Y	0	1	2	$P_X(x)$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{20}$	0	0.5
2	0	0.1	0.4	0.5
$P_Y(y)$	0.4	0.2	0.4	1

← $P_{X,Y}(x,y)$

6. Συνεχείς Δι-διάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

(X,Y) λέγεται συνεχής 2-διάστατη τυχαία μεταβλητή αν $\exists f_{X,Y}(x,y)$ σ.π.π. ώστε $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ και $P((X,Y)\in C) = \iint_C f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

Ιδιότητες

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

5

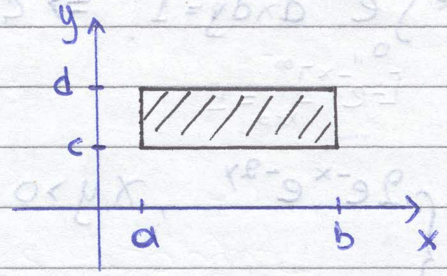
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \rightarrow$ Περιθώρια σ.π.π της Y

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \rightarrow$ Περιθώρια σ.π.π της X

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$

- $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$

- $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$



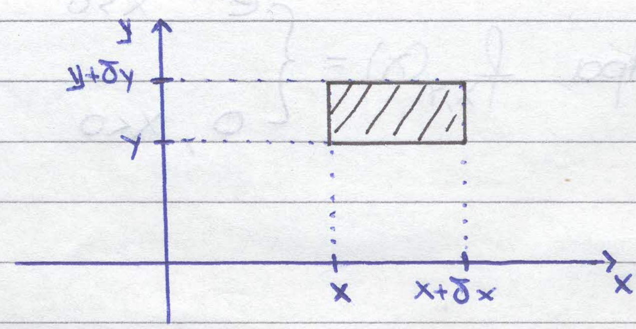
- Για συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (X,Y)

$P(X=x, Y=y) = 0$

$P(X=x, y \leq Y \leq y') = 0 \rightarrow$ Εμβαδό ευθύγραμμου τμήματος

$P(Y=y, x \leq X \leq x') = 0 \rightarrow$ Εμβαδό ευθύγραμμου τμήματος

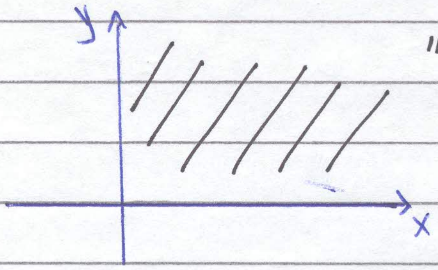
$$\frac{P(x < X \leq x+\delta x, y < Y \leq y+\delta y)}{\delta x\, \delta y} \simeq f_{XY}(x,y)$$



7. Παράδειγμα

(X,Y): 2-διάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c\,e^{-x}e^{-2y} & ,x,y>0 \\ 0 & ,\text{διαφορετικά} \end{cases}$$



"ζει" μόνο όταν $X\geq 0$, $Y\geq 0$

(i) $c=;$
(ii) $f_X(x)$
(iii) $f_Y(y)$
(iv) $P(X>1,\ Y<1)$
(v) $P(X<1)$
(vi) $P(X<Y)$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} c\,e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy=1$

$\displaystyle\Rightarrow c\int_0^{\infty}e^{-2y}\underbrace{\int_0^{\infty}e^{-x}\,dx}_{\left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{\infty}=1}\,dy=1 \Rightarrow c\int_0^{\infty}e^{-2y}\,dy=1 \Rightarrow c\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\right]_{y=0}^{\infty}=1$

$\Rightarrow \boxed{c=2}$

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & ,x,y>0 \\ 0 & ,\text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(ii) $\displaystyle f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^{\infty}2e^{-x}e^{-2y}\,dy=e^{-x}\quad ,x>0$

$f_X(x)=0\quad ,x<0$

άρα $$f_{X,Y}(x)=\begin{cases} e^{-x} & ,x>0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases}$$

10/4/13 21º Μάθημα

Δεσμευμένες σ.π. κ' σ.π.π.
Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

① Δεσμευμένη σ.π. για διακριτές τ.μ.

(X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

ορισμός

Ορίζουμε για κάθε y, $P_Y(y)>0$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)} = P(X=x \mid Y=y)$$

ως συνάρτηση του x τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δοθέντος ότι $Y=y$.

Για κάθε σταθερό y, $P_Y(y)>0$ η $P_{X|Y}(\cdot|y)$ έχει τις ιδιότητες της σ.π.

$P_{X|Y}(x/y) \geq 0 \quad \forall x$

$\sum_x P_{X/Y}(x/y) = 1$

ΟΜΟΙΑ $P_{Y|X}(y|x) = \dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)}$ κ.λ.π.

② Ανεξάρτητες Διακριτές τ.μ.

Έστω (X,Y) διακριτή τ.μ. με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$ και περιθώριες σ.π. $P_X(x)$, $P_Y(y)$

X,Y ανεξάρτητες $\iff P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$

$\iff P_{Y|X}(y|x) = P_Y(y)$

$\iff P_{X|Y}(x|y) = P_X(x)$

$\iff P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\,P(Y\in B)$

Αντίστοιχα:

$P(AB)=P(A)P(B)$

$P(A|B)=P(A)$

$P(B|A)=P(B)$

③ Δεσμευμένες σ.π.π. συνεχών τ.μ.

(X, Y) συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$
και περιθώριες σ.π.π.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

Ορίζουμε $\forall\, y$ με $f_Y(y) > 0$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

δεσμευμένη σ.π.π. της X δοθέντος $Y = y$

<u>Ιδιότητες</u>

$$f_{X|Y}(x|y) \geq 0 \quad \forall x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$$

X, Y ανεξάρτητα $\iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$\iff f_{X,Y}(x|y) = f_X(x)$

$\iff f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$

$\iff P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\,P(Y\in B)$

④ Δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) τ.μ.

(X,Y) τ.μ.

ΔΙΑΚΡΙΤΗ

ΣΥΝΕΧΗΣ

$$F_{X|Y}(x|y) = \sum_{x' \le x} \overbrace{P_{X|Y}(x'|y)}^{P(X\le x | Y=y)}$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x'|y)\,dx'$$

Δεσμευμένη σ.κ. της X δοθ. ότι $Y=y$.

X,Y ανεξάρτητα $\Longleftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$

$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

$F_{X,Y}(x,y) =$

$P_{X,Y}(x,y) =$ "πολλαπλασίασε"

$f_{X,Y}(x,y) =$

6 Βασικό κριτήριο ανεξαρτησίας

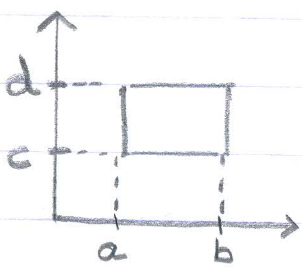
(X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$

$$P_{X,Y}(x,y) = f(x)\cdot g(y) \Leftrightarrow X,Y \text{ ανεξάρτητες}$$

(X,Y) συνάρτηση με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

$$f_{X,Y}(x,y) = f(x)\cdot g(y) \Leftrightarrow X,Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

7 Παράδειγμα 1



X,Y συνεχής με σ.π.π.

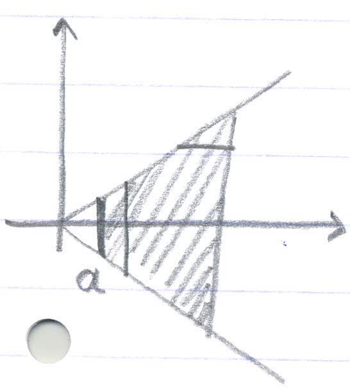
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c x^2 y, & a \le x \le b \text{ και } c \le y \le d \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = c x^2 y \, 1(x\in[a,b], y\in[c,d])$$
$$= \underbrace{x^2 \cdot 1(x\in[a,b])}_{f(x)} \; \underbrace{c\, y\, 1(y\in[c,d])}_{g(y)}$$
$$= f(x)\cdot g(y)$$

Άρα X,Y ανεξάρτητα

8 Παράδειγμα 2

(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c x^2 y, & a \le x \le b, \; -x \le y \le x \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

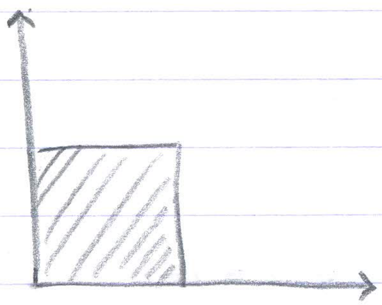


$$f_{X,Y}(x,y) = c x^2 y^2 \, 1(x\in[a,b], y\in[-x,x])$$
$$\neq f(x)\cdot g(y) \quad \text{όχι ανεξάρτητα.}$$

Πρέπει το σύνολο που είναι $\neq 0$ να γράφεται σε καρτεσιανό γινόμενο.

5/

⑨ Άσκηση



(X,Y) συνεχής τ.δ. με σ.π.π.:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(i) $c = ;$

(ii) $f_X(\cdot) = ;$

(iii) $f_Y(y) = ;$

(iv) $f_{X|Y}(x|y) = ;$

(v) $f_{Y|X}(y|x) = ;$

(vi) $P(X<Y) = ;$

(i) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 cxy\,dx\,dy =$$

$$= c\int_0^1 y \underbrace{\int_0^1 x\,dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^1} dy = \frac{c}{2}\underbrace{\int_0^1 y\,dy}_{\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^1} = \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=4}$$

(ii) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 4xy\,dy$$

$$= 4x\int_0^1 y\,dx = 2x, \quad 0 \le x \le 1$$

$$f_X(x) = 0 \quad , x \notin [0,1]$$

(iii) Όμοια

(iv) Η $f_{X|Y}(x|y)$ ορίζεται μόνο για y $f_Y(y)>0$

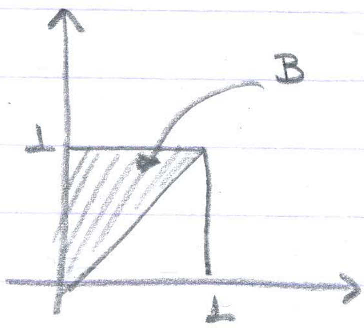
Μόνο για $y \in (0,1]$

Άρα για κάθε $y \in [0,1]$ έχουμε την $f_{X|Y}(x|y)$ με τύπο:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{\cancel{4}^{2} x \cancel{y}}{\cancel{2}\cancel{y}} = 2x & , x \in [0,1] \\ 0 & , x \notin [0,1] \end{cases}$$

(v) ΟΜΟΙΑ

(vi) $P(X<Y) = P((X,Y) \in \overbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 1\}}^{B}$

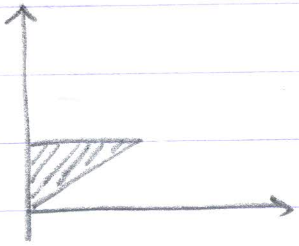


$$= \iint_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^y 4xy \,dx\,dy$$

$$= 4\int_0^1 y \underbrace{\int_0^y x\,dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{y}}\,dy = 2\underbrace{\int_0^1 y^3\,dy}_{\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{1}} = \frac{1}{2}$$

10 Άσκηση



(X,Y) συνεχής τ.μ. με σ.π.π.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cxy, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(i) $c=;$

(ii) $f_X(x)=;$

(iii) $f_Y(y)=;$

(iv) $f_{X|Y}(x|y)=;$

(v) $f_{Y|X}(y|x)=;$

(vi) $P(X<Y)=;$

(i) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^y cxy\,dx\,dy=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\int_0^1 y\underbrace{\int_0^y x\,dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{y}}dy=1 \Rightarrow \frac{c}{2}\int_0^1 y^3\,dy=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{1}=1 \Rightarrow \frac{c}{8}=1 \Rightarrow c=8$$

(ii) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \overset{x\in[0,1]}{=} \int_x^1 8xy\,dy$$

$$=8x\int_x^1 y\,dy = 8x\,\frac{1-x^2}{2} = 4x(1-x^2)$$

$$f_X(x)=\begin{cases} 4x(1-x^2), & x\in[0,1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(iii) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \quad , y \in [0,1]$

$$= \int_0^y 8xy\,dx = 8y \int_0^y x\,dx = 8y\,\frac{y^2}{2} = 4y^3$$

$y \in [0,1]$

Άρα

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & , y \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

X, Y όχι ανεξάρτητες γιατί

$$f_{X,Y}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 0 \neq f_X\left(\frac{2}{3}\right) f_Y\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & , y \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2) & , x \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(iv) Η $f_{X|Y}(x|y)$ ορίζεται μόνο για y με $f_Y(y) > 0$ μόνο για $y \in (0,1]$ με δ.π.π.

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & , x \in [0,y] \\ 0 & , x \notin [0,y] \end{cases}$$

$\forall\, y \in (0,1]$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{y^2} & , x \in [0,y] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

9/

(v) ΟΜΟΙΩΣ

$\forall\ x \in (0,1)$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{8xy}{4x(1-x^2)} & , y \in [x,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

*

(vi) $P(X<Y) = 1$

12/4/13 22$^{\text{ο}}$ Μάθημα

Πολυδιάστατες τ.μ. - Κατανομές Αθροισμάτων τ.μ.

(1) ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega : \mathbb{R}^n$ και $\{\omega : X_1(\omega) \le x_1, \dots, X_n(\omega) \le x_n\} \in A \ \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε η $(X_1, \dots, X_n)$ λέγεται n-διάστατη τ.μ. *

Από κοινού σ.κ. της $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Όμοια με την περίπτωση n = 2, ορίζονται διακριτές σ.π.:

$$P_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

συνεχείς σ.π.π. $f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n)$

ορισμός

$X_1, X_2, \dots X_n$ ανεξάρτητα $\iff P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2) \dots P(X_n \in A_n)$, $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in A$

(2) ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ Τ.Μ.

X, Y διακριτές τ.μ. με σ.π. $P_{X,Y}(x,y) \Rightarrow Z = X + Y$ διακριτή με σ.π.

$$P_Z(z) = P(Z = z) = P(X + Y = z) =$$
$$= \sum_x P(X = x, Y = z - x)$$
$$= \sum_x P_{X,Y}(x, z - x)$$
$$= \sum_y P_{X,Y}(z - y, y)$$

Σε κάποια προβλήματα αντί της $P_{X,Y}(x,y)$ έχουμε $P_X(x), P_Y(y), P_{X/Y}(x/y), P_{Y/X}(y/x)$ τότε:

$$P_Z(z) = \sum_x \underbrace{P_X(x) P_{Y/X}(\overset{z-x}{y}/x)}_{\substack{P_{X,Y}(x,y) \\ P_{X,Y}(x, z-x)}} = \sum_x P(X = x) \underbrace{P(Z = z / X = x)}_{\substack{\| \\ P(Y = z - x / X = x)}}$$

③ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ Τ.Μ.

X, Y συνεχείς τ.μ. με δ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) \Rightarrow Z=X+Y$ συνεχείς με δ.π.π.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,z-x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(z-y,y)\,dy$$

④ Παράδειγμα

X, Y ανεξ. συνεχείς Uniform([0,1])

$Z=X+Y$ συνεχείς

δ.π.π. $f_Z(z)=;\quad z\in[0,2]$

$f_Z(z)=0\quad z\notin[0,2]$

Για $z\in[0,2]$: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,z-x)\,dx$

$$\overset{X,Y \text{ ανεξ.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$$

Όμως,

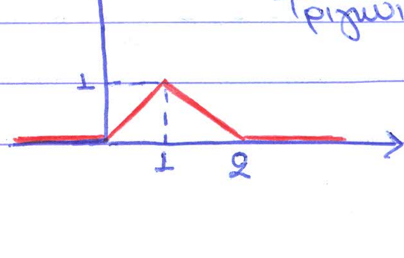
$$f_X(x)=\begin{cases} 1, & x\in[0,1] \\ 0, & x\notin[0,1] \end{cases}$$

$0\le x\le 1$, $0\le z-x\le 1$ $\Rightarrow$ $0\le x\le 1$, $z-1\le x\le z$

Άρα $f_Z(z)=\int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} 1\,dx$

$$f_Z(z)=\begin{cases} \min(1,z)-\max(0,z-1) & ;\ z\in[0,2] \\ 0 & ,\ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-0 & ,\ z\in[0,1] \\ 1-(z-1)=2-z, & z\in[1,2] \\ 0 & ,\ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Τριγωνική δ.π.π.

5 Παράδειγμα

X, Y διακριτές τ.μ. ανεξάρτητες
$X \sim Poisson(\lambda)$
$Y \sim Poisson(\mu)$

δ.π. $f_X(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$

$Z = X + Y$ $\quad f_Z(z)$ σπ. $\quad f_{X/Z}(x/z)$

Για $z = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_Z(z) = P(Z = z) = \sum_x \underbrace{P(X = x, Y = z - x)}_{f_{X,Y}(x, z-x)}$$

$$\overset{X,Y \text{ ανεξ.}}{=} \sum_x P(X = x) P(Y = z - x)$$

$$= \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\mu} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\mu^z}{z!} \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\mu^z}{z!} \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x \rightarrow \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^z$$

Για $z = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_Z(z) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}, \quad z = 0, 1, \ldots$$

δηλ. $Z \sim Poisson(\lambda + \mu)$

4

⑥ Παραδείγματα

Η $f_{X/Z}(x/z)$ ορίζεται μόνο για z με $f_Z(z)>0$
δηλ. για $z=0,1,2,\dots$

Ως συνάρτηση του x

$$f_{X/Z}(x/z) = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{P(\overbrace{X=x,\ Y=z-x}^{X=x\quad Z=z})}{P(Z=z)}$$

$$= \frac{P(X=x)\,P(Y=z-x)}{P(Z=z)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\,e^{-\mu}\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}}$$

$$f_{X/Z} = \binom{z}{x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x}, \quad x=0,1,\dots,z$$

$$(X/Z=z) \sim Bin\left(z, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

5

7 Παράδειγμα

$X \sim \text{Gamma}(a,\lambda)$ ανεξάρτητες.
$Y \sim \text{Gamma}(b,\lambda)$.

σ.π.π. $f_X(x) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, \quad x>0$

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} y^{b-1} e^{-\lambda y}, \quad y>0$$

$Z = X+Y$ σ.π.π. $f_Z(z) = ;$

ΛΥΣΗ

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx =$$

$$= \int_0^z \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} (z-x)^{b-1} e^{-\lambda(z-x)}\,dx$$

$$= c\, e^{-\lambda z} \int_0^z x^{a-1}(z-x)^{b-1}\,dx \qquad c \text{ σταθερό}$$

$$\overset{u=x/z}{=} c\, e^{-\lambda x} \int_0^1 (uz)^{a-1}(z-uz)^{b-1} z\,du$$

$$= c\, z^{a+b-1} e^{-\lambda z} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du$$

$$= c'\, z^{a+b-1} e^{-\lambda z}, \quad z>0$$

Για την Gamma$(a+b,\lambda)$ γνωρίζουμε ότι έχει σ.π.π.

$$\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} z^{a+b-1} e^{-\lambda z}, \quad z>0$$

__Άρα__ αναγκαστικά $c' = \dfrac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}$ και $Z \sim \text{Gamma}(a+b,\lambda)$

(8) Αναγεννητικές Ιδιότητες

1) $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim Bin(m+n,p)$

2) $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$

3) $X \sim NegBin(n,p)$, $Y \sim NegBin(m,p)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim NegBin(n+m,p)$

4) $X \sim Gamma(a,\lambda)$, $Y \sim Gamma(\beta,\lambda)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim Gamma(a+\beta,\lambda)$

5) $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\lambda)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim Gamma(2,\lambda)$

6) $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$