29/3/13

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

1. Ορισμός

Μια τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέγεται (απόλυτα) συνεχής αν υπάρχει f: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της X:

(i) $f(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{R}$
(ii) $P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$

2. Ιδιότητες της σ.π.π.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

2. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$
(δεν μας νοιάζει το διάστημα αν είναι κλειστό, ανοιχτό, ημίκλειστο)

3. $P(X = x) = 0$

4. Η σ.π.π. μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες από το 1.

5. $P(x < X < x+\delta x) \ \int_x^{x+\delta x} f(u)\,du \overset{f: \text{συνεχής}}{\simeq} f(x)\cdot\delta x, \ \delta x \to 0^+$ (μικρό)

$$f(x) \simeq \frac{P(x < X < x+\delta x)}{\delta x}$$

$$f(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x+\delta x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x}$$

Π.χ.
X τυχαία συνεχής μεταβλητή με $f(8)=3$
$P(8 \leq X \leq 8.01) \simeq f(8) \cdot 0{,}01 = 3 \cdot 0.01 = 0.03$

6. Σχέση συνάρτησης κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Σ.Κ. $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

Σ.Π.Π. $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$

3. Μέση Τιμή - Διασπορά συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

X συνεχής τυχαία μεταβλητή με Σ.Π.Π. $f_X(x)$

Ορίζουμε

$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$, όταν $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) < \infty$

$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$

$\sigma_X = S.D.[X] = \sqrt{Var[X]}$
↳ τυπική απόκλιση

4. Ιδιότητες

X συνεχής τυχαία μεταβλητή με Σ.Π.Π. $f_X(x)$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$

ii) $E[aX+b] = aE[X]+b$

(iii) $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$

(iv) $SD[aX+b] = |a| SD[X]$

(v) $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

5. Εναλλακτικός υπολογισμός της μέσης τιμής για συνεχείς μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές

$(f_X(x)=0,\ x<0)$

• X συνεχής μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f_X(x)$ και σ.κ. $F_X(x)$ τότε $E[X] = \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty (\underbrace{1-F_X(x)}_{\bar{F}_X(x)})dx$

συνάρτηση επιβίωσης ή συνάρτηση αξιοπιστίας.

Απόδειξη

$$E[X] \overset{\text{ορσ.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \overset{X\geq 0}{=} \int_0^\infty x f_X(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x du\, f_X(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \boxed{\int_u^\infty f_X(x)dx}\, du$$

ολοκλήρωμα από u και πάνω

$P(X \geq u) = 1 - F_X(u)$

S.O.S.

6. Άσκηση

X συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} c\cdot x(3-x) \\ 0 \le x \le 3 \\ 0, \text{διαφορετικά} \end{cases}$

άγνωστη σταθερά

(i) $c = ;$
(ii) $E[X] = ;$
(iii) $Var[X] = ;$
(iv) $P(X \ge 1 / X \in [-1, 2]) = ;$
(v) $P(X \ge 1 / X \in [0, 4]) = ;$

(i) $f_X(x) \ge 0, \; x \in \mathbb{R} \Rightarrow c \ge 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^3 c\cdot x(3-x)\,dx = 1 \Rightarrow c\int_0^3 (3x - x^2)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow c\left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{3} = 1$$

$$\Rightarrow c\left(3\frac{9}{2} - \frac{27}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{6}{27}}$$

(ii) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$

$$= \int_0^3 \frac{6}{27} x^2 (3-x)\,dx$$

$$= \ldots$$

(iii) $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 \rightarrow$ γνωστό από (ii)

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^3 \frac{6}{27} x^3 (3-x)\,dx = \ldots$$

(iv) $$P(X \ge 1 / X \in [-1, 2]) = \frac{P(1 \le X \le 2)}{P(-1 \le X \le 2)} = \frac{\int_1^2 \frac{6}{27} x(3-x)\,dx}{\int_0^2 \frac{6}{27} x(3-x)\,dx} = \ldots$$

(γ) $P(X\geq 1 / X\in[0,4]) = \dfrac{P(1\leq X\leq 4)}{P(0\leq X\leq 4)=1} = P(1\leq X\leq 4)$

$$= \int_1^4 f_X(x)\,dx = \int_1^3 \frac{6}{27}x(3-x)\,dx + \int_3^4 \cancel{0}\,dx = \dots$$

S.O.S.

7. Άσκηση

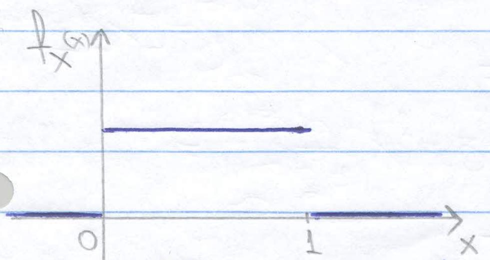
X συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$Y = X^2$, $Z = e^X$

σ.κ. $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $F_Z(z)$

σ.π.π. $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_Z(z)$

$E[X]$, $E[Y]$, $E[Z]$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \int_0^x du = x, & 0\leq x\leq 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$Z = e^X$ $\quad F_Z(z) = P(Z\leq z) = P(e^X \leq z) = P(X \leq \ln z)$

$$= F_X(\ln z) = \begin{cases} 0, & \ln z<0 \\ \ln z, & 0\leq \ln z\leq 1 \\ 1, & \ln z>1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z<1 \\ \ln z, & 1\leq z\leq 1 \\ 1, & z>e \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z\in[1,e] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(Η πυκνότητα δεν είναι μοναδική)

$$E[Z]=\int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\,dz = \int_1^e \cancel{z}\cdot\frac{1}{\cancel{z}}\,dz = e-1$$

ή

$$E[Z]=\int_0^{\infty}(1-F_Z(z))\,dz = \int_0^1 1\,dz + \int_1^e \ln z\,dz = \dots$$

ή

$$E[Z]=E[\overset{g(x)}{e^{X}}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x} f_X(x)\,dx = \int_0^1 e^{x}\,dx = e-1.$$

1/4/13

Ειδικές Συνεχείς Κατανομές

1. Γραμμική συνάρτηση συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

X συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.κ. $F_X(x)$ και σ.π.π. $f_X(x)$

$Y = aX + b$, $F_Y(y) = ;$ $\quad E[X] = aE[X] + b$

$f_Y(y) = ;$ $\quad Var[X] = a^2 Var[X]$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX + b \le y) = P(aX \le y - b) = \begin{cases} P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}, & a>0 \\ -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a}, & a<0 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}$$

2. Η ομοιόμορφη κατανομή στο $[a,b]$

Unif$([a,b])$ Πείραμα Τύχης: Επιλογή σημείου στο $[a,b]$

X: σημείο Επιλογής

$$\text{σ.π.π. } f_X(x) = \begin{cases} c, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$f_X(x) \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_a^b c\,dx = 1 \Rightarrow c(b-a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$

$X \sim \text{Uniform}([0,1])$

$\Downarrow a<b$ $\Rightarrow$ Παραμένει ομοιόμορφη αλλά αλλάζει το διάστημα

$Y = (b-a)X + a \sim \text{Uniform}([a,b])$

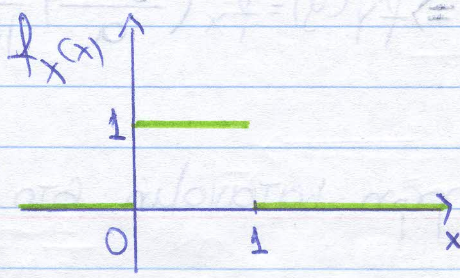
Απόδειξη

$X \sim \text{Uniform}([0,1]) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

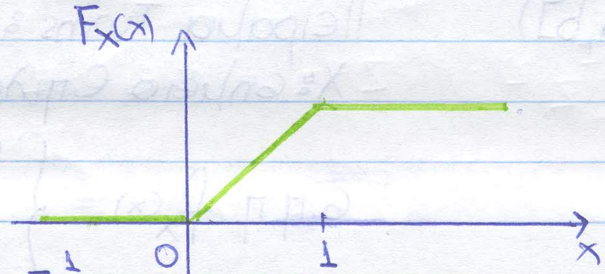
$\Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) \cdot \frac{1}{|b-a|} = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & y \in (a,b) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Εστω $X \sim \text{Uniform}([0,1])$

$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x>1 \end{cases}$



$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}$

$E[X^2] = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{3}$, $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Αν $Y \sim Uniform([a,b])$

$$Var[Y] = (b-a)^2 \, Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$E[Y] = (b-a)E[X] + a = \frac{a+b}{2}$$

3. Η εκθετική κατανομή

Πείραμα: χρόνος ζωής εξαρτήματος (χωρίς γήρανση)

$$\lambda_X(t) = \lim_{\delta t \to 0^+} \frac{P(t < X \le t + \delta t \mid X > t)}{\delta t} = \frac{\boxed{\lim_{\delta t \to 0^+} \frac{P(t < X \le t+\delta t)}{\delta t}}^{= f_X(t)}}{P(X>t)} \quad P(X>t) = 1 - F_X(t)$$

↳ Ρυθμός βλάβης ή θανάτου μιας τυχαίας μεταβλητής $X \geq 0$ τη στιγμή t

Αν θέλουμε X τυχαία μεταβλητή με $\lambda_X(t) = \lambda$ σταθερό

$$\lambda_X(t) = \lambda \iff \frac{f_X(t)}{P(X>t)} = \lambda$$

Έστω $g(t) = P(X>t)$ $\iff \frac{-g'(t)}{g(t)} = \lambda$

$\lambda_X(t) = \lambda$

$g(t) = 1 - F_X(t)$ $\iff \frac{g'(t)}{g(t)} = -\lambda$

$g'(t) = -f_X(t)$

$$\iff \frac{d}{dt}(\ln g(t)) = -\lambda$$

$$\iff \ln g(t) - \cancel{\ln g(0)} = -\lambda t$$

$$\iff \ln g(t) = -\lambda t$$

$$\iff g(t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

Αν Χ: χρόνος ζωής χωρίς γήρανση με ρυθμό βλάβης (θανάτου) λ.

τότε $P(X>t) = e^{-\lambda t}$, $t>0$.

$$F_X(t) = \underset{t>0}{1-e^{-\lambda t}} = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

↳ εκθετική με παράμετρο λ

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ορισμός

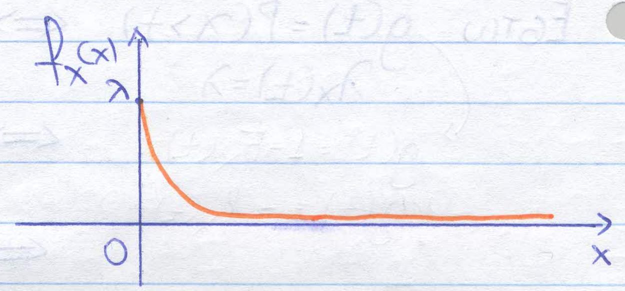
Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με σ.κ. $F_X(\lambda) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

και σ.π.π. $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$ λέγεται εκθετική με

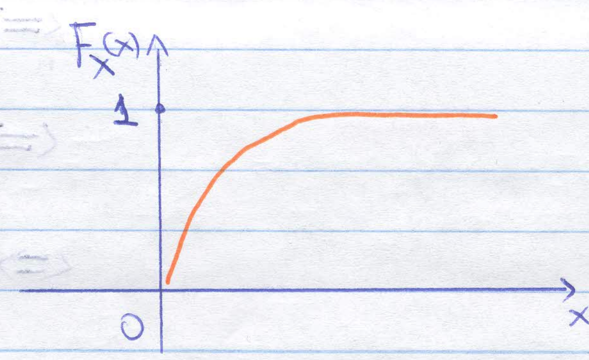
παράμετρο λ (exp(λ)).

$X \sim \exp(\lambda)$

σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$$E[X^n] = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty x^n (-e^{-\lambda x})' dx$$

$$= \left[x^n e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{n}{\lambda} \int_0^\infty x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}] = \dots = \frac{n!}{\lambda^n}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2!}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \quad \frac{1}{\lambda^2}$$

Ιδιοτητα αλλαγης κλιμακας

$$X \sim exp(\lambda),\ a > 0 \Rightarrow aX \sim exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

Αποδειξη

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \Longrightarrow f_{aX}(y) = f_X\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow f_X(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} e^{-\lambda/a\, y} & , y > 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αμνήμονη Ιδιοτητα

P(έχει ζήσει s, να ζήσει άλλο t)

$$X \sim exp(\lambda) \Rightarrow P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t) \quad , s, t > 0$$

Πράγματι, $P(X > s + t \mid X > s) = \dfrac{P(X > s+t, X > s)}{P(X > s)} = \dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}$

$$= e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

4. Η κατανομή Γάμμα

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή μη-αρνητική X με σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

με $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$. λέγεται τυχαία μεταβλητή με κατανομή Gamma (a, λ).

$a = 1 \Rightarrow \text{Gamma}(1, \lambda) \equiv \exp(\lambda)$.

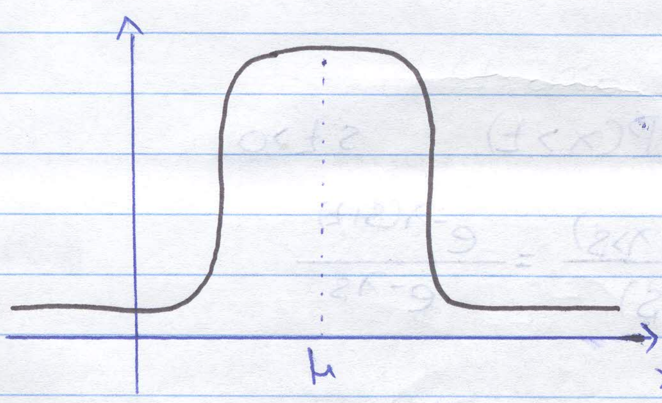
$a = n \in \{1, 2, \dots\} \Rightarrow \text{Gamma}(n, \lambda) \equiv \text{Erlang}(n, \lambda)$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$X \sim \text{Gamma}(a, \lambda) \Rightarrow E[X] = \frac{a}{\lambda}$, $Var[X] = \frac{a}{\lambda^2}$

$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$

5. Η κανονική κατανομή



3/4/13

Ειδικές Συνεχείς Κατανομές

Κανονική Κατανομή

1. Ορισμός

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$
λέγεται κανονική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\mu \sigma^2$ $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$

$F_X(x)$

Αν $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές τότε για μεγάλα n, η τυχαία μεταβλητή $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ έχει κατανομή που προσεγγίζεται από την κανονική

Η $f_X(x)$ είναι πράγματι σ.π.π.

(i) $f_X(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{y=\frac{x-\mu}{\sigma}}{\Longrightarrow} \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cancel{\sigma}\, dy$

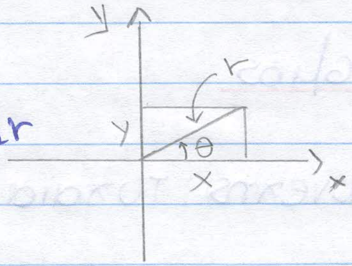
$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Αρκει να δείξουμε ότι $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \sqrt{2\pi}$

Πράγματι $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, dr$$



$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -r\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & r\sigma\upsilon\nu\theta \end{vmatrix} = r \qquad x = r\,\sigma\upsilon\nu\theta \quad y = r\,\eta\mu\theta$$

$$= 2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_{r=0}^{\infty} = 2\pi.$$

2. Γραμμική συνάρτηση κανονικής τυχαίας μεταβλητής

Θεώρημα

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R} \Rightarrow aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

Απόδειξη

Γενικά X συνεχής με σ.π.π. $f_X(x)$ τότε η $Y=aX+b$ συνεχής με σ.π.π. $f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{|a|}$

Εδώ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ οπότε $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

Άρα $Y = aX+b$, $f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|} =$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{(y-b)}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} \quad , y \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2(a\sigma)^2}} \quad , y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow Y \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$$

3. Τυποποίηση μιας κανονικής τυχαίας μεταβλητής

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}} \sim N(0,1)$$

$\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma} = Z \to$ Τυποποιημένη κανονική κατανομή

Επίσης $Z \sim N(0,1) \Rightarrow X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Z \sim N(0,1)$ Τυποποιημένη κανονική κατανομή

σ.π.π $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , x \in \mathbb{R}$

σ.κ. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad , x \in \mathbb{R}$

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{x=-\infty}^{\infty} = 0$$

↳ περιττή σε συμμετρικό διάστημα, άρα 0.

$$Var[Z] = E[Z^2] - \cancel{E[Z]}^{\,0\;2} = E[Z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{} \right)$$

$\quad = 1$

4. Μέση Τιμή και Διασπορά $N(\mu,\sigma^2)$

$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow E[Z]=0$$
$$Var[Z]=1$$

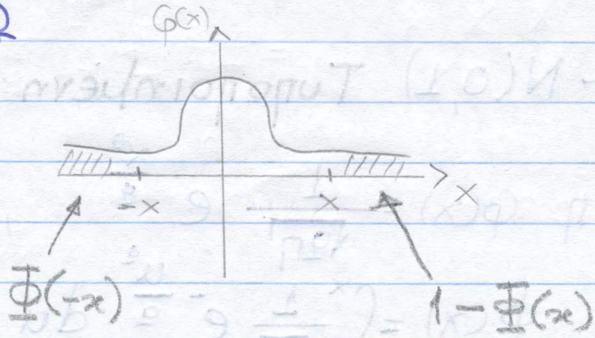
$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow X = \sigma Z + \mu$$

$$E[X] = \sigma \cancelto{0}{E[Z]} + \mu = \mu$$
$$Var[X] = \sigma^2 \cancelto{1}{Var[Z]} = \sigma^2$$

5. Υπολογισμοί στην Τυποποιημένη κανονική

6.Π.Π. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\,du$$



Πίνακες της $\Phi(x)$, $0 \leq x \leq 3$

$\Phi(3) = 0.999$

$\Phi(x) \simeq 1, \quad x \geq 3$

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

6. Υπολογισμοί στην $N(\mu, \sigma^2)$

Άσκηση

$X \sim N(\underbrace{3}_{\mu}, \underbrace{9}_{\sigma^2})$

(i) $E[X]$
(ii) $Var[X]$
(iii) $P(2 \le X \le 5)$
(iv) $P(X=5)$
(v) $P(X>0)$
(vi) $P(|X-3|>6)$

(i) $E[X] = \mu = 3$

(ii) $Var[X] = \sigma^2 = 9$

(iii) $X \sim N(3,9) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-3}{3} \sim N(0,1)$

$$P(2<X<5) = P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \underbrace{\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)}_{1-\Phi(0.33)}$$

$$\simeq \Phi(0.66) - 1 + \Phi(0.33)$$

$$= 0.3779$$

(iv) $P(X=5) = 0$

(v) $P(X>0) = P\left(\underbrace{\frac{X-3}{3}}_{Z\sim N(0,1)} > -\frac{3}{3}\right) = P(Z>-1) = 1-\Phi(-1) = \Phi(1) = 0.841$

(vi) $P(|X-3|>6) = P\left(\left|\frac{X-3}{3}\right| > \frac{6}{3}\right) = P(|Z|>2)$

$$= P(Z>2) + P(Z<-2)$$

$$= 1-\Phi(2) + \underbrace{\Phi(-2)}_{1-\Phi(2)}$$

$$= 2(1-\Phi(2))$$

$$= 0.456$$

7. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα De Moivre-Laplace

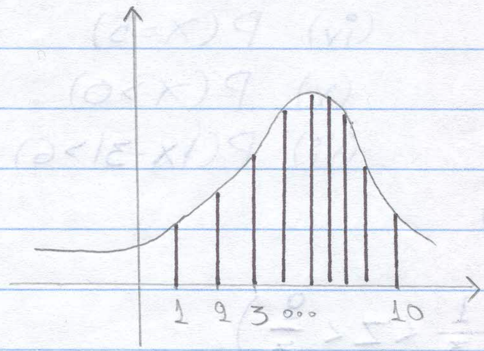
De Moivre (1733)

X = # επιτυχιών σε n δοκιμές Bernoulli με $p = \frac{1}{2}$

$Bin(n, \frac{1}{2})$

$P(X = x) = \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , 0 \le x \le n$

π.χ.



Για μεγάλα n: $Bin(n, \frac{1}{2}) \simeq N(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$

La Place (1812)

$X \sim Bin(n, p) \simeq N(np, np(1-p))$

δηλαδή $P(a \le X \le b) \simeq P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

$$= \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$