10ο Μάθημα 8/3/13

Τυχαία μεταβλητή - Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

① Ορισμός

Πείραμα Τύχης $\longrightarrow (\Omega, A, P)$

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) αν
$\{X \in (a,b]\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (a,b]\} \in A \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

- X τ.μ. $\longrightarrow$ Αριθμητικό χαρακτηρ. πειραμ. τύχης

② Παράδειγμα

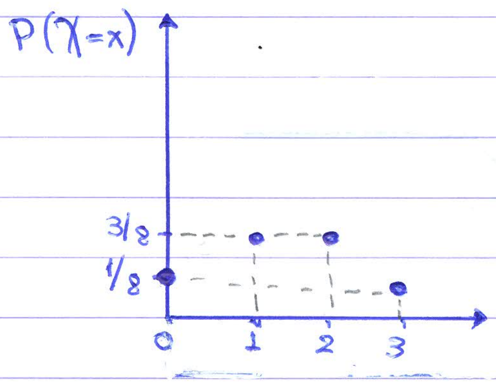
Πείραμα τύχης: Ρίψη νομίσματος 3 φορές (δίκαιο)

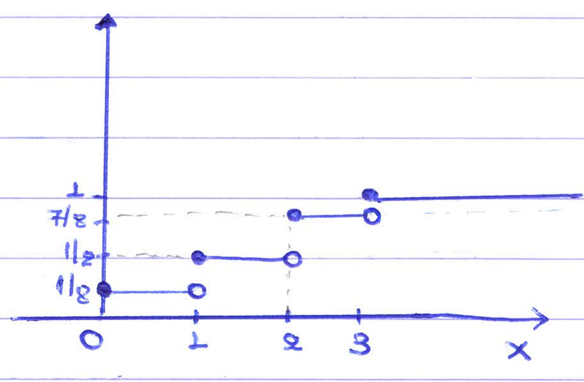
$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

$X = \#$: 3, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 0

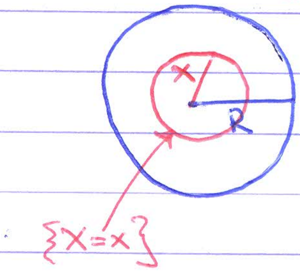
Συνάρτηση πιθανότητας $P(X=x)$

Συνάρτηση κατανομής $P(X \le x)$





③ Παράδειγμα



Πείραμα τύχης: Επιλογή τυχαίου σημείου στο δίσκο

X = απόσταση επιλ. σημείου από το κέντρο

$$P(X=x) = \frac{\text{Εμβαδό ενδεχ. } \{X=x\}}{\text{Εμβαδό του δ.χ.}} = \frac{0}{\pi R^2} = 0 \quad \forall x$$

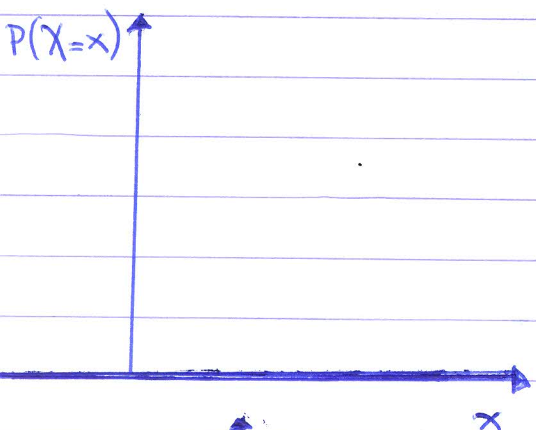
$$P(X \le x) = \frac{\text{Εμβαδό } \{X \le x\}}{\text{Εμβαδό του δ.χ.}} = \frac{\pi \cdot x^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{x^2}{R^2} \quad \underline{0 \le x \le R}$$

Συνάρτηση πιθανότητας

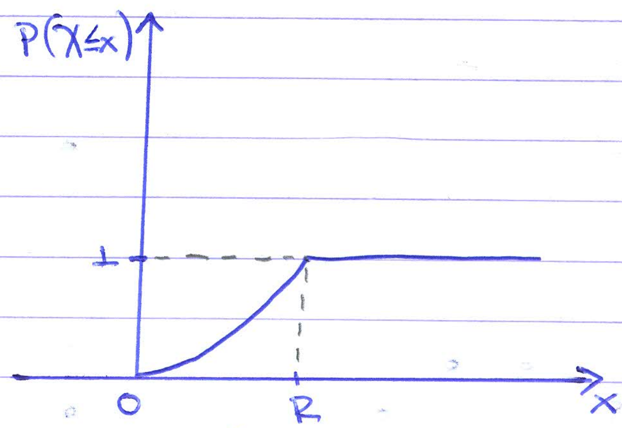
$P(X=x)$

Συνάρτηση κατανομής

$P(X \le x)$



Δεν δίνει πληροφορίες



Δίνει πληροφορίες

4 Παράδειγμα

Νόμισμα που φέρνει Κ με πιθανότητα P

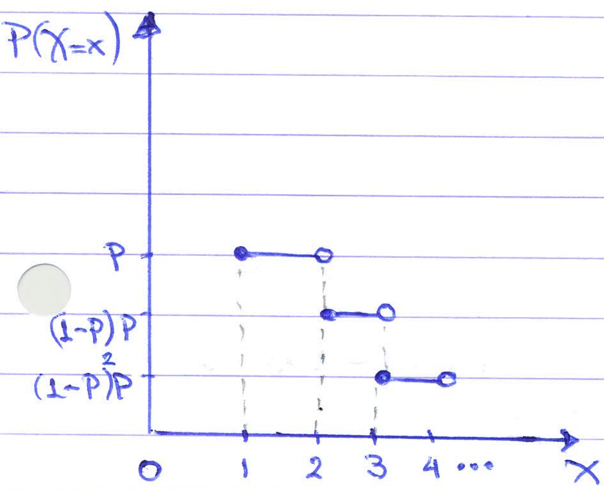
Πείραμα Τύχης: Ρίχνω το νόμισμα μέχρι 1η Κ

$$\Omega = \{ \underset{\downarrow \atop 1}{K}, \underset{\downarrow \atop 2}{\Gamma K}, \underset{\downarrow \atop 3}{\Gamma\Gamma K}, \underset{\downarrow \atop 4}{\Gamma\Gamma\Gamma K}, \ldots \}$$

X = αριθμός ρίψης που ήρθε η Κ

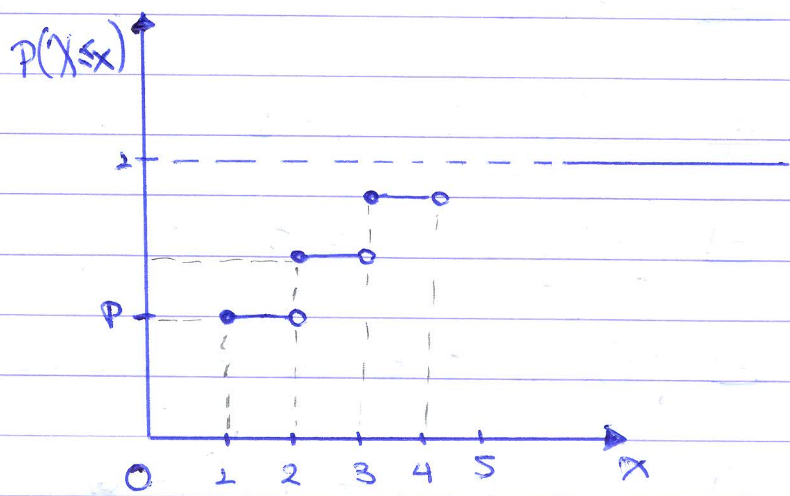
Συνάρτηση πιθανότητας

$P(X=x)$



Συνάρτηση κατανομής

$P(X \leq x)$



⑤ Συνάρτηση κατανομής

ορισμός

(Ω, A, P) χώρος πιθανότητας $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ.

Η συνάρτηση $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$

$x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x)$

λέγεται συνάρτηση κατανομής

⑥ Ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής

1) $F_X(x)$ είναι αύξουσα

2) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

4) $F_X(x)$ είναι δεξιά συνεχής $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0) = P(X \leq x_0)$

5) $\lim_{x \to x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$

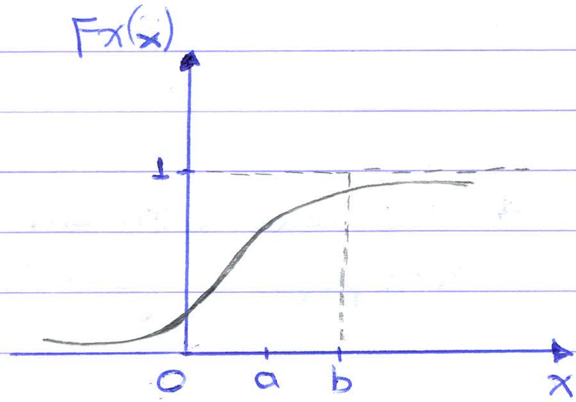
6) $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) - \lim_{x \to x_0^-} F_X(x) = P(X = x_0)$

7) $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$

$a<b$ $\quad P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$

$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

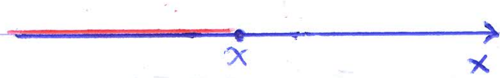
$P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$



$$P(X \le x) = F_X(x)$$
$$P(X < x) = F_X(x^-)$$

$$F_X(b) - F_X(a) = P(X \le b) - P(X \le a) = P(a < X \le b)$$

- $P(X \le x) = F_X(x)$



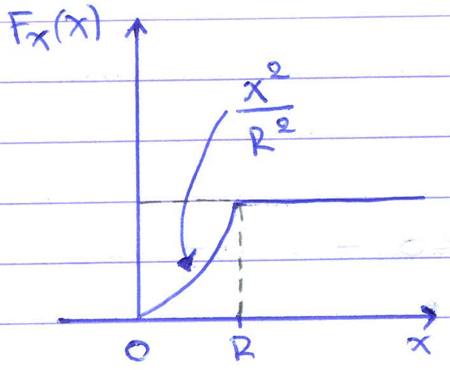
- $P(X < x) = F_X(x^-)$

- $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a^-)$

- $P(a \le X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$

⑦ Υπολογισμός με βάση την $F_X(x)$

$F_X(x) = P(X \le x)$ ⟶ Περιέχει όλη την πληροφορία για $P(X \in A)$



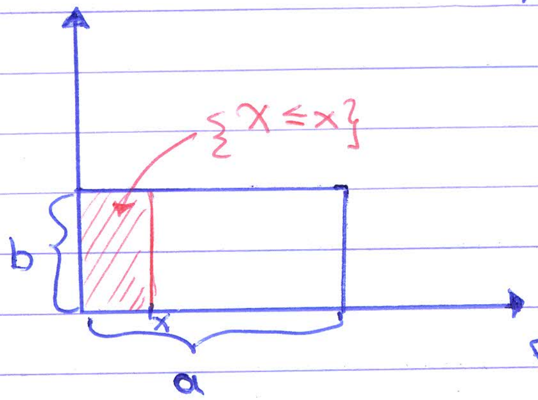
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{x^2}{R^2} & , 0 \le x \le R \\ 1 & , x>R \end{cases} \qquad R=1$$

$$P(X^2+5>8) = P(X^2>3) = P(X<-\sqrt{3} \text{ ή } X>\sqrt{3}) =$$
$$= P(X<-\sqrt{3}) + P(X>\sqrt{3})$$
$$= F_X(-\sqrt{3}^-) + 1 - F_X(\sqrt{3})$$
$$= 0$$

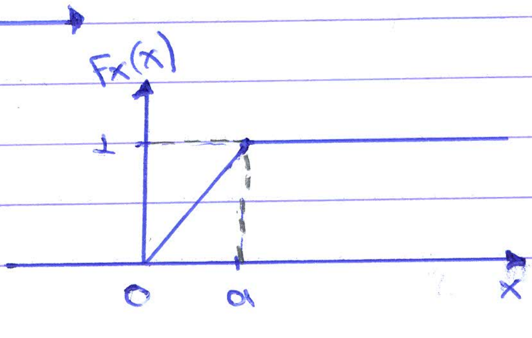
⑧ Παράδειγμα

Πείραμα τύχης : Επιλογή τυχαίου σημείου στο ορθογώνιο $[0,a] \times [0,b]$

X = τετμημένη του επιλ. σημείου



$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ (x \cdot b)/(a \cdot b) & , 0 \le x \le a \\ 1 & , x>a \end{cases}$$



⑨ Παράδειγμα

Πείραμα τύχης: Ρίχνω νόμισμα

K — 0€ κέρδος

Γ — Διαλέγω σημείο σε κυκλικό στόχο ακτίνας 1 και

x € κέρδος (όση η απόσταση του σημείου από το κ)

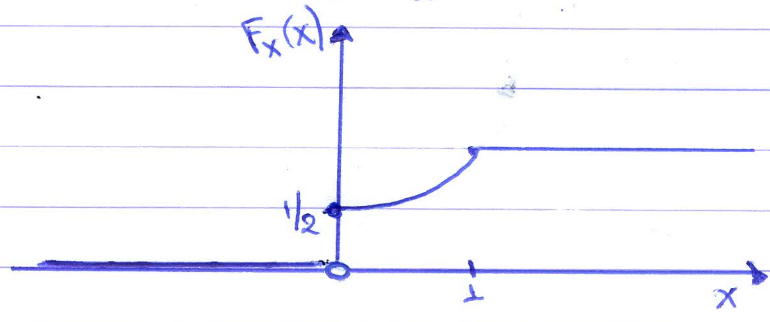
Y = κέρδος

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ (1+x^2)/2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases} \quad ⊛$$

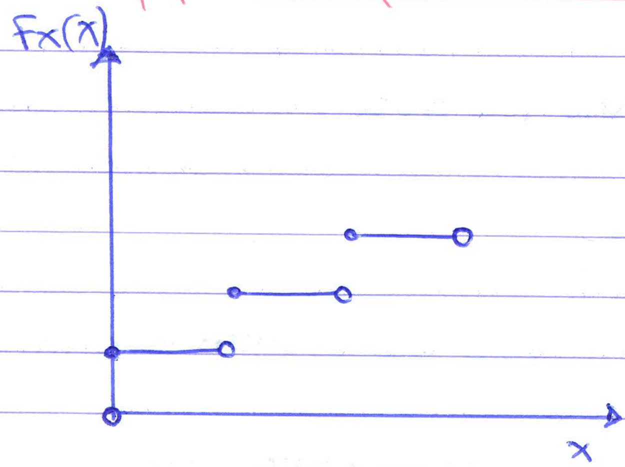
$x \in [0,1]$

$P(Y \le x) = P$ (φέρνω K ή (φέρνω Γ και επιλέγω σημείο στο δίσκο με απόσταση $\le x$)) $=$

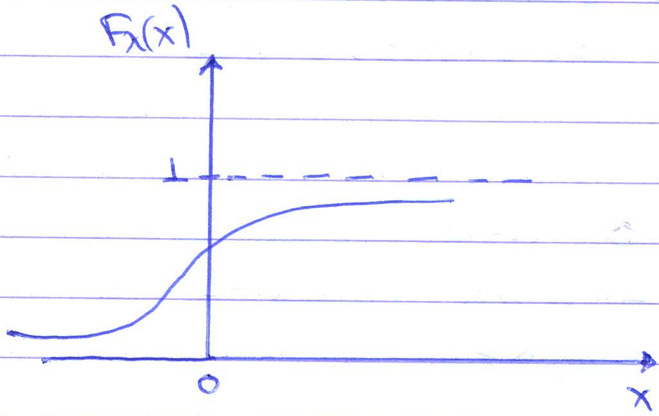
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot x^2 \quad ⊛$$



⑩ Μορφές Συνάρτησης κατανομής

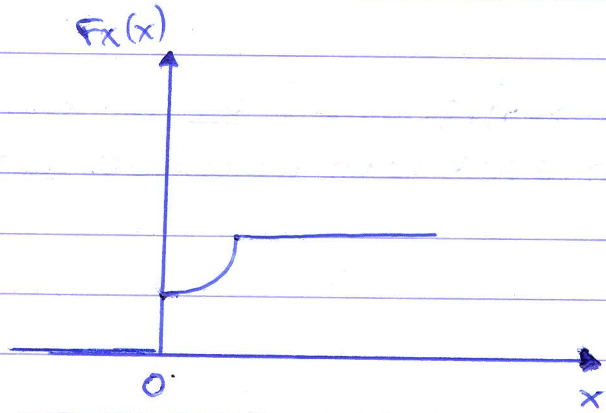


Σ.κ.
κλιμακωτή
(άλματα + σταθερή
μεταξύ αλμάτων) → ΔΙΑΚΡΙΤΗ



συνεχής → Συνεχής

παραγωγίσιμη → Απόλυτα Συνεχής



→ Μικτή

11/3/13

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

1. Ορισμός

Μια τυχαία μεταβλητή X θα λέγεται διακριτή αν $\exists\, x_0, x_1, x_2, \ldots$ ώστε $P(X \in \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}) = 1$

$f_X(x) = P(X = x) \rightsquigarrow$ συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.)

Ιδιότητες

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\sum_x f_X(x) = 1$

συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$

συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$

$\Rightarrow$ $f(x) = F(x) - F(x-)$

$F(x) = \sum_{x_k \leq x} f(x_k)$

2. Παράδειγμα

$X = \#$ πελατών σε τράπεζα σε μια μέρα

$$P(X = x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{άγνωστη}}}{c}\, \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

λ ← γνωστό

(i) $c = ;$

(ii) $P(X = 0) = ;$

(iii) $P(X \geq 2) = ;$

(iv) $P(X = 3 / X \geq 2)$

(i) $\sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} c\frac{\lambda^x}{x!} = 1 \Rightarrow c\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} = 1$

$\Rightarrow c = e^{-\lambda}$, άρα $P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \dots$

(ii) $P(X=0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

(iii) $P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{\infty} P(X=x) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$

(iv) $P(X=3 / X \geq 2) = \frac{P(X=3, X\geq 2)}{P(X\geq 2)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!}}{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}}$

↳ Ποτέ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ

3 Διαισθητικές Ερμηνείες της Μέσης Τιμής

1η: Μέσος όρος (Πεπερασμένο πλήθος - Επιλογή ατόμων)

Πεπερασμένο πλήθος με N άτομα.
X: χαρακτηριστικό

ΤΙΜΕΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ	0	1	2	3	…
# ατόμων που έχουν αυτή την τιμή	N_0	N_1	N_2	N_3	…

Τότε διαισθητικά: Μέση τιμή της X $= \frac{\overbrace{0+0+\dots+0}^{N_0} + \overbrace{1+1+\dots+1}^{N_1} + \overbrace{2+2+\dots+2}^{N_2} + \dots}{N}$

$= 0\frac{N_0}{N} + 1\cdot\frac{N_1}{N} + 2\cdot\frac{N_2}{N} + \dots = P(X=0) + 1P(X=1) + 2P(X=2) + \dots$

$\Downarrow$

Πρέπει να ορίσουμε μέση τιμή της $X = E[X] = \sum_x x P(X=x)$

2η: Κέντρο Βάρους

π.χ.

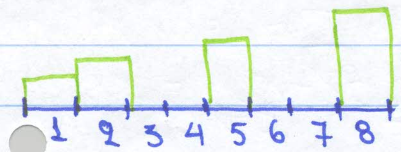
X → διακριτή Τυχαία Μεταβλητή

$P(X=0)=\frac{1}{10}$

$P(X=1)=\frac{2}{10}$

$P(X=5)=\frac{3}{10}$

$P(X=8)=\frac{4}{10}$



→ Αισθάνομαι ότι η μέση τιμή είναι ένας αριθμός μ ώστε:

$$\sum_x (x-\mu)P(X=x)=0 \iff$$

$$\sum_x x\,P(X=x)=\underbrace{\mu\sum_x P(X=x)}_{=1}$$

Άρα οδηγούμαι στον ίδιο ορισμό

3η: Επαναλαμβανόμενα Πειράματα

Έστω ένα παιχνίδι,

X: κέρδος σε μια επανάληψη του παιχνιδιού

Μέση τιμή του X → Μέσο κέρδος ανά επανάληψη αν παίξω πολλές φορές

$P(X=1)=\frac{1}{6}$

$P(X=0.2)=\frac{5}{6}$

⇒ 6 ζαριές → 1 (+1), 5 (−0.2)

↳ Ίδιος Μαθηματικός Ορισμός → $\sum_x x\,P(X=x)$

4. Ορισμός

Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $P(X=x)=P_X(x)$.
Η μέση τιμή, $E[X]$, της X ορίζεται μέσω της $E[X]=\sum_x x P_X(x)$
αν $\sum_x |x| P_X(x) < \infty \rightarrow$ Πεπερασμένο

5. Δείκτριες Τυχαίες Μεταβλητές - Μέση τιμή

Πείραμα Τύχης με δειγματικό χώρο Ω
$A \subseteq \Omega$: ενδεχόμενο
Δείκτρια τυχαία μεταβλητή του $A \rightarrow 1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$
$\omega \in \Omega$

π.χ.
Πείραμα Τύχης : Ρίψη δίκαιου ζαριού

X : ένδειξη 1ης Ρίψης
Y : Πλήθος ρίψεων μέχρι το 1ο "6"
Z : Άθροισμα των 2 πρώτων ρίψεων.

$$E[X]=\sum_{x=1}^{6} x P(X=x) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1}{6}\cdot\frac{(1+6)6}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$E[Y]=\sum_{y=1}^{\infty} y (Y=y) = \sum_{y=1}^{\infty} y \left(\frac{5}{6}\right)^{y-1}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 6$$

$$\sum_{y=0}^{\infty} t^y = t^0+t^1+t^2+\dots = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{y=1}^{\infty} y\, t^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$P(Z=2)=\frac{1}{36}$
$P(Z=3)=\frac{2}{36}$
$P(Z=4)=\frac{3}{36}$
$P(Z=5)=\frac{4}{36}$
$P(Z=6)=\frac{5}{36}$
$P(Z=7)=\frac{6}{36} \rightarrow E[Z]=\sum_{z=2}^{12} zP(Z=z)=\dots=7$
$P(Z=8)=\frac{5}{36}$
$P(Z=9)=\frac{4}{36}$
$P(Z=10)=\frac{3}{36}$
$P(Z=11)=\frac{2}{36}$
$P(Z=12)=\frac{1}{36}$

7. <u>Παράδειγμα</u>

Πείραμα Τύχης : Διαγωνιζόμενος απαντάει σε 2 ερωτήσεις

Γεωγραφία   Ιστορία

Απαντά στην 1η
Απαντά στη 2η μόνο αν απαντήσει σωστά στην 1η.

Πιθανότητα σωστής απάντησης στην Ιστορία $= P_1 = 40\%$
Πιθανότητα σωστής απάντησης στην Γεωγραφία $= P_2 = 60\%$

Κέρδος σωστής απάντησης στην Ιστορία $= u_1 = 100€$
Κέρδος σωστής απάντησης στην γεωγραφία $= u_2 = 80€$

Τι να απαντήσει πρώτα, Ιστορία ή Γεωγραφία ;

- Αν απαντήσει πρώτα στην Ιστορία

X: κέρδος

Τιμές της $X = 0, u_1, u_1+u_2$

Αντίστοιχη πιθανότητα $P(X=x) = 1-p_1,\ p_1\cdot(1-p_2),\ p_1\cdot p_2$ → πρέπει να αθροίζουν στο 1

$E[X] = 0\cdot(1-p_1) + u_1\cdot p_1(1-p_2) + (u_1+u_2)p_1p_2$

$E[X] = u_1p_1 + u_2p_1p_2$

- Αν αρχίσει με τη γεωγραφία

Y: κέρδος

$E[Y] = u_2p_2 + u_1p_1p_2$

Άρα συμφέρει να αρχίσει με ιστορία $\iff E[X] \geq E[Y] \iff$

$$u_1p_1 + u_2p_1p_2 \geq u_2p_2 + u_1p_1p_2 \iff \frac{u_1p_1}{1-p_1} \geq \frac{u_2p_2}{1-p_2}$$

12ο Μάθημα 13/03/13

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές
Μέση Τιμή - Διασπορά

① Παράδειγμα

X: Μηνιαίο εισόδημα ενός κατοίκου χώρα A
Y: —″— —″— —″— —— χώρα B

$E[X] < E[Y]$

- $P(Y=1) = \frac{999}{1000}$

$P(Y=1000001) = \frac{1}{1000}$

$E[Y] = 1 \cdot \frac{999}{1000} + 1000001 \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}999 + 1000{,}001 =$

$= 1001$

- $P(X=900) = \frac{1}{2}$

$P(X=1000) = \frac{1}{2}$

$E[X] = 900 \cdot \frac{1}{2} + 1000 \cdot \frac{1}{2} = 950$

② Ορισμοί

X διακριτή τ.μ. σε 6.π. $P_X(x) = P(X=x)$

Μέση τιμή: $E[X] = \sum_x x P_X(x)$ ← Μέτρο θέσης

Διασπορά: $Var[X] = E[(X-E[X])^2]$ ← Μέτρο διασποράς μεταβλητότητας

όταν $\sum_x x^2 P_X(x) < \infty$

③ Παράδειγμα

X	-1	0	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	-1	0	1
$P(Y=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

Z	-2	0	2
$P(Z=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E[X] = (-1)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0$$

$$E[Y] = (-1)\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{8} = 0$$

$$E[Z] = \dots = 0$$

$$Var[X] = E[(X - \overset{0}{E[X]})^2] = E[X^2] = 0\cdot P(X^2=0) + 1\cdot P(X^2=1) = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Var[Y] = E[(Y - \overset{0}{E[Y]})^2] = E[Y^2] = 0\cdot P(Y^2=0) + 1\cdot P(Y^2=1) = 0\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$Var[Z] = E[(Z - \overset{0}{E[Z]})^2] = E[Z^2] = 0\cdot P(Z^2=0) + 4\cdot P(Z^2=4) = 0\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

④ Τυπική απόκλιση

Τυπική απόκλιση της X $= SD(x) = \sigma_X = \sqrt{Var[X]}$

⑤ Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

X διακριτή τ.μ. με σ.π. $p_X(x) = P(X=x)$

$$g(x) \downarrow Y = g(x)$$

Τύπος για την $E[Y] = E[g(x)]$

⑥ Παράδειγμα

X τ.μ. με σ.π.

x	-3	-2	-1	0	1	4
$p_X(x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$

$g(x) = x^2$ $\qquad Y \equiv g(x) = x^2$ $\qquad E[Y] = \sum_y y\, P_Y(y)$, $P_Y(y) = P(Y=y)$

y	0	1	4	9	16
$P_Y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$

$P_X(x) \rightarrow P_X(y) \rightarrow E[Y]$

$$E[Y] = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{5}{16} + 4\cdot\frac{1}{8} + 9\cdot\frac{3}{16} + 16\cdot\frac{1}{8}$$

7 Θεώρημα

X διακριτή τ.μ. με σ.π. $p_X(x) = P_X(X=x)$ και $Y = g(X)$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$$

8 Συνέχεια Παραδείγματος 6

$$E[Y] = E[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x) = (-3)^2 \cdot \frac{3}{16} + (-2)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} +$$

$$+ 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{8} \circledast$$

(ίσο με το προηγούμενο)$^{\circledast}$

9 Απόδειξη Θεωρήματος

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot \underbrace{p_X(x)}_{= P(X=x)}$$

Απόδειξη:

$Y = g(X)$

$$p_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x: g(x)=y} P(X=x) = \sum_{x: g(x)=y} p_X(x)$$

$$E[g(x)] = E[Y] = \sum_y y\, p_Y(y) = \sum_y y \sum_{x: g(x)=y} p_X(x) =$$

$$= \sum_y \sum_{x: g(x)=y} g(x) \cdot p_X(x)$$

$$= \sum_x g(x) \cdot p_X(x)$$

(10) Προσοχή!!!

$$E[g(X)] \neq g(E[X])$$

π.χ. $E[X]=3 \not\Rightarrow E[X^2]=9$

(11) Βασικές ιδιότητες

1) $E[aX+b] = a \cdot E[X] + b$ (← γραμμ. μετασχηματισμός)

2) $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$

3) $SD[aX+b] = |a| SD[X]$

4) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Απόδειξη

1) $E[aX+b] = \sum_x (ax+b) \cdot p_X(x)$

$$= a \underbrace{\sum_x x\, p_X(x)}_{E[X]} + b \cdot \underbrace{\sum p_X(x)}_{1} = a \cdot E[X] + b$$

2) $Var[aX+b] = E[(aX+b-E[aX+b])^2]$

$$= E[(aX+\cancel{b} - aE[X] - \cancel{b})^2]$$

$$= E[a^2 \cdot (X - E[X])^2] = a^2 Var[X]$$

3) $SD(aX+b) = \sqrt{Var[aX+b]} = \sqrt{a^2 Var[X]} = |a| \cdot SD[X]$

4) $Var[X] = E[(X - \underbrace{E[X]}_{\mu})^2] = E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] =$

$$= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

(12) Παράδειγμα

X = θερμοκρασία σε °C
Y = —"— σε °F

$$Y = 32 + \frac{9}{5}X \Rightarrow E[Y] = 32 + \frac{9}{5}E[X]$$

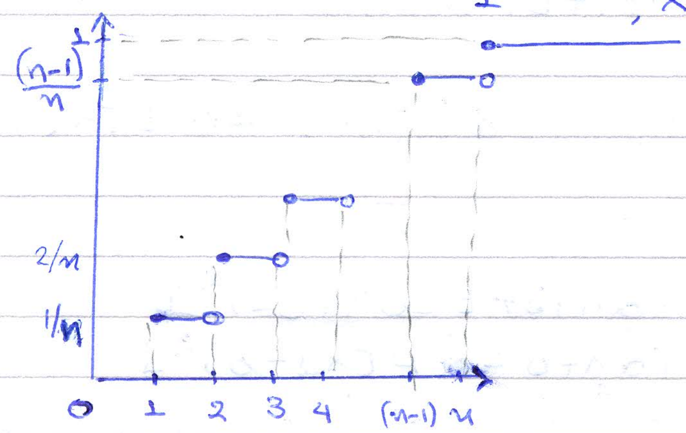
(13) Η Ομοιόμορφη διακριτή κατανομή

Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

X = αριθμός που επιλέχθηκε

σ.π. $P(X=x) = \frac{1}{n} \quad , x = 1, 2, \dots, n$

σ.κ. $P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \lfloor x \rfloor / n & , 1 \le x < n \\ 1 & , x \ge n \end{cases}$



$$E[X] = \sum_x x P(X=x) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$E[X^2] = \sum_x x^2 P(X=x) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Άρα $Var[X] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)\cdot(4n+2-3n-3)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$

13ο Μάθημα

① Υπενθυμίσεις

X διακριτή $\iff P(X \in \{x_0, x_1, \dots\}) = 1$

$F_X(x) = P(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$ ← συνάρτηση κατανομής

$P_X(x) = P(X = x)$ ← συνάρτηση πιθανότητας

$$E[X] = \sum_x x P_X(x)$$

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) P_X(x)$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$$

② Η ομοιόμορφη διακριτή κατανομή

Πείραμα Τύχης: Επιλογή αριθμού στο $\{1, 2, \dots, n\}$
X = Αριθμός που επιλέχθηκε

$P_X(x) = \frac{1}{n}$ $\quad x = 1, 2, \dots, n$

$E[X] = \frac{1+n}{2}$ $\qquad Var[X] = \frac{n^2-1}{2}$

③ Βασικά διακριτά πειράματα τύχης

Πείραμα Τύχης: Δοκιμές Bernoulli (επιτυχία → 1, αποτυχία → 0)

$X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες (έχουν την ίδια κατανομή)

$$P(X_i = x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ \underbrace{1-p}_{q}, & x = 0 \end{cases}$$

τυχαία μετ.

X_1 = # επιτυχιών στην $1^{η}$ δοκιμή → Bernoulli(p)

S_n = # επιτυχιών μέχρι την n δοκιμή → Bin(n,p)

T_1 = # δοκιμών ως την $1^{η}$ επιτυχία

T_n = # — // — — // — n επιτυχία

<u>π.χ.</u> Γίνεται το πείραμα και παρατηρώ:

$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ X_4 = 1,\ X_5 = 1,\ X_6 = 0,\ X_7 = 1,\ X_8 = 0,\ X_9 = 0,\ X_{10} = 1$

$X_1 = 0$

$S_3 = 0$, $S_7 = 3$, $S_{10} = 4$

$T_1 = 4$

$T_2 = 5$

$T_3 = 7$

④ Η κατανομή Bernoulli(p) $\longrightarrow X_1$

$$P(X_1 = x) = \begin{cases} p, & x=1 \\ 1-p, & x=0 \end{cases}$$

$$E[X_1] = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$$

$$\begin{aligned} Var[X_1] &= E[X_1^2] - E[X_1]^2 \\ &= 0^2 P[X_1=0] + 1^2 P[X_1=1] - p^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

⑤ Η κατανομή Bin(n,p) $\longrightarrow S_n$

$n=4$ Αποτελέσματα:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & (0,0,0,0) \xrightarrow{\pi\iota\theta} (1-p)^4 \\ & (1,0,0,0) \xrightarrow{\pi\iota\theta} p(1-p)^3 \\ & (0,1,0,0) \xrightarrow{\pi\iota\theta} p(1-p)^3 \\ & \underbrace{\quad \cdots \quad}_{16 \text{ αποτελέσματα}} \end{aligned}$$

$$P(S_4=2) = P(\{(1100), (1010), \ldots, (0011)\}) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$$

Γενικά n δοκιμές:

$$P(S_n = x) = P(\text{όλα τα αποτελέσματα } (x_1, x_2, \ldots, x_n)) \quad x=0,1,\ldots,n$$

$$x_i \in (0,1) \text{ του } \sum_{i=1}^{n} x_i = x$$

Άρα

$$P(S_n=x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$x=0,1,\ldots,n$$

• κάθε αποτέλεσμα έχει πιθανότητα $p^x(1-p)^{n-x}$

• # αποτελ. με x επιτυχ. $= \binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

$$E[S_n] = \sum_x x P(S_n = x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

<u>1η Μέθοδος</u>

$$\binom{n}{x} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}, \quad x \neq 0$$

$$E[S_n] = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n}{x} \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= n \cdot \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{\underbrace{x-1}_{=k}} p^x (1-p)^{n-k-1}$$

$$= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}$$

$$= n \cdot p (1-p)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \overset{*}{=} n \cdot p (1-p)^{n-1} \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{n-1} = np$$

(*) Διωνυμικό Θεώρημα $\quad (1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$

<u>2η Μέθοδος</u>

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} t^x = (1+t)^n \xRightarrow{d/dt} \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} t^{x-1} = n \cdot (1+t)^{n-1} \quad (*)$$

<u>Έχω</u> $\quad E[S_n] = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$$= p \cdot (1-p)^n \cdot \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^{x-1} \frac{1}{(1-p)^x}$$

$$= \frac{p(1-p)^n}{(1-p)} \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^{x-1} \frac{1}{(1-p)^{x-1}} =$$

$$= p(1-p)^{n-1} \cdot \sum_{x-1}^{n} x \binom{n}{x} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x-1} = p(1-p)^{n-1} n \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{n-1} = np$$

$$Var[S_n] = E[S_n^2] - E[S_n]^2$$

$$E[S_n^2] = \sum_x x^2 P[S_n = x] = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

__1η Μέθοδος__

$$\binom{n}{x} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}, \quad x \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$E[S_n^2] = \sum_{x=1}^{n} x^{\cancel{2}} \frac{n}{\cancel{x}} \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= n \cdot \sum_{x=1}^{n} x \binom{n-1}{\underbrace{x-1}_{=k}} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k}$$

$$= n \cdot p \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \underbrace{\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{\text{σ.π. της } Bin(n-1,p) \text{ για } k \text{ επιτυχίες}}$$

$$= n \cdot p \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{(n-1)p} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}}_{=1} \right)$$

$$= np\left((n-1)p + 1\right) = n \cdot (n-1) p^2 + np$$

$$Var[S_n] = E[S_n^2] - E[S_n]^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 =$$
$$= np(1-p)$$

__2η Μέθοδος__ (Διπλή παραγώγιση.)

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} t^x \xrightarrow{d^2/dt^2} \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} t^{x-2} \qquad \text{κ.λ.π.}$$

⑥ Η κατανομή Geom(p) $\longrightarrow T_1$

$X_1, X_2, \dots$ ακολουθία δοκιμών Bernoulli

$T_1 = \#$ δοκιμών ως την $1^{η}$ επιτυχία

$$P[T_1 = x] = P[X_1 = 0, X_2 = 0, \dots X_{x-1} = 0, X_x = 1]$$

$$= (1-p)^{x-1} p \qquad x = 1, 2, 3 \dots \text{(οποιοσδήποτε } x \in \mathbb{Z}^+)$$

$$E[T_1] = \sum_x x P[T_1 = x]$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} p \overset{*}{=} p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$*$ $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} t^x = \frac{1}{1-t}, \ |t|<1 \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x t^{x-1} = \frac{1}{(1-t)^2}, \ |t|<1$

$$Var[T_1] = E[T_1^2] - E[T_1]^2$$

$$E[T_1^2] = \sum_x x^2 P[T_1 = x] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 (1-p)^{x-1} p$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} t^x = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x t^{x-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \overset{\cdot t}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x t^x = \frac{t}{(1-t)^2} \Longrightarrow$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x^2 t^{x-1} = \frac{1\cdot(1-t)^2 + t\cdot 2(1-t)}{(1-t)^4} = \frac{1+t}{(1-t)^3}$$

Άρα $\displaystyle E[T_1^2] = p \cdot \frac{1+1-p}{(1-(1-p))^3} = \frac{2-p}{p^2}$

$$Var[T_1] = E[T_1^2] - E[T_1]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Συνοψίζοντας:

$$P[T_1 = x] = (1-p)^{x-1} p \quad , x = 1, 2, \ldots$$

$$E[T_1] = \frac{1}{p}$$

$$Var[T_1] = \frac{1-p}{p^2}$$

14ο Μάθημα

20/3/13

Ειδικές Διακριτές κατανομές

Είδαμε
- ✓ Ομοιόμορφη διακριτή
- ✓ Bernoulli
- ✓ Διωνυμική
- ✓ Γεωμετρική

Θα δούμε
- Αρνητική Διωνυμική
- Poisson
- Υπεργεωμετρική

① Πλαίσιο δοκιμών Bernoulli

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες ισόνομες

$P(X_i=1)=p \leftarrow$ πιθανότητα επιτυχίας
$P(X_i=0)=1-p \leftarrow$ πιθανότητα αποτυχίας

$S_1 = X_1 = \#$ επιτυχιών σε 1 δοκιμή
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = \#$ επιτυχιών σε n δοκιμές

$T_1 = \#$ δοκιμών ως την $1^{η}$ επιτυχία
$T_n = \#$ δοκιμών ως την $n^{η}$ επιτυχία

- $S_1 \sim Bernoulli(p)$ (η S_1 ακολουθεί την Bernoulli)

$E[S_1]=p$
$Var[S_1]=p(1-p)$

- $S_n \sim Bin(n,p)$

$P[S_n=i] = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad 0 \le i \le n$
$E[S_n]=np$
$Var[S_n]=np(1-p)$

- $T_1 \sim Geom(p)$

$P[T_1=i] = (1-p)^{i-1}p, \; i \geq 1$
$E[T_1] = \frac{1}{p}$
$Var[T_1] = \frac{1-p}{p^2}$

② Η αρνητική διωνυμική $NegBin(n,p)$

$$\{T_n = i\} : \underbrace{\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}^{\substack{n-1 \text{ επιτυχ. } ``1" \\ i-n \text{ αποτ. } ``0"}}\ \overset{\text{σίγουρα επιτυχία}}{``1"}}_{i\text{-θέσεις}}$$

- Ποια είναι η πιθανότητα του αποτελέσματος $\underbrace{11\ldots1}_{(n-1)}\underbrace{00\ldots0}_{(i-n)}1$

Είναι $p^n(1-p)^{i-n}$

και το # αποτελεσμάτων είναι $\binom{i-1}{n-1}$

$T_n \sim NegBin(n,p)$

$$P[T_n = i] = \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n} \quad , i \geq n$$

$$E[T_n] = \sum_{i=n}^{\infty} i P[T_n = i]$$

$\binom{i}{n} = \frac{i}{n}\binom{i-1}{n-1}$

$$= \sum_{i=n}^{\infty} i \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n}$$

$$= n \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n}$$

$$= \frac{np^n}{(1-p)^n} \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} (1-p)^i$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}, \quad |t|<1 \\ \displaystyle\binom{i}{n} = \frac{i(i-1)(i-2)\cdots(i-n+1)}{n!} \end{array}}$$

$$\overset{*}{=} \frac{n\cancel{p^n}}{\cancel{(1-p)^n}} \frac{\cancel{(1-p)^n}}{\cancel{p^{n+1}}} = \frac{n}{p}$$

$$(*) \quad \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t} \xRightarrow{d^n/dt} \sum_{i=n}^{\infty} i(i-1)(i-2)\cdots(i-n+1)\, t^{i-n} = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}$$

$$\xRightarrow{\times t^n/n!} \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} t^i = \frac{t^n}{(1-t)^{n+1}}$$

$$\mathrm{Var}[T_n] = E[T_n^2] - E[T_n]^2$$

$$E[T_n^2] = \sum_{i=n}^{\infty} i^2 \, P[T_n = i]$$

$$= \sum_{i=n}^{\infty} i^2 \binom{i-1}{n-1} p^n (1-p)^{i-n}$$

$$= n \sum_{i=n}^{\infty} i \binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n}$$

$$= n \left(\sum_{i=n}^{\infty} (i+1) \binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n} - \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n} \right)$$

$$= n \left((n+1) \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i+1}{n+1} p^n (1-p)^{i-n} - \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} p^n (1-p)^{i-n} \right)$$

$$= \dots$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i = (1+t)^n \qquad \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}}$$

$$\mathrm{Var}[T_n] = \frac{n(1-p)}{p}$$

③ Άλλες Γεωμετρικές και Αρνητικές Διωνυμικές Κατανομές

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες ισόνομες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p

$T_1 = \#$ δοκιμών ως την 1^{η} επιτυχία $\rightarrow Geom(p)$ στο $\{1,2,\ldots\}$

$T_n = \#$ — // — n^{η} — // — $\rightarrow NegBin(n,p)$ στο $\{n, n+1, \ldots\}$

$T_1' = \#$ αποτυχιών ως την 1^{η} επιτυχία $\rightarrow Geom(p)$ στο $\{0,1,\ldots\}$

$T_n' = \#$ — // — — // — n^{η} — // — $\rightarrow NegBin(n,p)$ στο $\{0,1,\ldots\}$

$$T_1' = T_1 - 1$$
$$T_n' = T_n - n$$

$$P[T_1' = i] = P[T_1 = i+1] = (1-p)^i \cdot p$$

$$E[T_1'] = E[T_1] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

$$Var[T_1'] = Var[T_1] = \frac{1-p}{p^2}$$

$$E[T_n'] = E[T_n] - n$$

$$Var[T_n'] = Var[T_n]$$

④ Η κατανομή Poisson

Κίνητρο: Προσέγγιση $Bin(n,p)$ για n μεγάλο και p μικρό

X = # επιτυχιών σε μία $Bin(n,p_n)$
ώστε $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=i) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{i} p_n^i (1-p_n)^{n-i}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$= \frac{\lambda^i}{i!} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}}_{1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-i}}_{1}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

Ορισμός:
Μία τ.μ. Z με τιμές στο $\{0,1,\dots\}$
με συνάρτηση πιθανότητας
$$P(Z=i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i=0,1,\dots$$

λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ.

Εφαρμογές:
Z = # ατυχημάτων που φθάνουν στο νοσοκομείο
τυπογραφικών λαθών σε ένα βιβλίο
σεισμών σε χρονικό διάστημα

~ Poisson

$$E[Z] = \sum_i i\,P[Z=i] = \sum_{i=\cancel{0}\,1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{(i-1)!} \qquad \underline{i-1=k}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = \lambda$$

$$Var[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2$$

$$E[Z^2] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 P[Z=i]$$

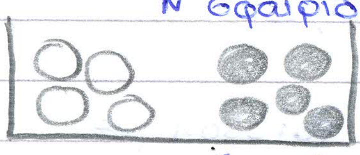
$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{k!} =$$

$$= \lambda \cdot \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{E[Z]} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{=1}\Big) = \lambda(\lambda+1)$$

<u>Άρα</u> $Var[Z] = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$

5 <u>Δειγματοληψία με/χωρίς επανάθεση από κάλπη</u>

N σφαιρίδια



$\longrightarrow$ Επιλέγω n σφαιρίδια

m άσπρα, $(N-m)$ μαύρα

$X = \#$ άσπρων σφαιριδίων

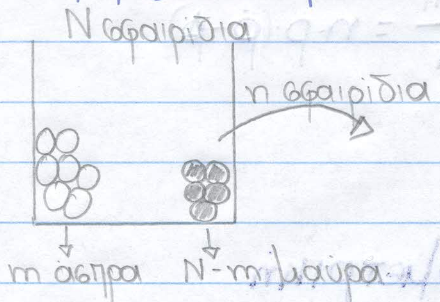
$\xrightarrow{\text{με επανάθεση}}$ $X \sim Bin(n, \frac{m}{N})$

$\xrightarrow{\text{χωρίς επανάθεση}}$ $X \sim Hypergeom(n, N, m)$

27/3/13

Διακριτές Κατανομές - Ασκήσεις

1. Υπεργεωμετρική Κατανομή - Διωνυμική Κατανομή



1η Περίπτωση: Με επανάθεση

$X = \#$ άσπρων σφαιριδίων

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, \frac{m}{N})$

$X_i = \begin{cases} 1, \text{το } i \text{ σφαιρίδιο λευκό} \\ 0, \text{το } i \text{ σφαιρίδιο μαύρο} \end{cases}$

ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{m}{N}$

2η Περίπτωση: Χωρίς επανάθεση

$X = \#$ άσπρων σφαιριδίων

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Hypergeom(n, N, m)$

όχι ανεξάρτητα

$$P(X=i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \le i \le n$$

Μέση Τιμή - Διασπορά

1η Περίπτωση: Με επανάθεση

$X \sim Bin\left(n, \frac{m}{N}\right)$, $E[X] = n \cdot \frac{m}{N} = n \cdot p$

$\frac{m}{N} \to p$

$$Var[X] = n \frac{m}{N} \cdot \frac{N-m}{N} = n \cdot p \cdot (1-p)$$

2η Περίπτωση: Χωρίς επανάθεση

Κλειδί για υπολογισμούς στην υπεργεωμετρική

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{r}{i}\binom{s}{n-i} \to \text{Τύπος Cauchy}$$

$$\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} \overset{\text{από}}{\underset{\text{Cauchy}}{=}} \frac{\binom{\cancel{m}+N-\cancel{m}}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$$

$$E[X] = \sum_i i P(X=i) = \frac{\sum_{i=\cancel{0}\,1} i \binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} i \frac{m}{i}\binom{m-1}{i-1}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^{n} \binom{m-1}{\underbrace{i-1}_{k}}\binom{N-m}{n-i}$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m-1}{k}\binom{N-m}{n-1-k} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{m}{\binom{N}{n}}\binom{\cancel{m}-1+N-\cancel{m}}{n-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{m\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{m\cancel{\binom{N-1}{n-1}}}{\frac{N}{n}\cancel{\binom{N-1}{n-1}}} = n\frac{m}{N}$$

ίδιο με την 1η

$$Var[X] = n\frac{m}{N}\cdot\frac{N-m}{N}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$$

- Για $n=1$

1η Περιπτωση $\equiv$ 2η Περιπτωση

- Για $n=N$

2η περιπτωση : $Var[X]=0$, $E[X]=m$

2. Αθροισματα - Σειρές για υπολογισμους Μέσων τιμών

(i) Uniform $(\{1,2,\dots n\})$ $\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(ii) Bin$(n,p) \longrightarrow \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^i = (1+t)^n$

(iii) Geom(p)

NegBin(n,p) $\longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}$, $|t|<1$

(iv) Poisson$(\lambda) \longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!} = e^t$

(v) HyperGeom$(n,N,m) \longrightarrow \sum_{i=0}^{n}\binom{r}{i}\binom{s}{n-i} = \binom{r+s}{n}$ Cauchy