ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γεωγραφικά Συστήματα Πληροφοριών και Αρχές Τηλεπισκόπησης

Ενότητα: Αριθμητικές Μέθοδοι Επίλυσης Εξισώσεων, Αριθμητική Ολοκλήρωση

Γεώργιος Σκιάνης

Γεωλογίας και Γεωπεριβάλλοντος

1. Περιεχόμενα ενότητας

Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων (Η μέθοδος του σταθερού σημείου - Η μέθοδος Newton-Raphson) – Αριθμητική ολοκλήρωση

2. Σημειώσεις αριθμητικής ανάλυσης

Σε μια εξίσωση της μορφής $ax + b = 0$, η λύση, ως συνάρτηση των παραμέτρων a και b είναι γνωστή και δίδεται από τη σχέση $x = r = -b/a$. r είναι η ρίζα της εξίσωσης και, εκφραζόμενη ως συνάρτηση παραμέτρων, αποτελεί την **αναλυτική** λύση της εξίσωσης. Με βάση αυτήν την αναλυτική λύση, είναι δυνατόν να υπολογιστεί και η **αριθμητική** λύση της εξίσωσης, για συγκεκριμένες τιμές των a και b. Για παράδειγμα η αριθμητική λύση της εξίσωσης $2x + 3 = 0$ είναι η $r = 1{,}5$.

Ωστόσο, στην πράξη, οι εξισώσεις για τις οποίες είναι γνωστή η αναλυτική λύση είναι λιγότερες από αυτές στις οποίες η αναλυτική λύση δεν είναι γνωστή. Για παράδειγμα για την εξίσωση $ax + b.e^x = 0$ δεν είναι γνωστή η αναλυτική λύση. Το ίδιο ισχύει και για πολλές άλλες εξισώσεις, που απαντώνται στις θετικές επιστήμες. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι δυνατή η εύρεση της αριθμητικής λύσης της εξίσωσης, όπου αντί για παραμέτρους υπεισέρχονται αριθμοί (π.χ. $-2x + 5e^x = 0$).

Ανάλογες παρατηρήσεις μπορούν να διατυπωθούν και ως προς τον προσδιορισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων. Για παράδειγμα η αναλυτική έκφραση για το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_c^d \sin x dx$ είναι γνωστή και ισχύει $\int_c^d \sin x dx = -(\cos b - \cos a)$. Όμως για το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_c^d \sqrt{(1+\sin^2 x)}dx$ δεν έχει βρεθεί αναλυτική έκφραση. Ωστόσο για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{(1+\sin^2 x)}dx$ είναι δυνατός ο αριθμητικός υπολογισμός, ακολουθώντας κάποιον κατάλληλο αλγόριθμο.

Αντικείμενο της **αριθμητικής ανάλυσης** είναι η αριθμητική επίλυση προβλημάτων για τα οποία δεν είναι γνωστή η αναλυτική λύση. Η εξεύρεση της αριθμητικής λύσης πραγματοποιείται με βάση κάποιον αλγόριθμο, που γενικά δεν οδηγεί στην ακριβή λύση του προβλήματος αλλά σε μια αριθμητική τιμή που είναι μια καλή προσέγγιση της ακριβούς λύσης.

Η αριθμητική ανάλυση αξιοποιείται σε διαφόρους τύπους προβλημάτων, όπως:

- Υπολογισμός ριζών μη γραμμικών εξισώσεων.
- Επίλυση γραμμικών συστημάτων εξισώσεων με πολλούς αγνώστους.
- Επίλυση συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων.
- Παρεμβολή με σκοπό τον υπολογισμό ενδιάμεσων τιμών από ένα σύνολο δεδομένων.
- Υπολογισμός παραγώγων συναρτήσεων, ακόμα και όταν είναι γνωστές μόνο διακεκριμένες τιμές των συναρτήσεων αυτών.
- Υπολογισμός ολοκληρωμάτων.
- Επίλυση διαφορικών εξισώσεων.
- Εύρεση συναρτήσεων που να προσεγγίζουν δεδομένες τιμές ενός μεγέθους.
- Υπολογισμός προσεγγιστικών τιμών συναρτήσεων.

Στις σημειώσεις αυτές, που λόγω της δομής της ύλης του μαθήματος «Πληροφορική και Γεωγραφικά Συστήματα Πληροφοριών» είναι περιορισμένες ως προς την έκταση, θα διαπραγματευτούμε με συντομία μεθόδους αριθμητικής επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων μιας μεταβλητής, καθώς και υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων.

2.1 Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων

Υπάρχει ένα μεγάλο φάσμα μεθόδων αριθμητικής επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων (Gerald & Wheatley 1994). Εδώ θα σταθούμε στη **μέθοδο του σταθερού σημείου** (fixed point) και στη **μέθοδο Newton-Raphson**.

2.1.1 Η μέθοδος του σταθερού σημείου

Έστω η εξίσωση:

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο του σταθερού σημείου, το πρώτο βήμα για την εύρεση των ριζών της παραπάνω εξίσωσης είναι η επίλυση αυτής ως προς x, ώστε να προκύψει μια νέα εξίσωση της μορφής:

$$x = g(x) \qquad (2)$$

Η σχέση (2) λειτουργεί ως αναδρομικός τύπος για τον διαδοχικό υπολογισμό ποσοτήτων x_n ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) οι οποίες, με κατάλληλη επιλογή της αρχικής τιμής x_0, συγκλίνουν στη ρίζα r της εξίσωσης (1).

Επομένως ο αναδρομικός τύπος είναι:

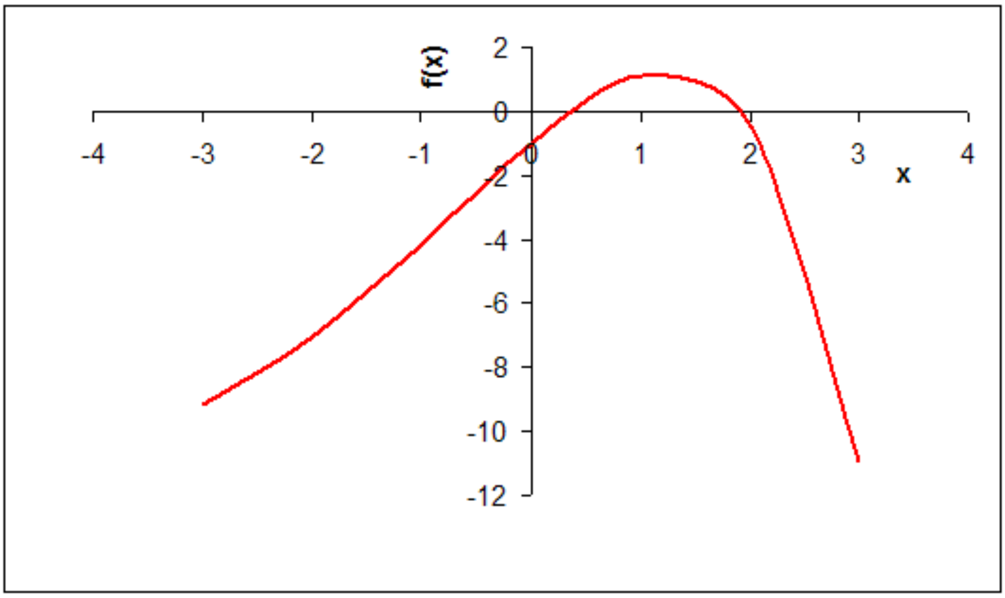
$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad (3)$$

Τα παραπάνω μπορούν να γίνουν περισσότερο κατανοητά με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Έστω ότι η f(x) είναι εξ ορισμού ίση με $3x + \sin x – e^x$, οπότε, ανακαλώντας τη σχέση (1), η εξίσωση προς επίλυση είναι η:

$$3x + \sin x – e^x = 0 \qquad (4)$$

Η γραφική παράσταση της f ως προς x παρουσιάζεται στο (σχ. 1).



Διάγραμμα 1. Γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x), όπως αυτή ορίζεται από το αριστερό μέλος της σχέσης (4)

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4) έχει μια ρίζα μεταξύ 0 και 1 και άλλη μια ρίζα κοντά στο 2.

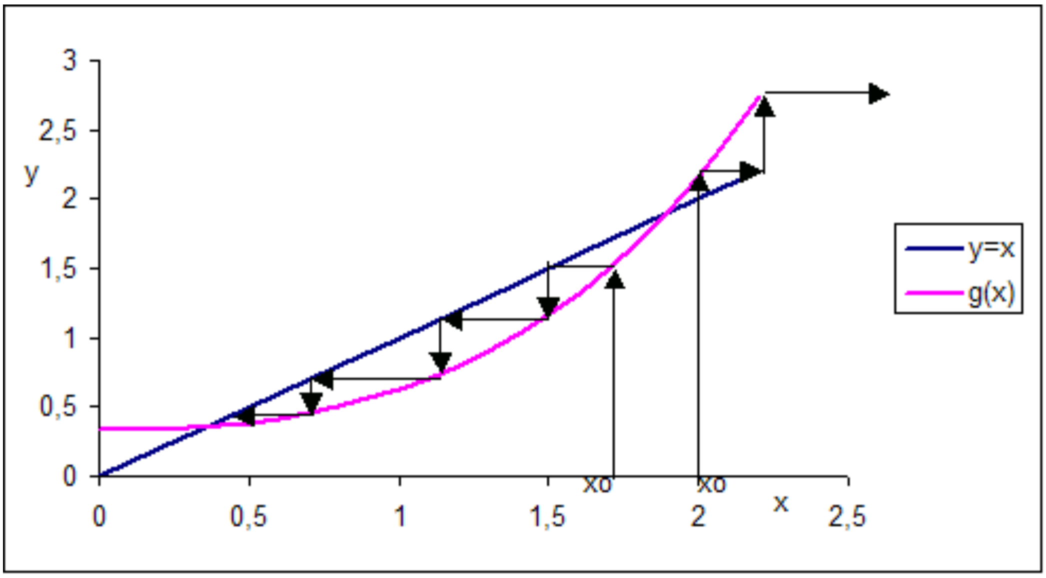
Σύμφωνα με τη μέθοδο του σταθερού σημείου, ο αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό των x_n προκύπτει από την επίλυση της σχέσης (4) ως προς x και είναι:

$$x_{n+1} = -[\sin x_n - \exp(x_n)]/3 \qquad (5)$$

Για να συγκλίνει ο αναδρομικός τύπος της σχέσης (5), θα πρέπει να τεθεί μια αρχική τιμή x_0 που να μην είναι πολύ μακριά από τη ρίζα. Η γραφική παράσταση του (σχ. 1) μπορεί να βοηθήσει στην επιλογή του κατάλληλου x_0, που θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι ίσο με 1. Θέτοντας λοιπόν αρχική τιμή x_0 = 1, παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών x_n, με βάση την αναδρομική σχέση (5) (οι υπολογισμοί έγιναν με το λογισμικό Excel):

α/α	x_n
1	0,625604
2	0,427929
3	0,37303
4	0,362563
5	0,360779
6	0,360481
7	0,360432
8	0,360423
9	0,360422
10	0,360422
11	0,360422

Παρατηρούμε ότι από την $9^η$ επανάληψη και μετά (n=9) οι τιμές x_n σταθεροποιούνται στο 0,360422. Η τιμή αυτή μηδενίζει την εξίσωση (4), όπως εύκολα μπορεί να επαληθευτεί, επομένως είναι ρίζα της εξίσωσης. Η ίδια τιμή σύγκλισης βρίσκεται για κάπως μεγαλύτερες (για παράδειγμα x_0 = 1,7) και για κάπως μικρότερες τιμές της μονάδας.



Διάγραμμα 2. Αναπαράσταση της συμπεριφοράς της αναδρομικής σχέσης για x_0 = 1,7 και x_0 = 2.

Στο (σχ. 2) παρουσιάζεται γραφικά το πώς, με αρχική τιμή x_0 = 1,7, οι διαδοχικές τιμές x_n συγκλίνουν προς το 0,36022, που είναι η μία ρίζα της εξίσωσης (4) και που εντοπίζεται στο σημείο τομής της ευθείας y = x και της καμπύλης g(x). Ωστόσο για x_0 = 2 ή και μεγαλύτερο, η αναδρομική ακολουθία δεν συγκλίνει σε κάποια τιμή, όπως φαίνεται στο (σχ. 2).

Με τη μέθοδο του σταθερού σημείου κατέστη δυνατή η εύρεση της μιας μόνο ρίζας της εξίσωσης (4). Στη συνέχεια θα επιλυθεί αριθμητικά η ίδια εξίσωση με τη μέθοδο Newton-Raphson.

2.1.2 Η μέθοδος Newton-Raphson

Κατά τη μέθοδο Newton-Raphson η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (1) γίνεται μέσω της αναδρομικής ακολουθίας:

$$x_{n+1} = x_n – f(x_n)/f'(x_n) \qquad (6)$$

όπου f' είναι η παράγωγος της f ως προς x.

Επομένως η αναδρομική σχέση για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (4) είναι η:

$$x_{n+1} = x_n – [3x_n + \sin x_n – \exp(x_n)]/[3 + \cos x_n – \exp(x_n)] \qquad (7)$$

Θέτοντας x_0 = 1 και x_0 = 1,5 λαμβάνουμε τις παρακάτω ακολουθίες τιμών x_n:

α/α	x_n (x_0 = 1)	x_n (x_0 = 1,5)
1	1	1,5
2	-0,36638	2,219944
3	0,297311	1,962962
4	0,359134	1,894686
5	0,360421	1,89005
6	0,360422	1,89003
7	0,360422	1,89003

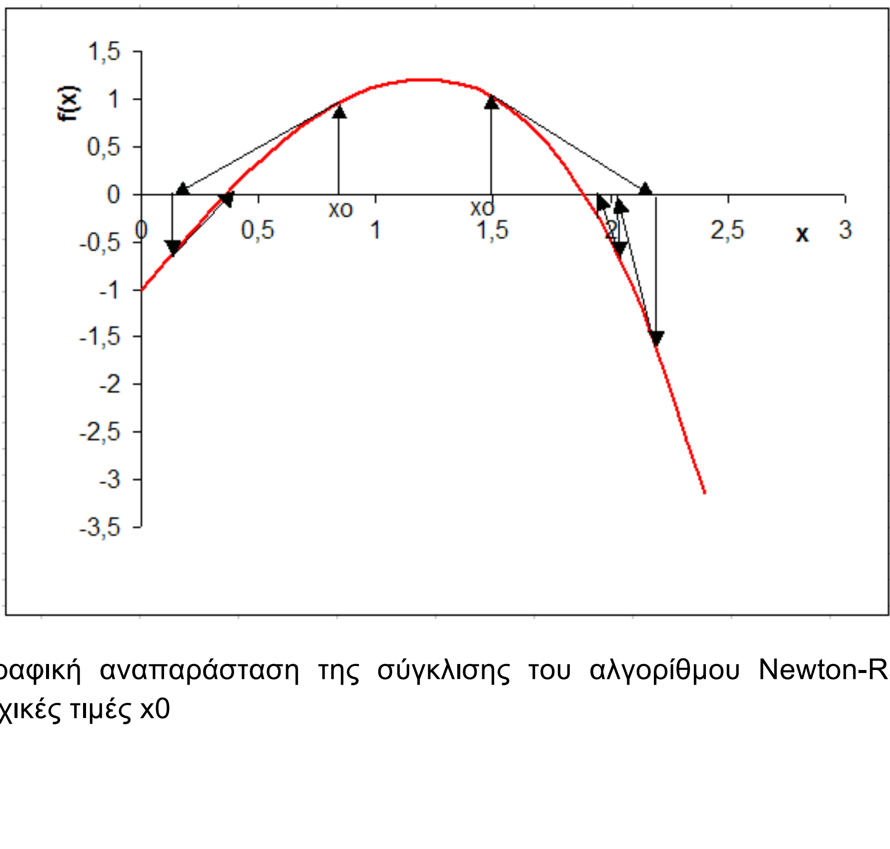
Για x_0 = 1 λαμβάνουμε τη ρίζα r = 0,364022 που είναι αυτή στην οποία έδωσε η μέθοδος του σταθερού σημείου. Ωστόσο η μέθοδος Newton-Raphson είναι ταχύτερη από αυτήν του σταθερού σημείου, καθώς η πρώτη προσδιορίζει τη ρίζα στην $5^η$ επανάληψη και η δεύτερη στην $9^η$ επανάληψη.

Για x_0 = 1,5 λαμβάνουμε τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (4), που δεν στάθηκα δυνατό να προσδιοριστεί με τη μέθοδο του σταθερού σημείου, και που είναι ίση με 1,89003.

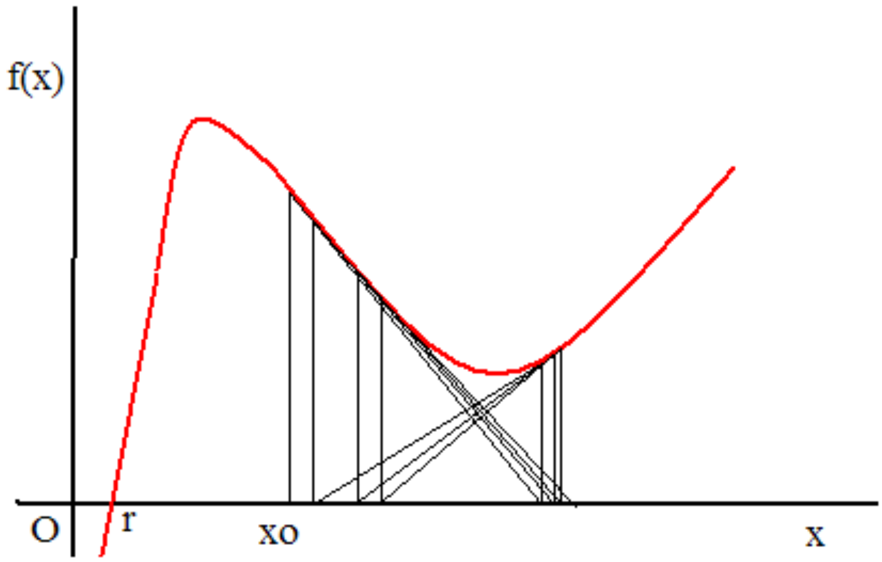
Στο (σχ. 3) αναπαριστάνεται γραφικά η διαδικασία σύγκλισης της αναδρομικής σχέσης (7) για x_0 = 1 και x_0 = 1,5.

Η ρίζα r = 1,89003 λαμβάνεται και για αρχική τιμή x_0 μεγαλύτερη του 1,5.

Από την παρουσίαση των δυο μεθόδων αριθμητικής επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων, μπορεί κανείς να εκτιμήσει ότι η μέθοδος Newton-Raphson είναι ταχύτερη και περισσότερο αξιόπιστη από αυτήν του σταθερού σημείου. Ωστόσο, όπως φαίνεται στο (σχ. 4), υπάρχουν περιπτώσεις όπου η μη κατάλληλη επιλογή αρχικής τιμής x_0 οδηγεί σε παλινδρόμηση της αναδρομικής ακολουθίας της σχέσης (6) γύρω από το τοπικό ελάχιστο, χωρίς να επιτευχθεί η σύγκλιση στη ρίζα r. Παρόλο λοιπόν που η μέθοδος Newton-Raphson είναι ίσως η συχνότερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος αριθμητικής επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων, είναι ενδεχόμενο να μην οδηγήσει στην εύρεση της λύσης, αν δεν έχει προσδιοριστεί η κατάλληλη τιμή x_0. Στην πράξη, όταν ο χρήστης διαπιστώνει αδυναμία σύγκλισης του αλγορίθμου στη ρίζα της εξίσωσης, δοκιμάζει άλλη αρχική τιμή x_0, ώστε να επιτευχθεί η σύγκλιση.



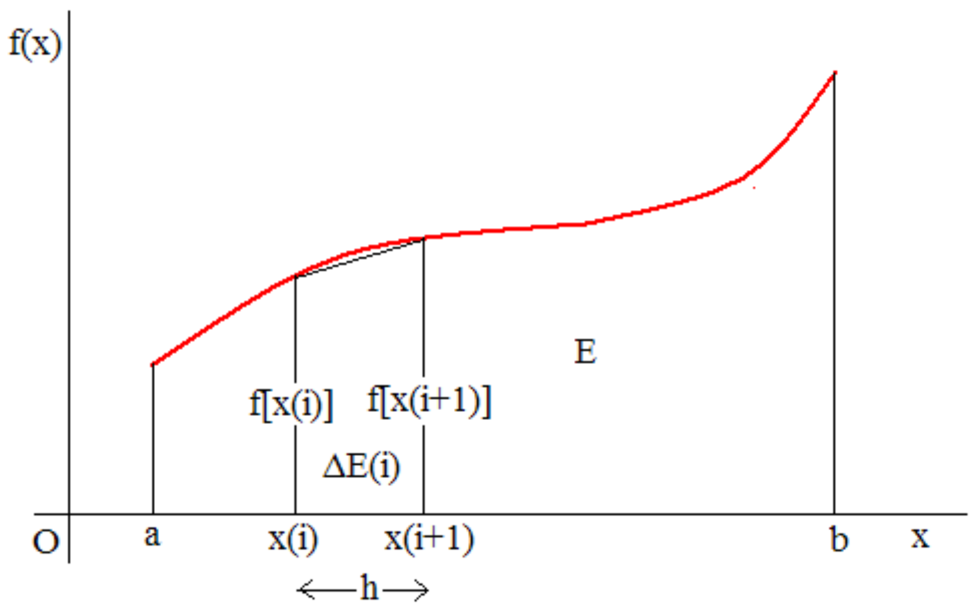
Διάγραμμα 3. Γραφική αναπαράσταση της σύγκλισης του αλγορίθμου Newton-Raphson για δυο διαφορετικές αρχικές τιμές x0



Διάγραμμα 4. Αδυναμία σύγκλισης του αλγορίθμου Newton-Raphson στη ρίζα της εξίσωσης

2.2 Αριθμητική ολοκλήρωση

Μια απλή στη σύλληψη μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι ο **κανόνας του τραπεζίου** (trapezoidal rule). Ο κανόνας αυτός βασίζεται στο ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης f(x) ως προς x με διάστημα ολοκλήρωσης από a ως b είναι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη f(x), τον άξονα x και τις κατακόρυφες ευθείες x = a και x = b, όπως φαίνεται στο (σχ. 5).



Διάγραμμα 5. Γραφική αναπαράσταση του ορισμένου ολοκληρώματος

Το εμβαδόν E ισούται με το άθροισμα των στοιχειωδών τραπεζίων ΔE_i με βάσεις x_i και x_{i+1} και με σταθερό ύψος h ίσο με τη διαφορά $x_{i+1} - x_i$. Όσο μικρότερο είναι το διάστημα διαμέρισης h τόσο περισσότερο προσεγγίζει το άθροισμα των στοιχειωδών τραπεζίων $\Sigma\Delta E_i$ το εμβαδόν E, που είναι ίσο με το ορισμένο ολοκλήρωμα f(x)dx από a ως b.

Επομένως ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}\cdot\left[f(a)+2f_1+2f_2+2f_3+...+2f_n+f(b)\right] \qquad (8)$$

Όπου f_i (i = 1, 2, …, n) είναι οι τιμές f για $x = x_i$.

Είναι δυνατόν να εκτιμηθεί το σφάλμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης για δεδομένο διάστημα διαμέρισης h. Το σφάλμα er είναι (Gerald & Wheatley 1994):

$$er = -\,[(b-a)/12].h^2.f''(\xi) \qquad (9)$$

Όπου f"(ξ) είναι η δεύτερη παράγωγος της f για x = ξ τέτοιο ώστε το γινόμενο f(ξ)(b – a) να είναι ίσο με το ορισμένο ολοκλήρωμα fdx από a ως b. Στην πράξη υπολογίζονται οι δυο ακραίες τιμές er που αντιστοιχούν στη μέγιστη και στην ελάχιστη τιμή f"(x).

Εφαρμογή: να υπολογιστεί με τον κανόνα του τραπεζίου το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \exp(-x^2)dx \qquad (10)$$

Για τον αριθμητικό υπολογισμό του I παίρνουμε διάστημα διαμέρισης h = 0,01 και, με τη βοήθεια του Excel, υπολογίζουμε τις τιμές exp(0), exp(0,01), exp(0,02), …, exp(1). Στη συνέχεια, με βάση τη σχέση (8), βρίσκουμε:

$$I = 0{,}746818 \qquad (11)$$

Οι δυο ακραίες τιμές f″(x), όπου $f''(x) = (4x^2 - 2).\exp(-x^2)$, είναι οι f″(0) = –2 = min και f″(1) = 0,735759 = max, που, με βάση τη σχέση (9), αντιστοιχούν σε τιμές σφάλματος $er1 = 2 \times 10^{-5}$ και $er2 = -6 \times 10^{-6}$. Επομένως το σφάλμα αριθμητικής ολοκλήρωσης εκτιμάται μεταξύ -6×10^{-6} (που επηρεάζει το ψηφίο του εκατομμυριοστού του I) και 2×10^{-5} (που επηρεάζει το ψηφίο του εκατοντάκις χιλιοστού του I).

Σε μια παραλλαγή του κανόνα του τραπεζίου, μειώνουμε κατά το ήμισυ το διάστημα διαμέρισης h, υπολογίζουμε ξανά το I και συγκρίνουμε τις τιμές I(h) και I(h/2). Αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δυο αυτών τιμών είναι μικρότερη από μια ορισμένη τιμή κατωφλίου ε, τότε η αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος είναι η I(h/2). Αν η απόλυτη τιμή υπερβαίνει το ε, τότε προχωρούμε σε διαμέριση h/4, συγκρίνουμε τα I(h/2) και I(h/4) κ.ο.κ.

Υπάρχουν πολλές άλλες μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης, για τις οποίες αν θέλει κανείς να ενημερωθεί θα πρέπει να ανατρέξει σε εξειδικευμένα συγγράμματα αριθμητικής ανάλυσης, όπως αυτά που αναφέρονται αμέσως παρακάτω.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2014. Γεώργιος Σκιάνης. «Γεωγραφικά Συστήματα Πληροφοριών και Αρχές Τηλεπισκόπησης. Στοιχεία Πληροφορικής και Αυτοματοποιημένης Επεξεργασίας Δεδομένων». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/GEOL5/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

<u>Εικόνες/Σχήματα</u>

Διάγραμμα 1, Σελίδα 6: Η Πανεπιστημιούπολη, όπως απεικονίστηκε από τον ινδικό δορυφόρο IRS / Copyright ISRO / Πηγή: Indian Space Research Organisation (Indian Remote Sensing) / Σύνδεσμος: http://www.isro.gov.in

Διάγραμμα 2, Σελίδα 7: Ο κύβος RGB / Copyright 1997 by Academic Press / Πηγή: Robert A. Schowengerdt "Remote Sensing: Models and methods for image processing"

Διάγραμμα 3, Σελίδα 8: Zakynthos-nasa / Public Domain / Σύνδεσμος: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zakynthos-nasa.png / Πηγή: NASA World Wind

Διάγραμμα 4, Σελίδα 9: Zakynthos-nasa / Public Domain / Σύνδεσμος: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zakynthos-nasa.png / Πηγή: NASA World Wind

Διάγραμμα 5, Σελίδα 9: Zakynthos-nasa / Public Domain / Σύνδεσμος: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zakynthos-nasa.png / Πηγή: NASA World Wind

<u>Πίνακες</u>

Πίνακας 1, Σελίδα 6: Τμήμα της ψηφιακής εικόνας της πανεπιστημιούπολης / Άγνωστης προέλευσης πίνακας

Πίνακας 2, Σελίδα 8: Τμήμα της ψηφιακής εικόνας της πανεπιστημιούπολης / Άγνωστης προέλευσης πίνακας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης