



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Μικροοικονομική Ανάλυση της Κατανάλωσης και της Παραγωγής

Διάλεξη 10: Τεχνολογία

Ανδρέας Παπανδρέου
Σχολή Οικονομικών και Πολιτικών Επιστημών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών



Τεχνολογίες

Τεχνολογία είναι μια διαδικασία με την οποία εισροές μετατρέπονται σε εκροές.

π.χ. εργασία, ένας υπολογιστής, ένας προβολέας, ηλεκτρισμός, κ.α. Συνδυάζονται για την παραγωγή αυτής της διάλεξης.

Τεχνολογίες

- Είναι σύνηθες διάφορες τεχνολογίες να παραγάγουν το ίδιο προϊόν– η διάλεξη μπορεί να γίνει σε πίνακα με κιμωλία αντί για υπολογιστή και προβολέα.
- Ποια τεχνολογία είναι η “καλύτερη”;
- Πώς συγκρίνουμε τεχνολογίες;

Συνδυασμοί εισροών

x_i συμβολίζει το ποσό που χρησιμοποιείται από το συντελεστή i .

Ένας **συνδυασμός εισροών** είναι ένα άνυσμα του επιπέδου των εισροών : (x_1, x_2, \dots, x_n) .

π.χ. $(x_1, x_2, x_3) = (6, 0, 3)$.



Συναρτήσεις παραγωγής

y συμβολίζει το επίπεδο του προϊόντος.

Η **συνάρτηση παραγωγής** της τεχνολογίας, δηλώνει το **μέγιστο** ποσό προϊόντος που μπορεί να παραχθεί από ένα συνδυασμό εισροών.

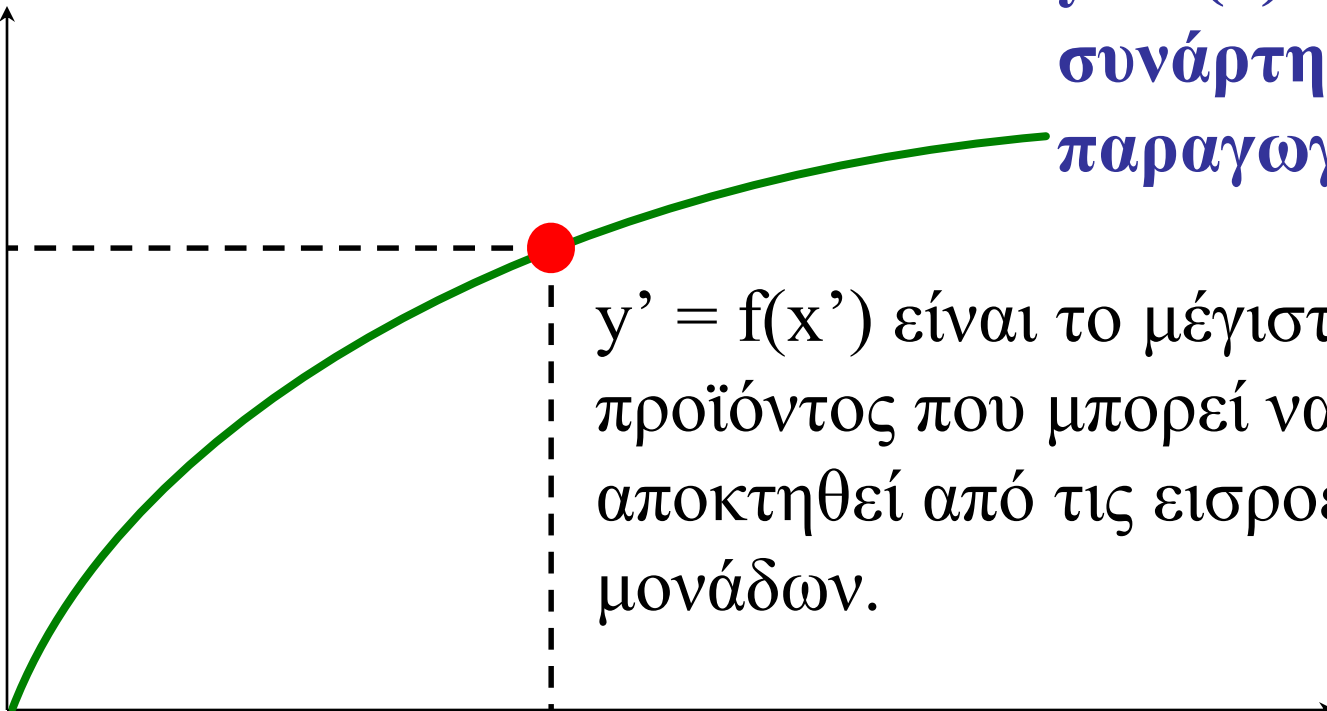
$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

Συναρτήσεις παραγωγής

Μια εισροή, ένα προϊόν

προϊόν

y'



$y = f(x)$ είναι η
συνάρτηση
παραγωγής.

$y' = f(x')$ είναι το μέγιστο ποσό
προϊόντος που μπορεί να
αποκτηθεί από τις εισροές x'
μονάδων.

x'

εισροή

x



Τεχνολογικά σύνολα

Ένα **σχέδιο παραγωγής** είναι ένας συνδυασμός εισροών και ένα επίπεδο προϊόντος:

$$(x_1, \dots, x_n, y).$$

Ένα σχέδιο παραγωγής είναι **εφικτό** αν

$$y \leq f(x_1, \dots, x_n)$$

Αν βάλουμε μαζί όλα τα εφικτά σχέδια παραγωγής, τότε έχουμε το **τεχνολογικό σύνολο** (ή **σύνολο παραγωγής**).

Τεχνολογικά σύνολα

Μια εισροή, ένα προϊόν

$y = f(x)$ είναι η
συνάρτηση
παραγωγής.

προϊόν

y'

y''

x'

εισροή

x

$y' = f(x')$ είναι το μέγιστο ποσό
προϊόντος που μπορεί να
αποκτηθεί από τις εισροές x'
μονάδων.

$y'' = f(x')$ είναι ένα επίπεδο
προϊόντος που είναι εφικτό από τις
εισροές x' μονάδων.



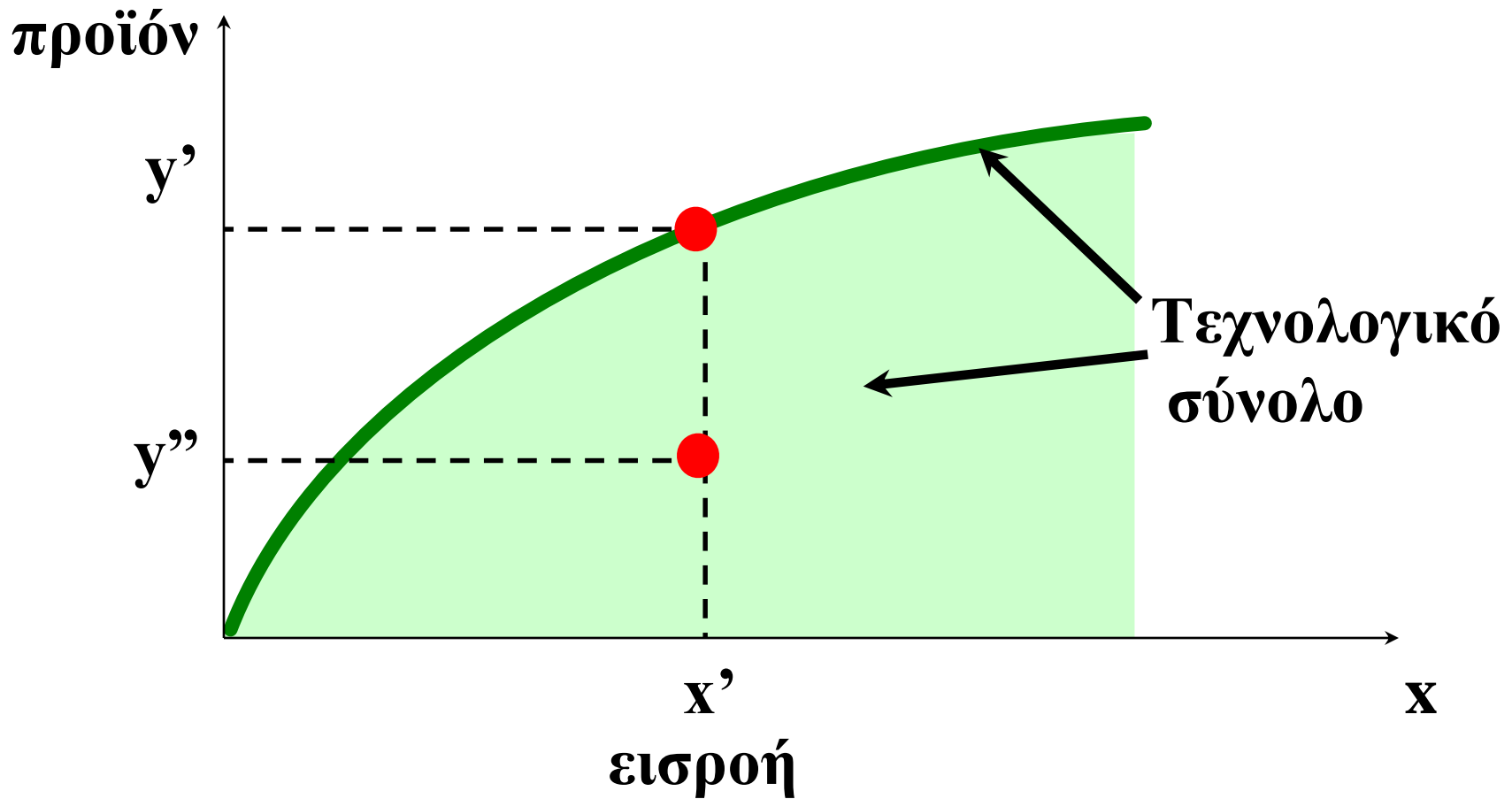
Τεχνολογικά σύνολα

Το τεχνολογικό σύνολο είναι

$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n, y) \mid y \leq f(x_1, \dots, x_n) \text{ και } x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

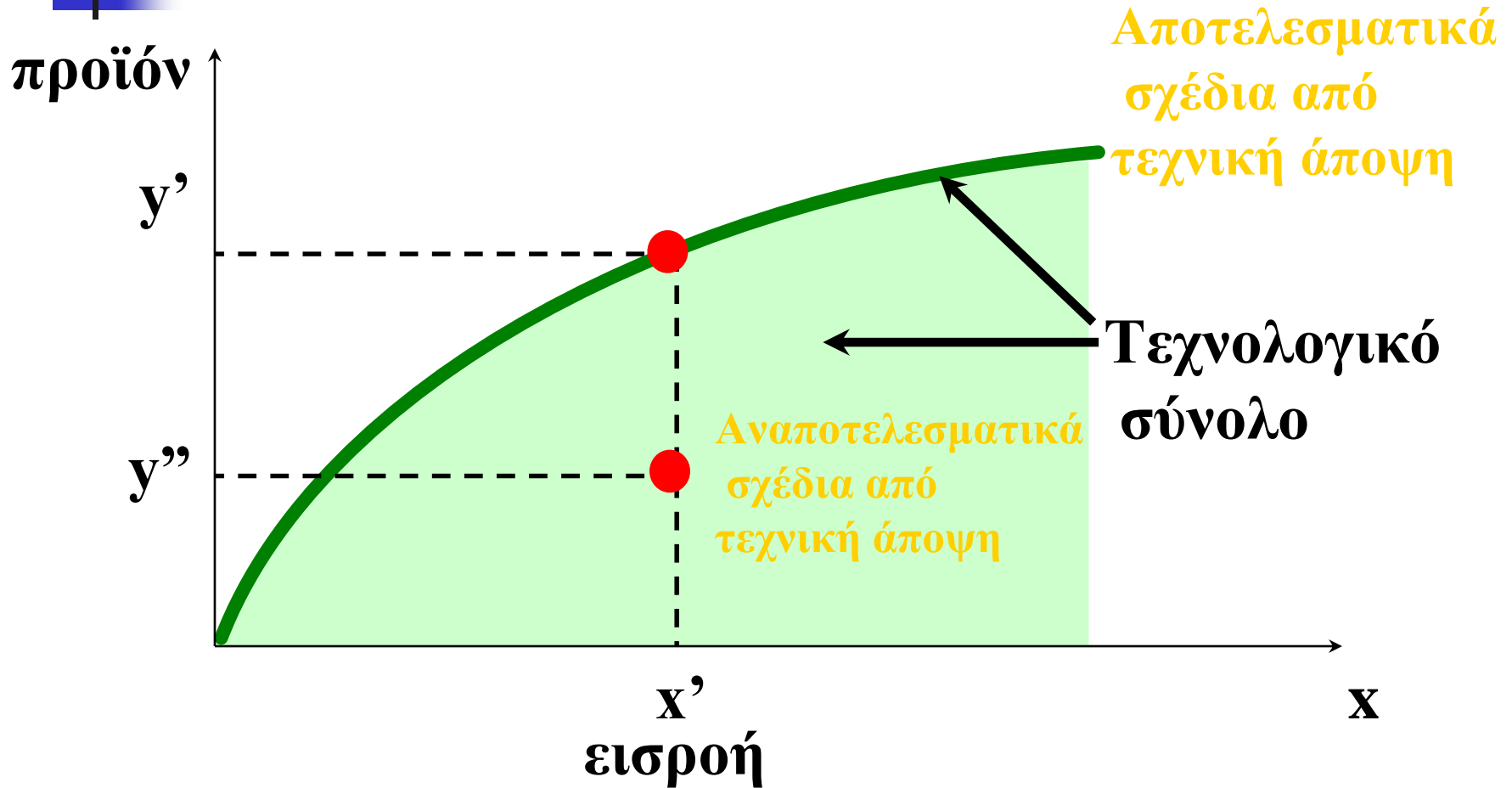
Τεχνολογικά σύνολα

Μια εισροή, ένα προϊόν



Τεχνολογικά σύνολα

Μια εισροή, ένα προϊόν



Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές

Με τι μοιάζει η τεχνολογία όταν υπάρχουν πάνω από μια εισροές;

Ας πάρουμε δύο εισροές: Τα επίπεδα εισροών είναι x_1 και x_2 . Το επίπεδο προϊόντος είναι y .

Έστω ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι

$$y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3}.$$



Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές

Π.χ. Το μέγιστο επίπεδο προϊόντος που μπορεί να παραχθεί από το συνδυασμό εισροών

$(x_1, x_2) = (1, 8)$ είναι

$$y = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3} = 2 \times 1^{1/3} \times 8^{1/3} = 2 \times 1 \times 2 = 4.$$

Το μέγιστο επίπεδο προϊόντος που μπορεί να παραχθεί από το συνδυασμό εισροών $(x_1, x_2) = (8, 8)$ είναι

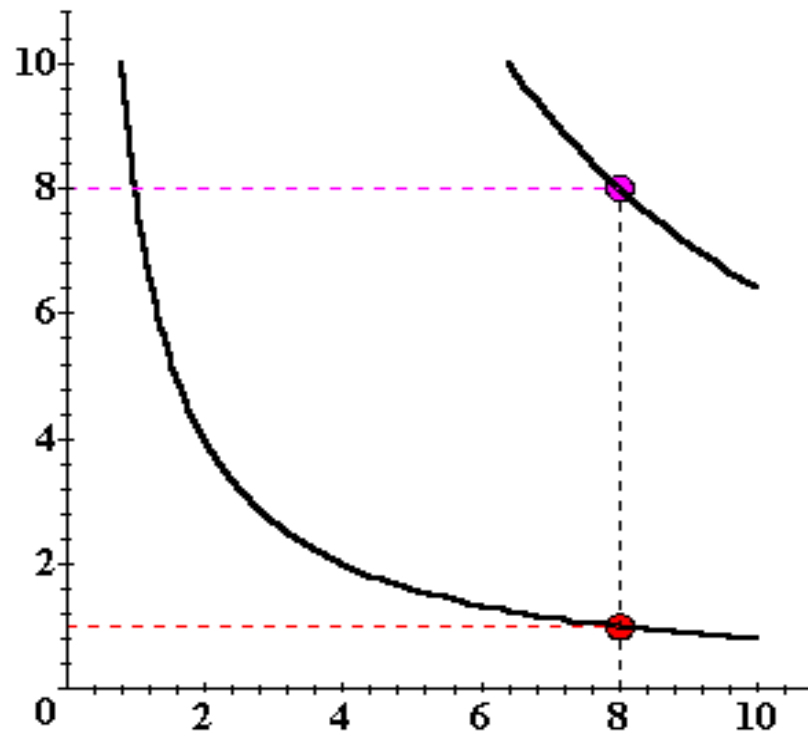
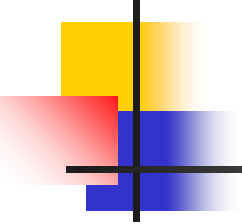
$$y = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3} = 2 \times 8^{1/3} \times 8^{1/3} = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



Η **καμπύλη ίσου προϊόντος** του y είναι το σύνολο όλων των συνδυασμών εισροών που μόλις επαρκούν για την παραγωγή μιας δεδομένης ποσότητας προϊόντος y .

Τεχνολογίες με δύο μεταβλητές εισροές

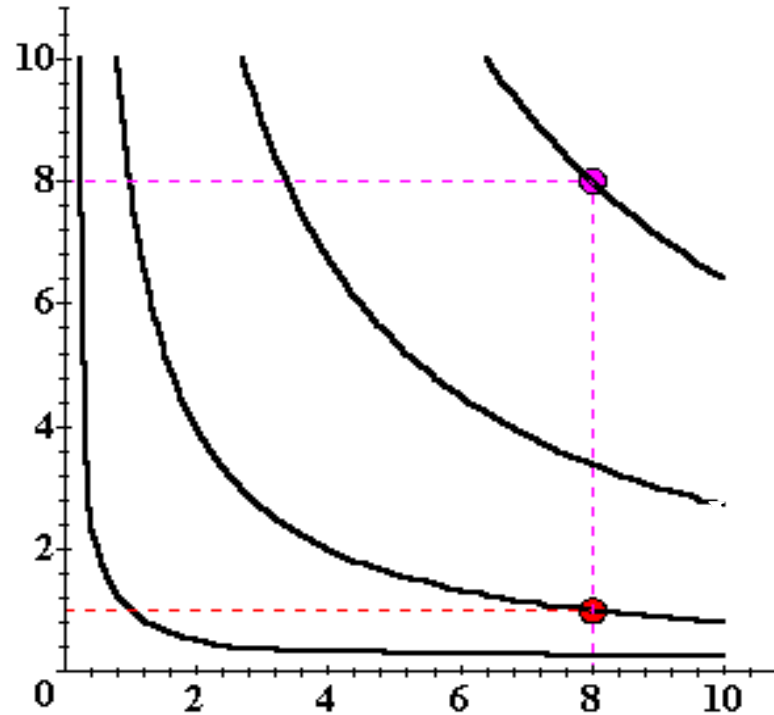


Καμπύλη ίσου προϊόντος με δύο μεταβλητές εισροές



Οι καμπύλες ίσου προϊόντος μπορούν να απεικονιστούν γραφικά με το να προσθέσουμε έναν άξονα για το επίπεδο προϊόντος και να θέσουμε κάθε καμπύλη ίσου προϊόντος στο ύψος του προϊόντος της καμπύλης.

Καμπύλη ίσου προϊόντος με δύο μεταβλητές εισροές





Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές

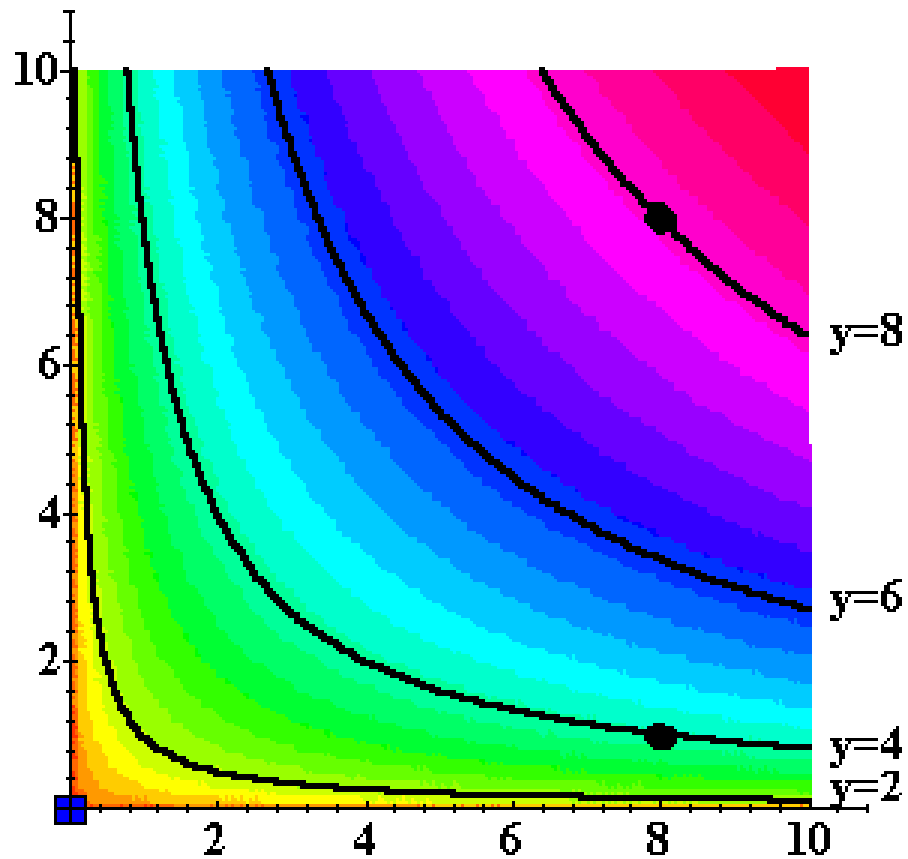
Το πλήρες σύνολο των καμπυλών ίσου προϊόντος (ΚΙΠ) είναι ο **χάρτης καμπυλών ίσου προϊόντος**.

Ο **χάρτης ΚΙΠ** είναι το ισοδύναμο της **συνάρτησης παραγωγής** - το ένα είναι το άλλο.

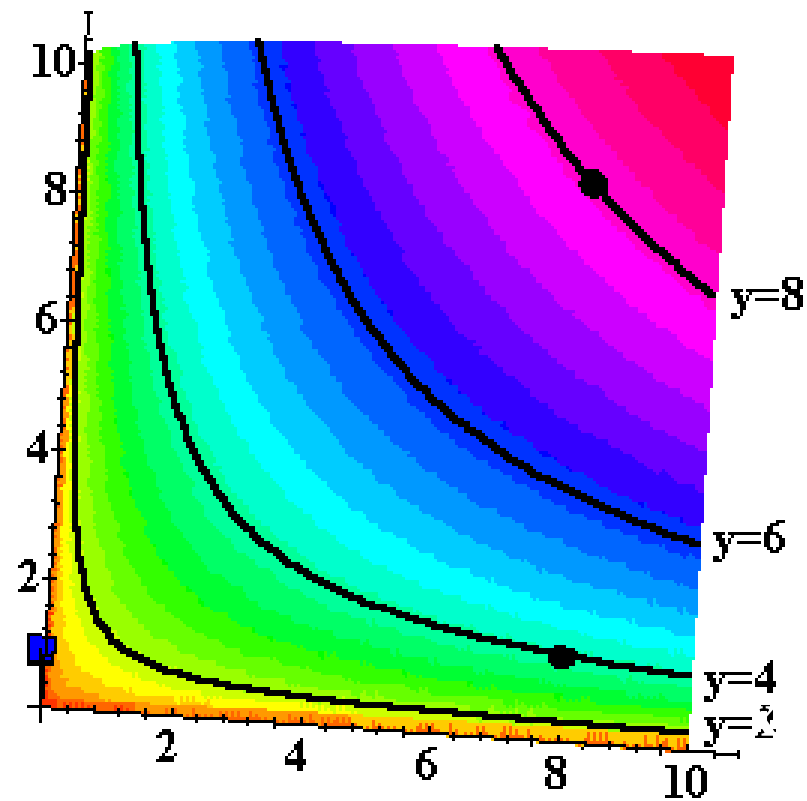
π.χ.

$$y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3} x_2^{1/3}$$

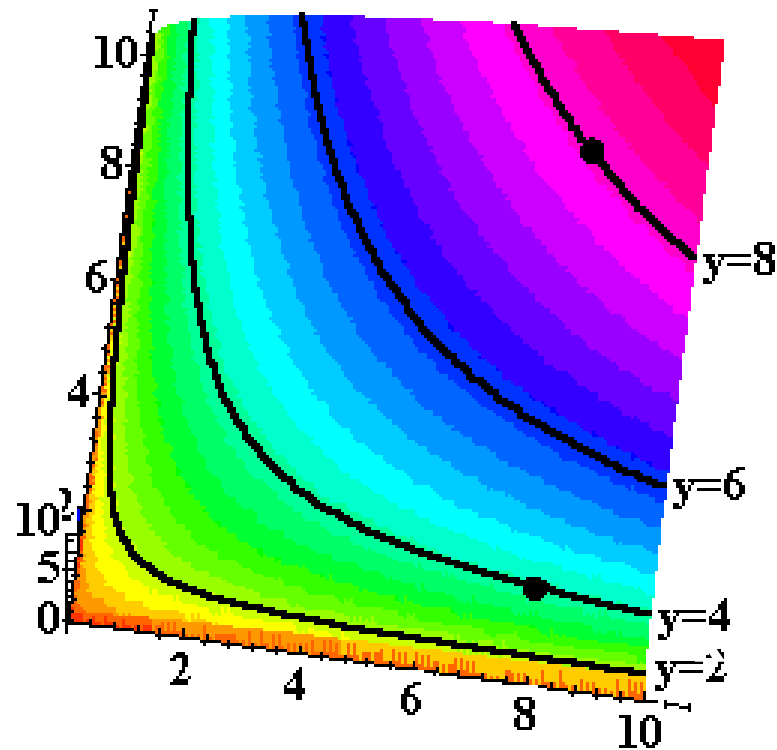
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



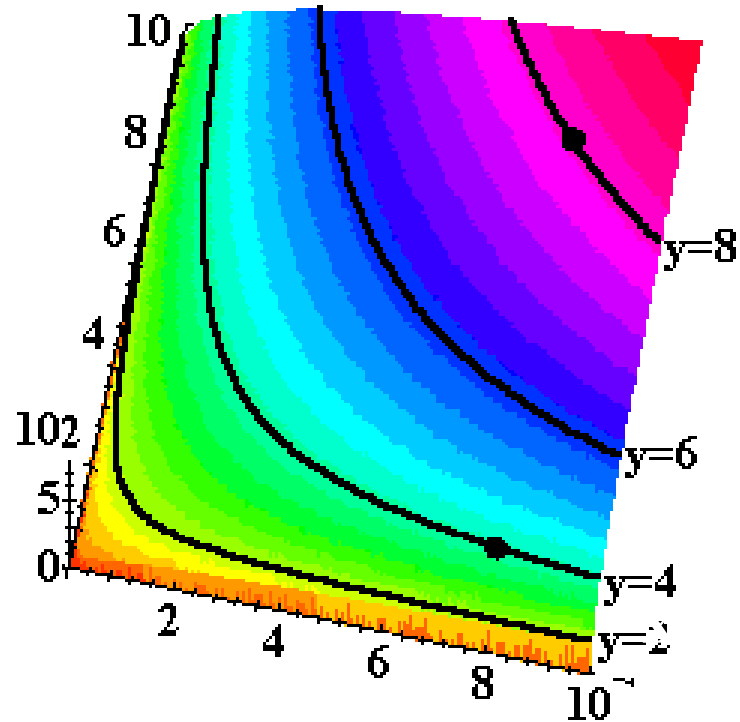
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



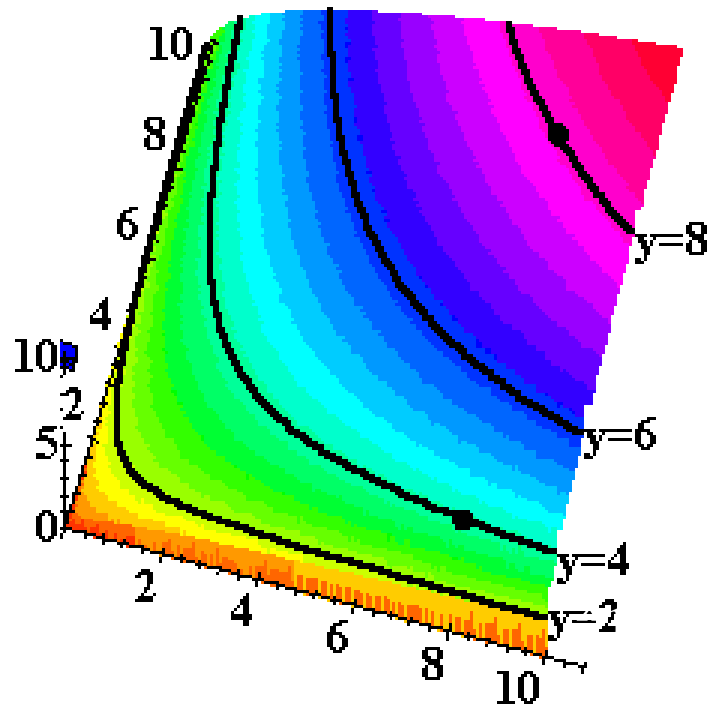
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



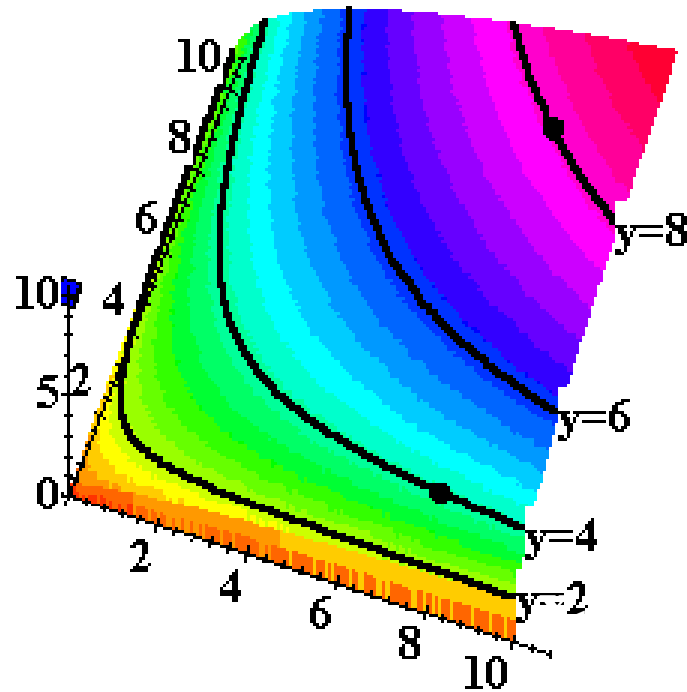
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



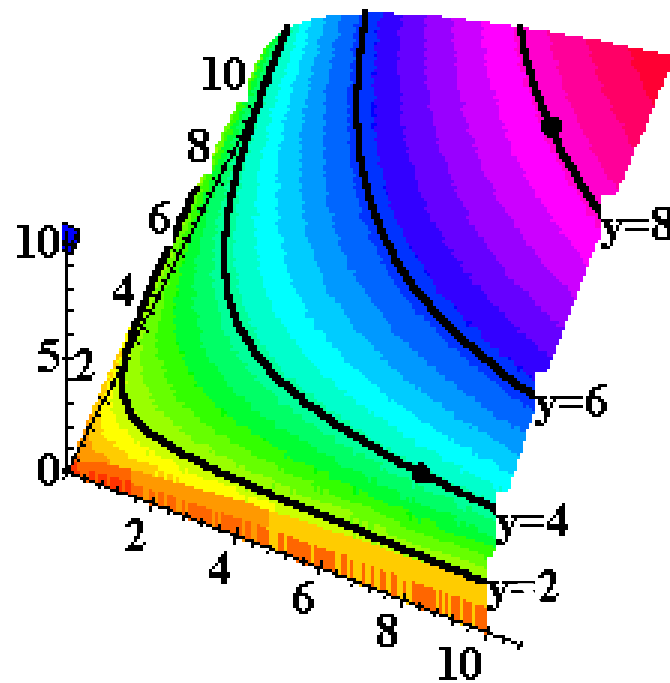
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



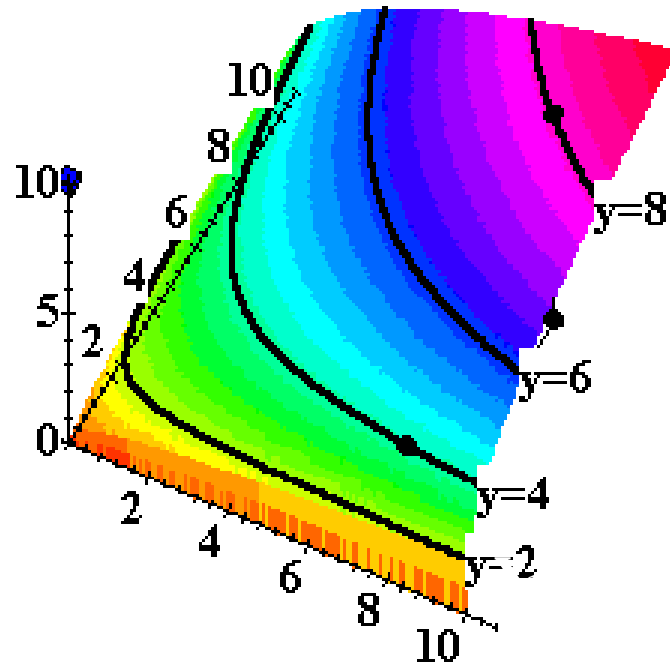
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



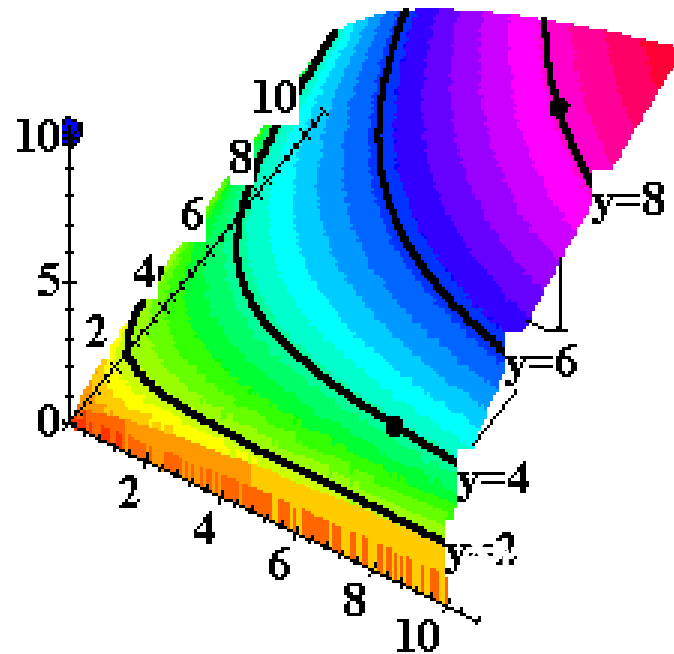
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



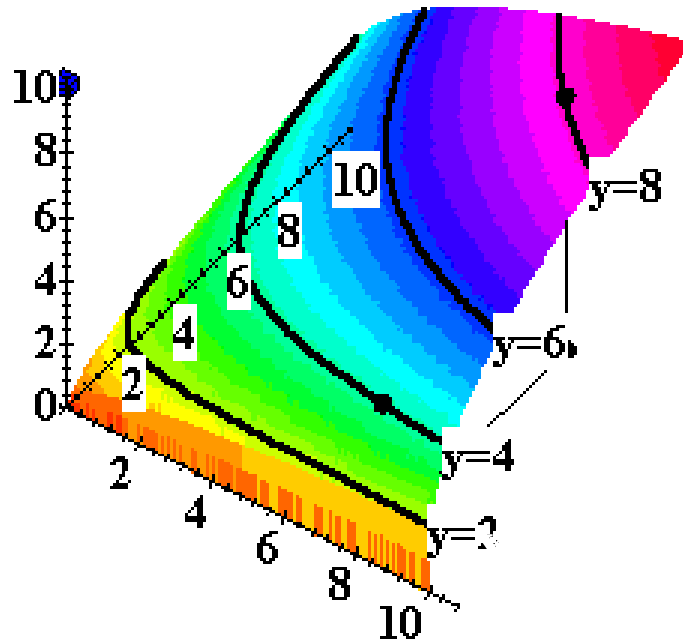
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



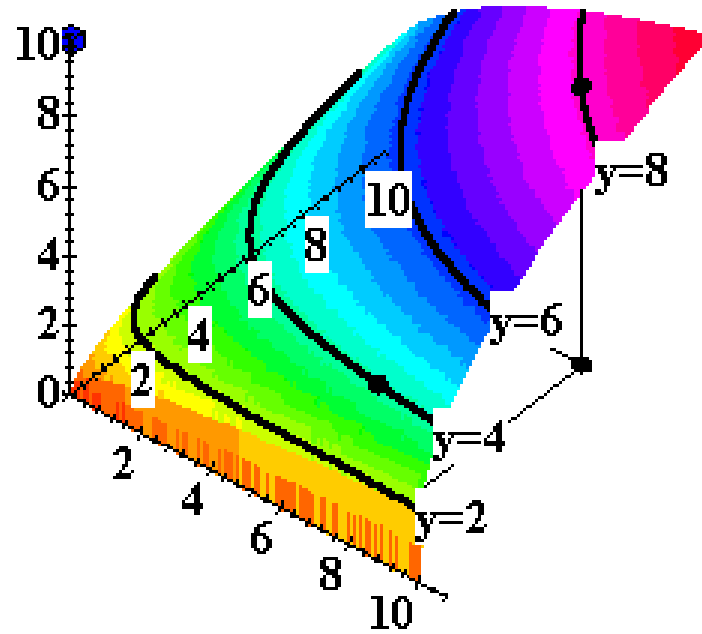
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



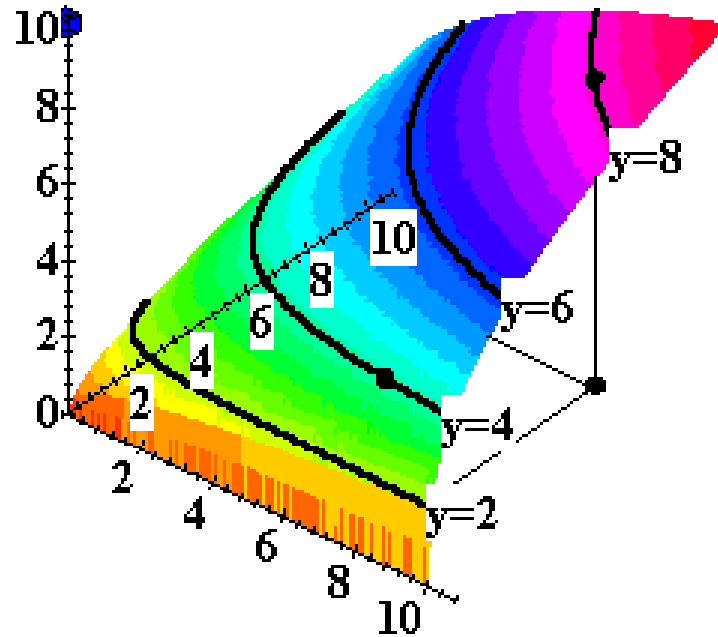
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



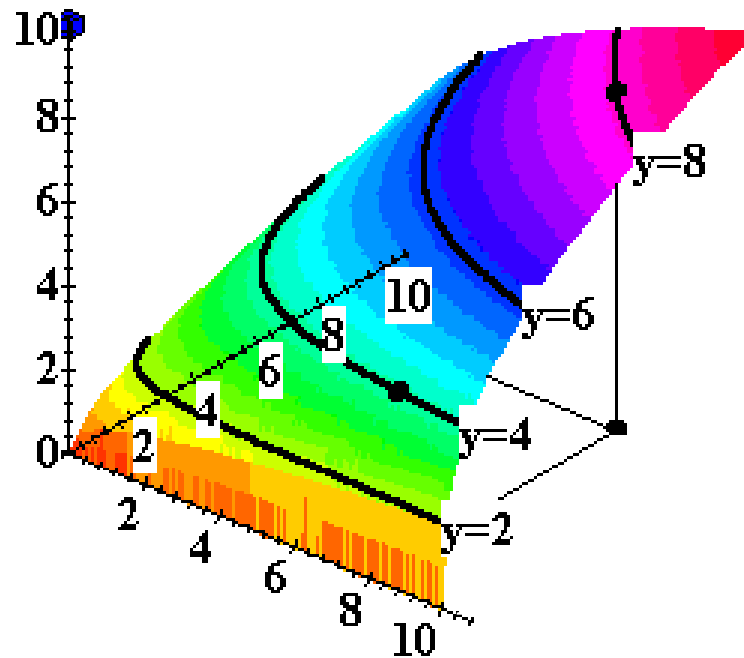
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



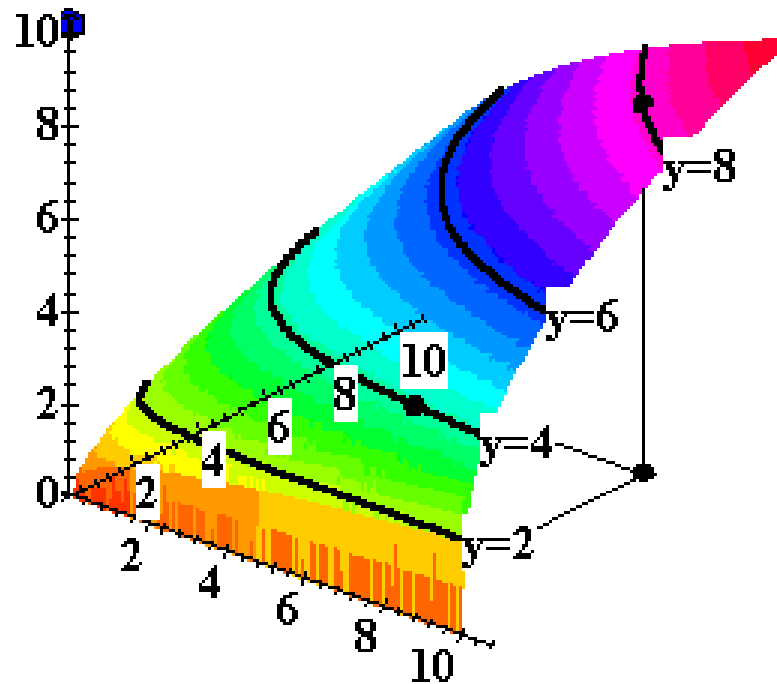
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



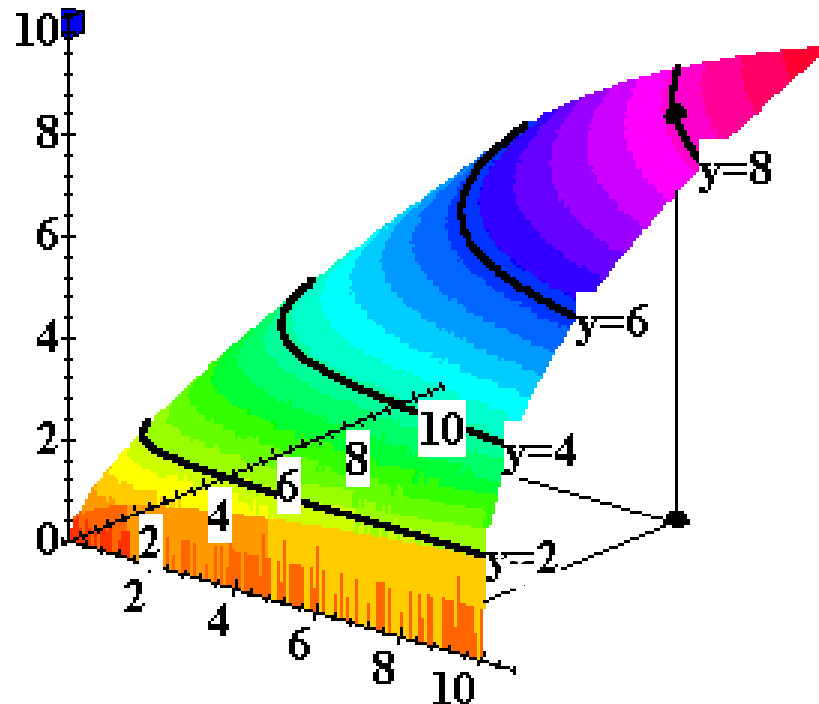
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



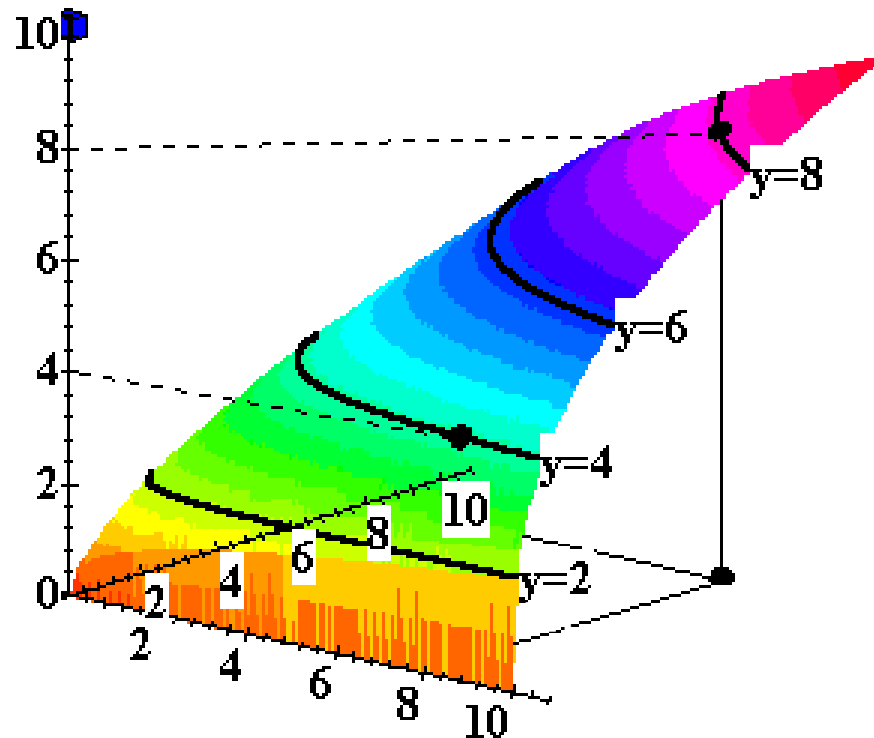
Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές



Τεχνολογίες με πολλαπλές εισροές





Τεχνολογίες Cobb-Douglas

Μια συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι της μορφής

$$y = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2} \times \dots \times x_n^{a_n}.$$

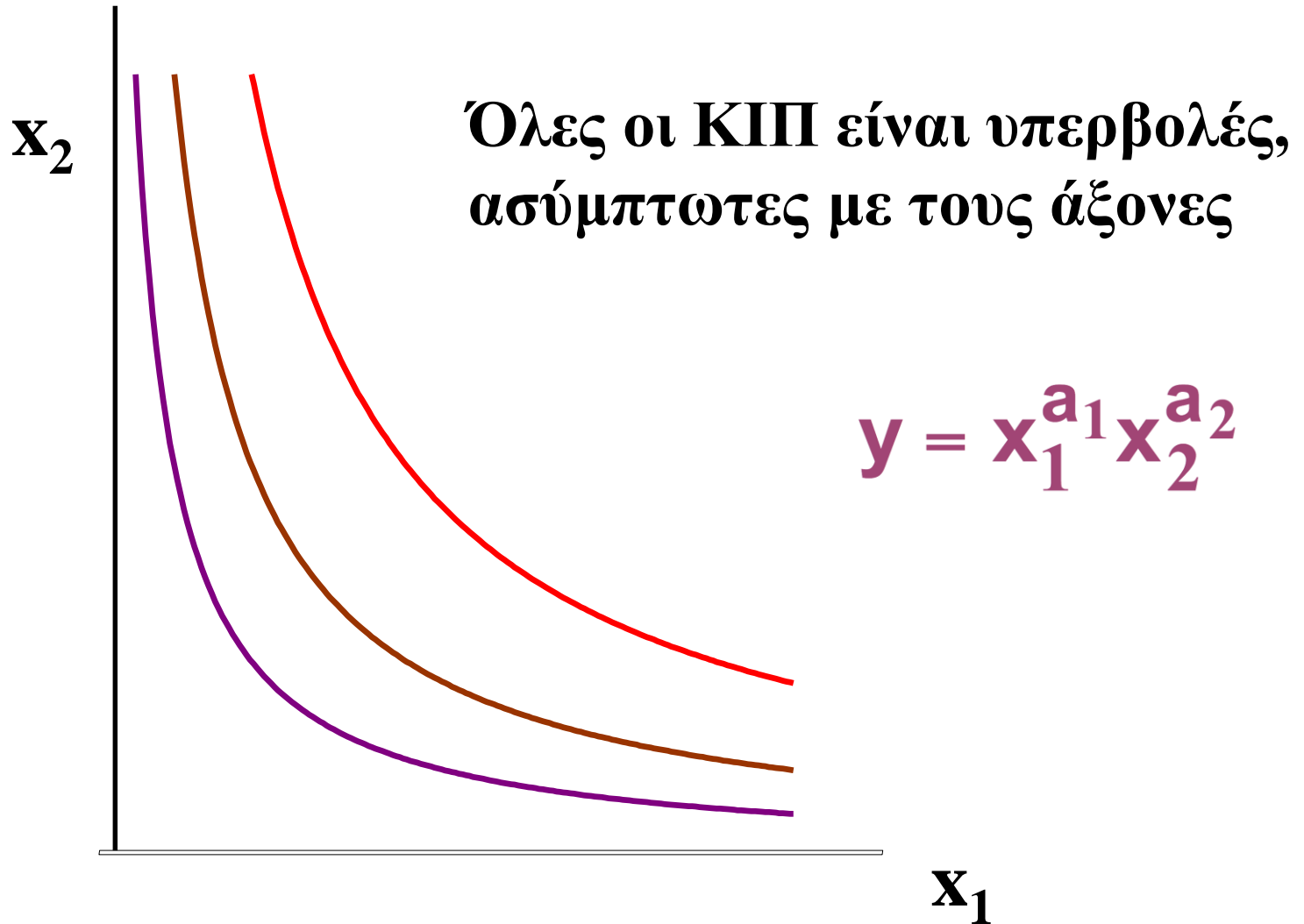
π.χ.

$$y = x_1^{1/3}x_2^{1/3}$$

με

$$n = 2, A = 1, a_1 = \frac{1}{3} \text{ και } a_2 = \frac{1}{3}.$$

Τεχνολογίες Cobb-Douglas



Τεχνολογίες Cobb-Douglas

x_2

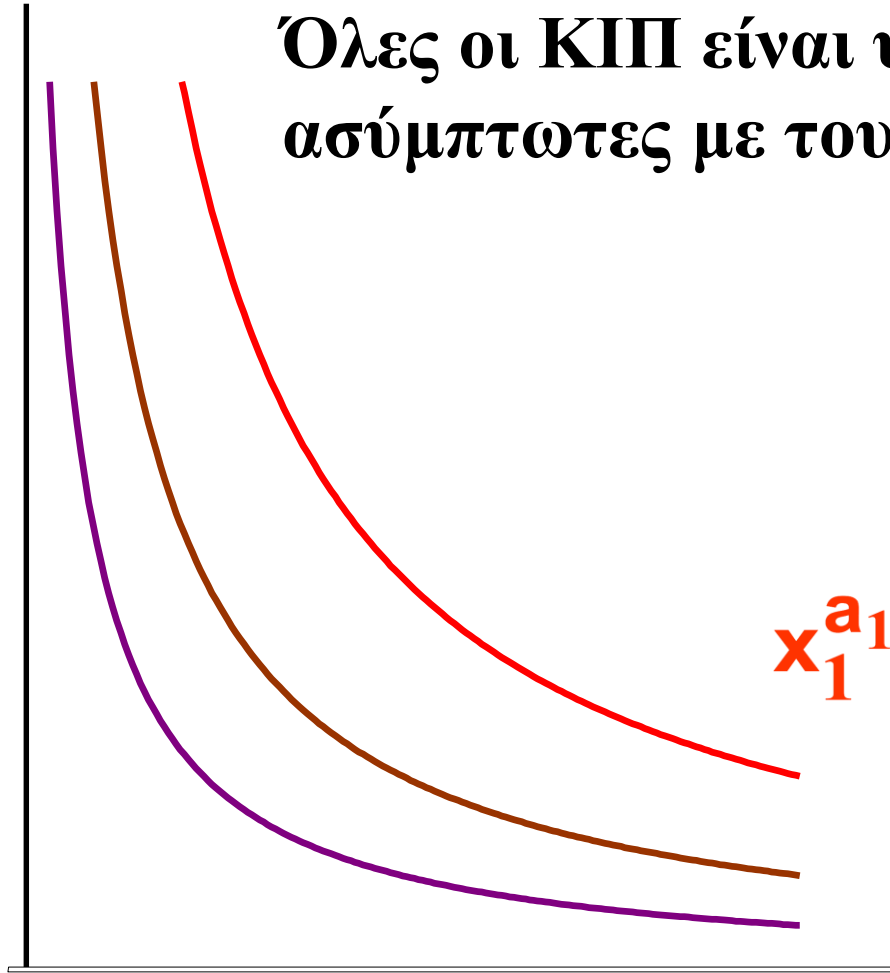
Όλες οι ΚΙΠ είναι υπερβολές,
ασύμπτωτες με τους άξονες

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} = y''$$

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} = y'$$

x_1



Τεχνολογίες Cobb-Douglas

x_2

Όλες οι ΚΙΠ είναι υπερβολές,
ασύμπτωτες με τους άξονες

$$y'' > y'$$

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} = y''$$

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} = y'$$

x_1



Τεχνολογίες σταθερών αναλογιών

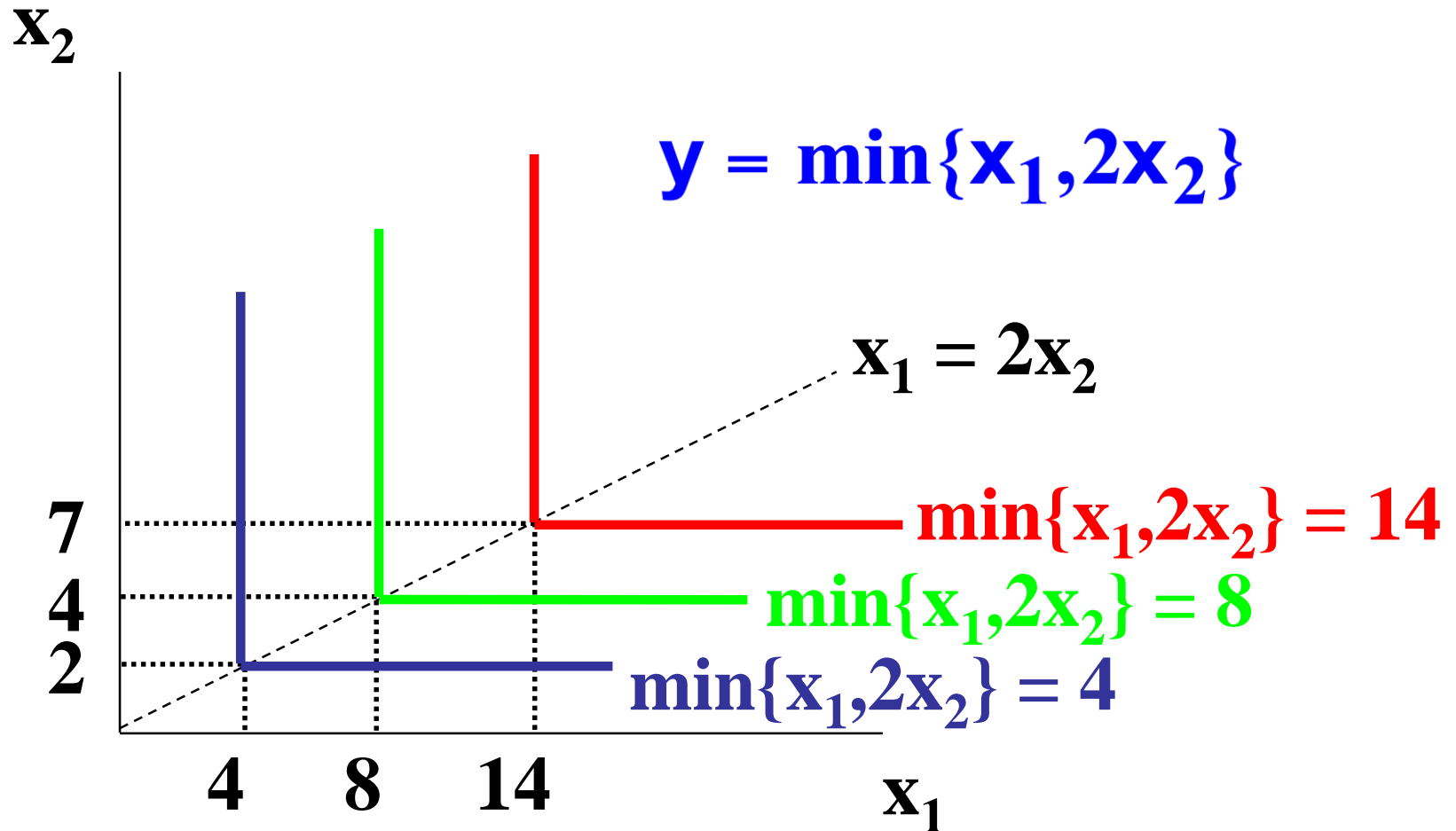
Μια συνάρτηση παραγωγής με σταθερές αναλογίες είναι της μορφής

$$y = \min\{a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n\}.$$

π.χ. $y = \min\{x_1, 2x_2\}$

με $n = 2, a_1 = 1$ and $a_2 = 2.$

Τεχνολογίες σταθερών αναλογιών





Τεχνολογίες με τέλεια υποκατάστατα

Μια συνάρτηση παραγωγής με τέλεια υποκατάστατα είναι της μορφής

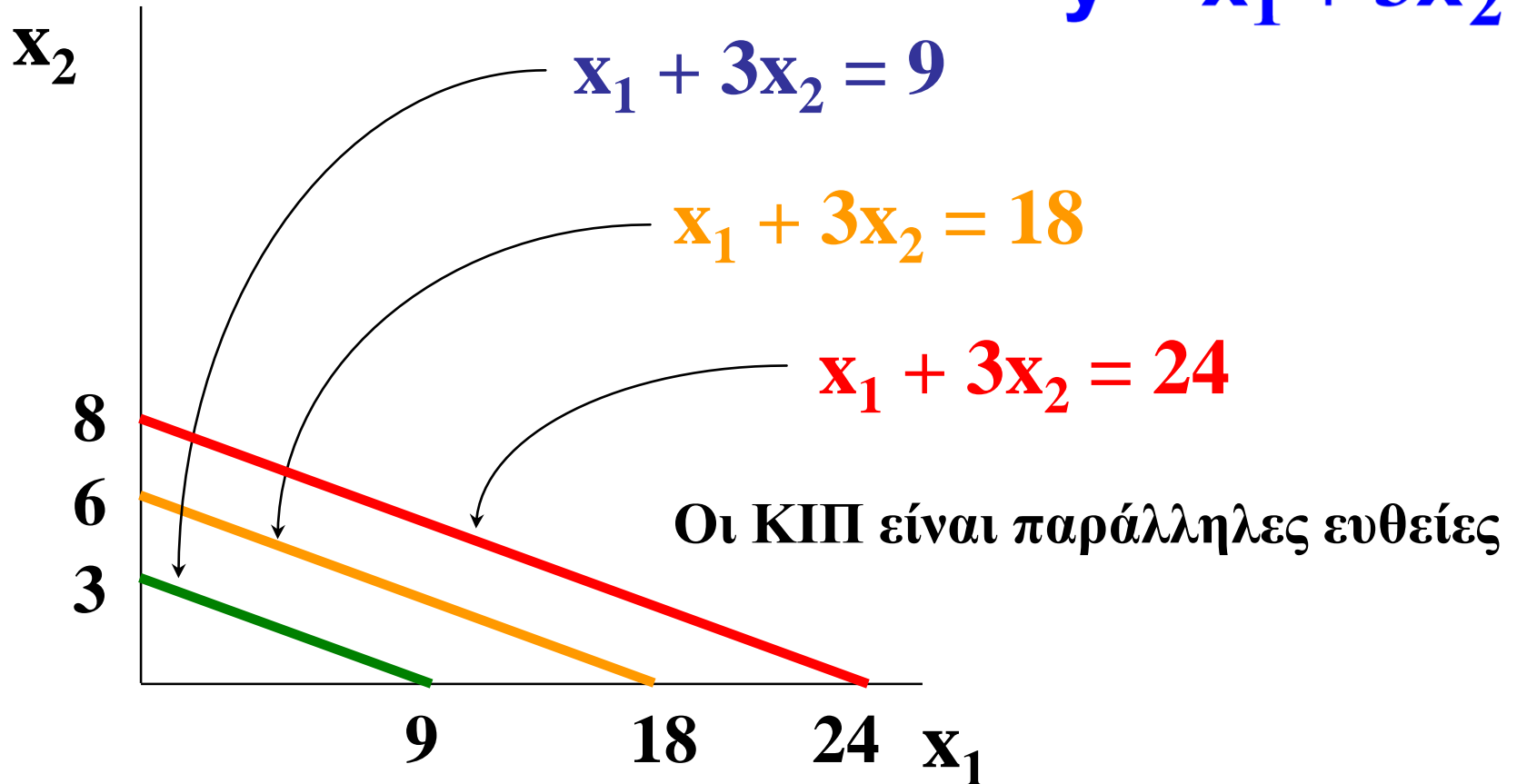
$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

π.χ. $y = x_1 + 3x_2$

με $n = 2, a_1 = 1$ and $a_2 = 3.$

Τεχνολογίες με τέλεια υποκατάστατα

$$y = x_1 + 3x_2$$



Οριακό (φυσικό) προϊόν

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

Το **οριακό προϊόν** μιας εισροής i είναι ο ρυθμός μεταβολής του επιπέδου του προϊόντος, καθώς το επίπεδο του συντελεστή i μεταβάλλεται, διατηρώντας τα επίπεδα όλων των άλλων συντελεστών σταθερά..

δηλαδή,

$$MP_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Οριακό (φυσικό) προϊόν

π.χ. αν $y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$

Τότε το οριακό προϊόν του συντελεστή 1 είναι

$$MP_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}$$

και το οριακό προϊόν του συντελεστή 2 είναι

$$MP_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3} .$$

Οριακό (φυσικό) προϊόν

Το οριακό προϊόν μιας εισροής εξαρτάται από την ποσότητα που χρησιμοποιείται από τις άλλες εισροές, π.χ. αν

$$MP_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3} \quad \text{τότε,}$$

$$\text{αν } x_2 = 8, \quad MP_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} 8^{2/3} = \frac{4}{3} x_1^{-2/3}$$

Και αν $x_2 = 27$ τότε

$$MP_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} 27^{2/3} = 3x_1^{-2/3}.$$



Οριακό (φυσικό) προϊόν

Το οριακό προϊόν μιας εισροής i είναι **φθίνον** αν γίνεται μικρότερο καθώς το επίπεδο της εισροής i αυξάνεται. Δηλαδή, αν

$$\frac{\partial MP_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} < 0.$$



Οριακό (φυσικό) προϊόν

Π.χ. αν $y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ τότε

$$MP_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3} \quad \text{και} \quad MP_2 = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}$$

Οριακό (φυσικό) προϊόν

Π.χ. αν $y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ τότε

$$MP_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3} \quad \text{και} \quad MP_2 = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}$$

Έτσι $\frac{\partial MP_1}{\partial x_1} = -\frac{2}{9} x_1^{-5/3} x_2^{2/3} < 0$

Οριακό (φυσικό) προϊόν

Π.χ. αν $y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ τότε

$$MP_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3} \quad \text{και} \quad MP_2 = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}$$

Έτσι $\frac{\partial MP_1}{\partial x_1} = -\frac{2}{9} x_1^{-5/3} x_2^{2/3} < 0$

και $\frac{\partial MP_2}{\partial x_2} = -\frac{2}{9} x_1^{1/3} x_2^{-4/3} < 0.$

Οριακό (φυσικό) προϊόν

Π.χ. αν $y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ τότε

$$MP_1 = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3} \quad \text{και} \quad MP_2 = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}$$

$$\text{Έτσι} \quad \frac{\partial MP_1}{\partial x_1} = -\frac{2}{9} x_1^{-5/3} x_2^{2/3} < 0$$

$$\text{και} \quad \frac{\partial MP_2}{\partial x_2} = -\frac{2}{9} x_1^{1/3} x_2^{-4/3} < 0.$$

Και τα δύο οριακά προϊόντα είναι φθίνοντα



Οριακό (φυσικό) προϊόν

Γενικά, υποθέτουμε φθίνουσα οριακή παραγωγικότητα και αν η συνάρτηση παραγωγής είναι $q = f(k, l)$

$$\frac{\partial MP_k}{\partial k} = \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} = f_{kk} = f_{11} < 0$$

$$\frac{\partial MP_l}{\partial l} = \frac{\partial^2 f}{\partial l^2} = f_{ll} = f_{22} < 0$$



Οριακό (φυσικό) προϊόν

Λόγω της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας, ο οικονομολόγος του 19ου αιώνα Thomas Malthus ανησυχούσε για την επίπτωση που θα είχε ο αυξανόμενος πληθυσμός στην παραγωγικότητα της εργασίας

Όμως, οι μεταβολές στην οριακή παραγωγικότητα της εργασίας διαχρονικά εξαρτώνται και από τις μεταβολές άλλων συντελεστών, όπως π.χ. Το κεφάλαιο

Γι' αυτό πρέπει να εξετάζουμε το f_{lk} το οποίο είναι συνήθως θετικό.



Μέσο φυσικό προϊόν

Η παραγωγικότητα της εργασίας μετράται συνήθως με τη μέση παραγωγικότητα

$$AP_l = \frac{\text{προϊόν}}{\text{εργασία}} = \frac{q}{l} = \frac{f(k, l)}{l}$$

Το AP_l εξαρτάται από την απασχολούμενη ποσότητα κεφαλαίου

Αποδόσεις κλίμακας



Το οριακό προϊόν περιγράφει τη μεταβολή στο επίπεδο προϊόντος καθώς το επίπεδο **μιας** εισροής μεταβάλλεται.

Οι αποδόσεις κλίμακας περιγράφουν πώς μεταβάλλεται το επίπεδο του προϊόντος καθώς το επίπεδο **όλων** των εισροών μεταβάλλεται με την **ίδια αναλογία** (π.χ. Όλες οι εισροές διπλασιάζονται , ή διαιρούνται στο μισό).



Αποδόσεις κλίμακας

Αν, για κάθε δέσμη εισροών (x_1, \dots, x_n) ,

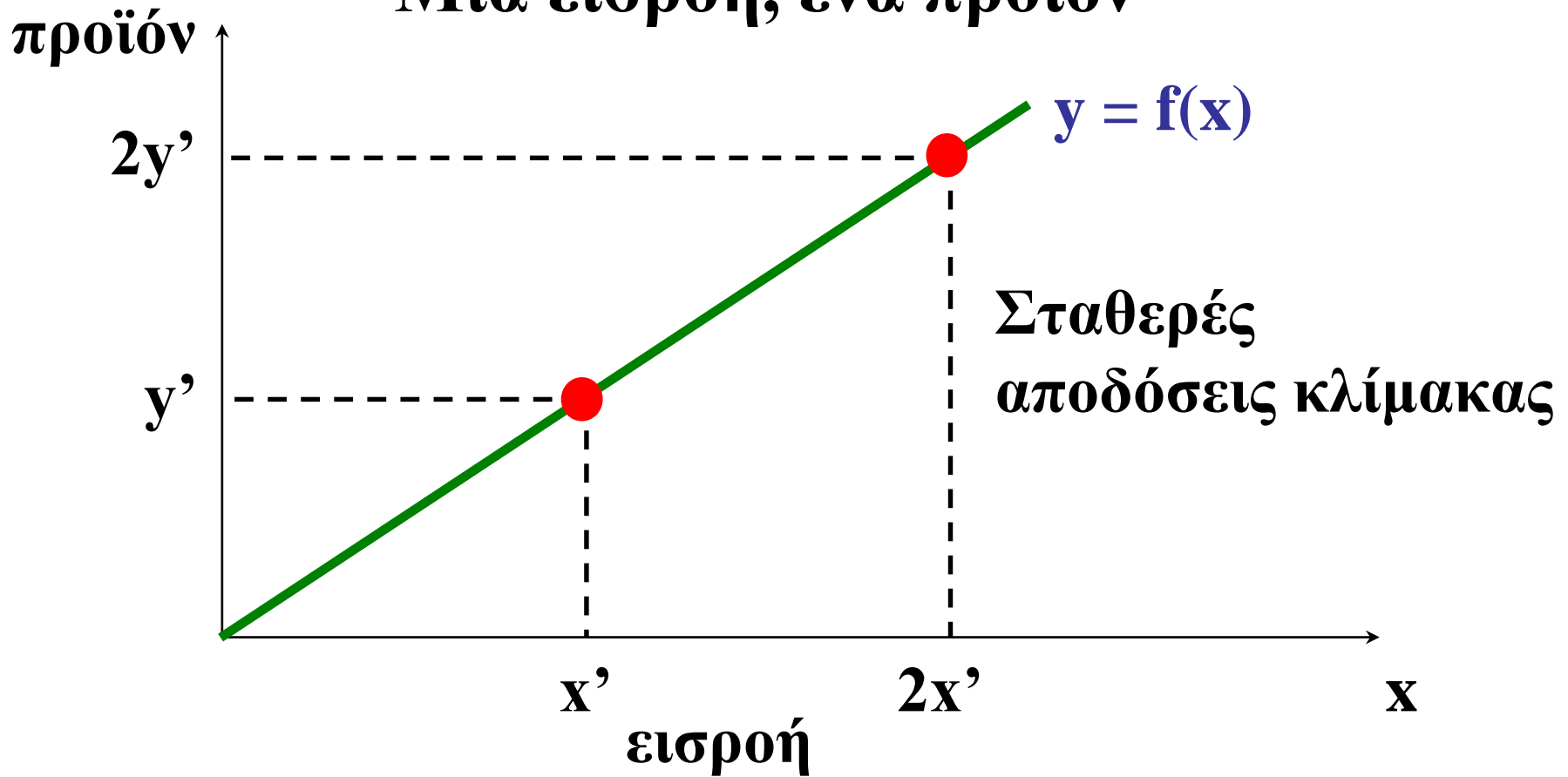
$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = kf(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Τότε η τεχνολογία που περιγράφεται από τη συνάρτηση παραγωγής f παρουσιάζει **σταθερές αποδόσεις κλίμακας**.

π.χ. ($k = 2$) ο διπλασιασμός των ποσοτήτων όλων των εισροών διπλασιάζει το επίπεδο του προϊόντος.

Αποδόσεις κλίμακας

Μια εισροή, ένα προϊόν





Αποδόσεις κλίμακας

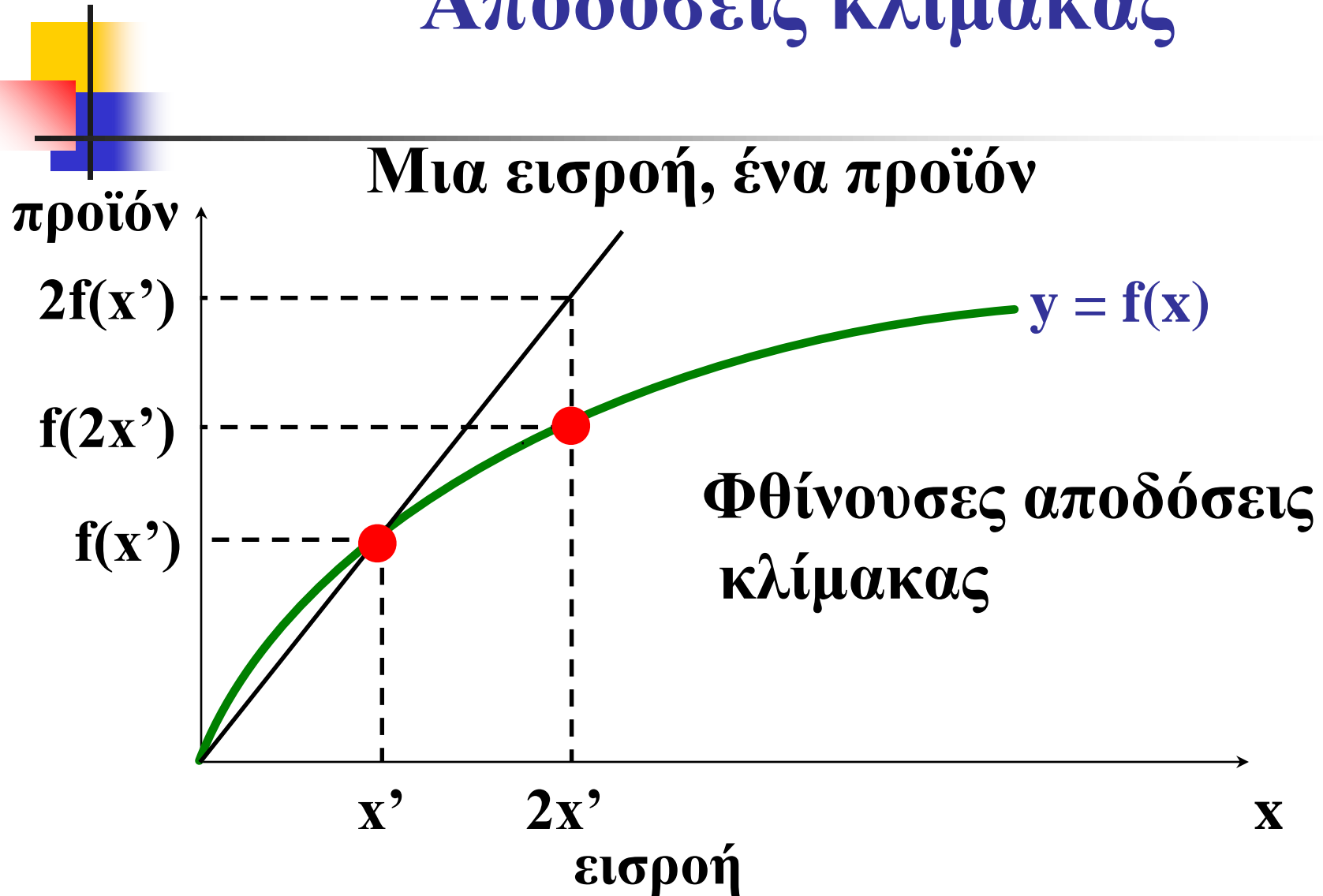
Αν, για κάθε δέσμη εισροών (x_1, \dots, x_n) ,

$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) < kf(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Τότε η τεχνολογία που περιγράφεται από τη συνάρτηση παραγωγής f παρουσιάζει **φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας**.

π.χ. ($k = 2$) ο διπλασιασμός των ποσοτήτων όλων των εισροών υποδιπλασιάζει το επίπεδο του προϊόντος.

Αποδόσεις κλίμακας





Αποδόσεις κλίμακας

Αν, για κάθε δέσμη εισροών (x_1, \dots, x_n) ,

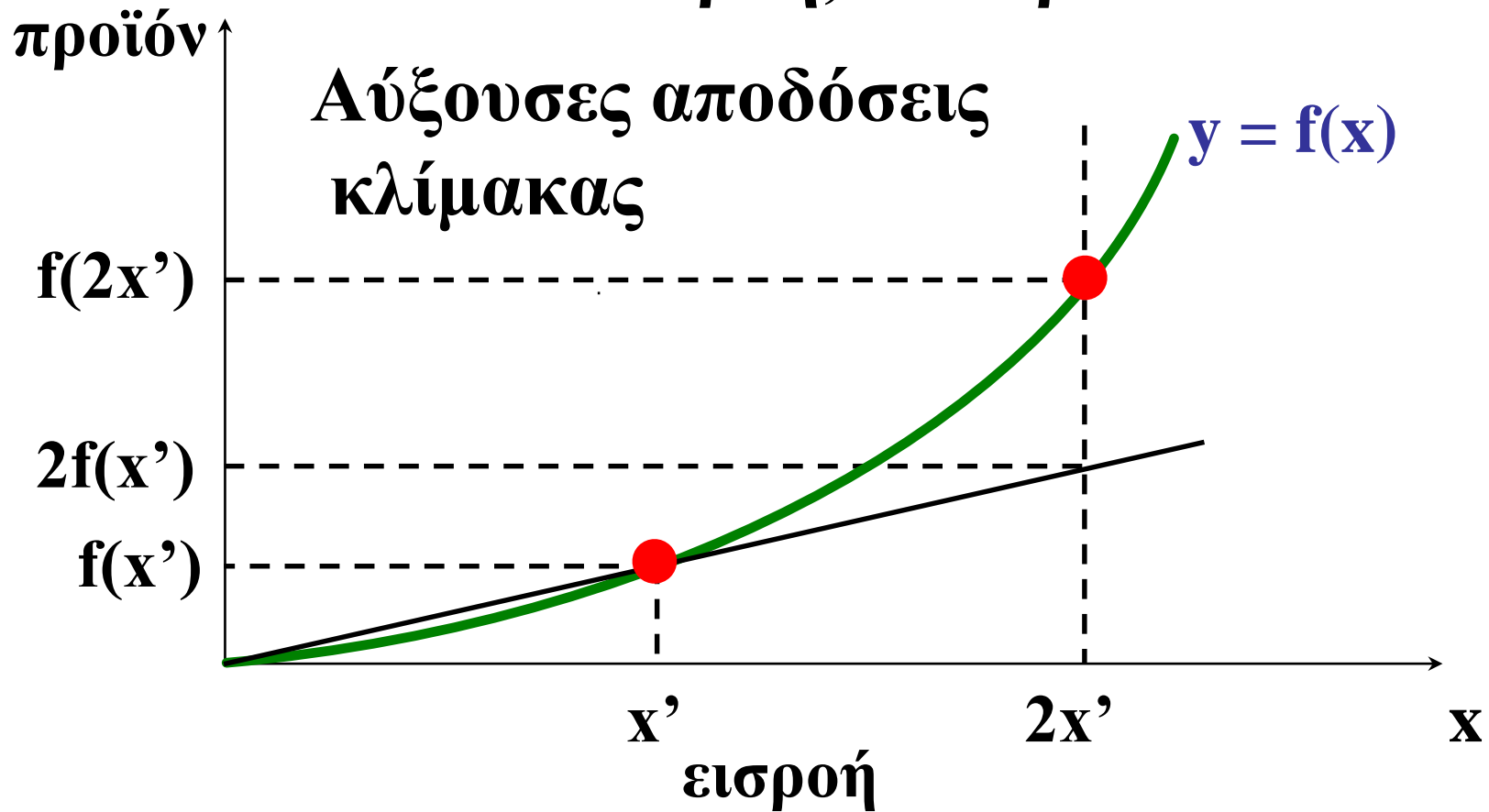
$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) > kf(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Τότε η τεχνολογία που περιγράφεται από τη συνάρτηση παραγωγής f παρουσιάζει **αύξουσες αποδόσεις κλίμακας**.

π.χ. ($k = 2$) ο διπλασιασμός των ποσοτήτων όλων των εισροών υπερδιπλασιάζει το επίπεδο του προϊόντος.

Αποδόσεις κλίμακας

Μια εισροή, ένα προϊόν





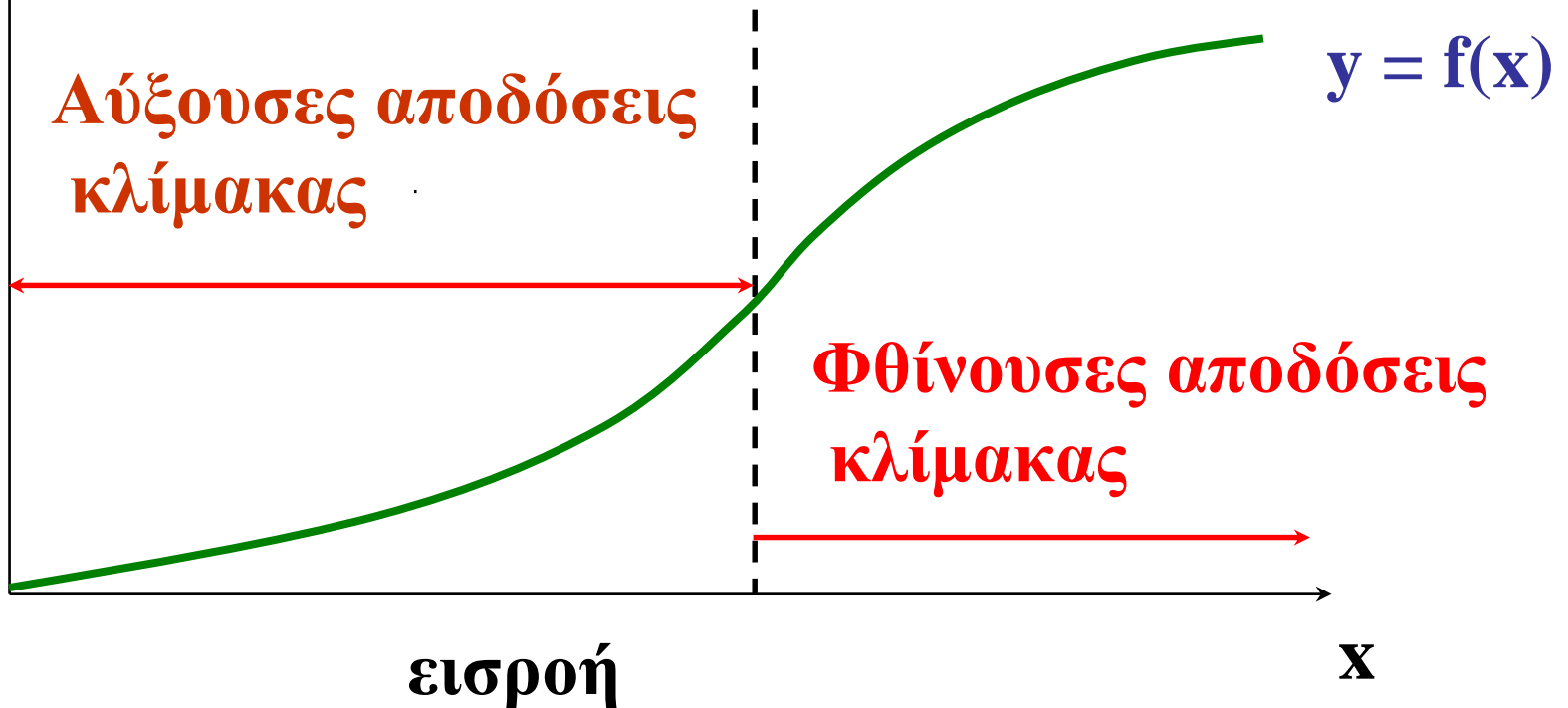
Αποδόσεις κλίμακας

Μια τεχνολογία μπορεί «τοπικά» να παρουσιάζει διαφορετικές αποδόσεις κλίμακας.

Αποδόσεις κλίμακας

Μια εισροή, ένα προϊόν

προϊόν



Παραδείγματα με αποδόσεις κλίμακας

Η συνάρτηση παραγωγής με τέλεια υποκατάστατα είναι

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Αύξησε όλες τις εισροές αναλογικά κατά k .
Το επίπεδο του προϊόντος γίνεται

$$a_1(kx_1) + a_2(kx_2) + \dots + a_n(kx_n)$$



Παραδείγματα με αποδόσεις κλίμακας

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_1(\mathbf{kx}_1) + \mathbf{a}_2(\mathbf{kx}_2) + \cdots + \mathbf{a}_n(\mathbf{kx}_n) \\ &= \mathbf{k}(\mathbf{a}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{x}_n) = \mathbf{k}y \end{aligned}$$

Η συνάρτηση παραγωγής με τέλεια υποκατάστατα παρουσιάζει σταθερές αποδόσεις κλίμακας.



Παραδείγματα με αποδόσεις κλίμακας

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}.$$

Αύξησε όλα τα επίπεδα εισροών κατά k .
Το επίπεδο του προϊόντος γίνεται

$$(kx_1)^{a_1} (kx_2)^{a_2} \dots (kx_n)^{a_n}$$



Παραδείγματα με αποδόσεις κλίμακας

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}.$$

Αύξησε όλα τα επίπεδα εισροών κατά k .
Το επίπεδο του προϊόντος γίνεται

$$\begin{aligned} & (kx_1)^{a_1} (kx_2)^{a_2} \dots (kx_n)^{a_n} \\ &= k^{a_1} k^{a_2} \dots k^{a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \end{aligned}$$



Παραδείγματα με αποδόσεις κλίμακας

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}.$$

Αύξησε όλα τα επίπεδα εισροών κατά k .

Το επίπεδο του προϊόντος γίνεται

$$\begin{aligned} & (kx_1)^{a_1} (kx_2)^{a_2} \dots (kx_n)^{a_n} \\ &= k^{a_1} k^{a_2} \dots k^{a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \\ &= k^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \end{aligned}$$

Παραδείγματα με αποδόσεις κλίμακας

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}.$$

Αύξησε όλα τα επίπεδα εισροών κατά k .

Το επίπεδο του προϊόντος γίνεται

$$\begin{aligned} & (kx_1)^{a_1} (kx_2)^{a_2} \dots (kx_n)^{a_n} \\ &= k^{a_1} k^{a_2} \dots k^{a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \\ &= k^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \\ &= k^{a_1 + \dots + a_n} y. \end{aligned}$$

Παραδείγματα με αποδόσεις κλίμακας

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}.$$

$$(kx_1)^{a_1} (kx_2)^{a_2} \dots (kx_n)^{a_n} = k^{a_1 + \dots + a_n} y.$$

Οι αποδόσεις κλίμακας τεχνολογίας Cobb-Douglas είναι

σταθερές αν $a_1 + \dots + a_n = 1$

Παραδείγματα με αποδόσεις κλίμακας

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}.$$

$$(kx_1)^{a_1} (kx_2)^{a_2} \dots (kx_n)^{a_n} = k^{a_1 + \dots + a_n} y.$$

Οι αποδόσεις κλίμακας τεχνολογίας Cobb-Douglas είναι

σταθερές αν $a_1 + \dots + a_n = 1$

αύξουσες αν $a_1 + \dots + a_n > 1$

Παραδείγματα με αποδόσεις κλίμακας

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}.$$

$$(kx_1)^{a_1} (kx_2)^{a_2} \dots (kx_n)^{a_n} = k^{a_1 + \dots + a_n} y.$$

Οι αποδόσεις κλίμακας τεχνολογίας Cobb-Douglas είναι

σταθερές αν $a_1 + \dots + a_n = 1$

αύξουσες αν $a_1 + \dots + a_n > 1$

φθίνουσες αν $a_1 + \dots + a_n < 1$



Αποδόσεις κλίμακας

Γενικά, αν η συνάρτηση παραγωγής είναι

$$q = f(k,l)$$

και όλες οι εισροές πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο θετικό σταθερό αριθμό ($t > 1$), τότε

Επίδραση στο προϊόν	Αποδόσεις κλίμακας
$f(tk,tl) = tf(k,l)$	Σταθερές
$f(tk,tl) < tf(k,l)$	Φθίνουσες
$f(tk,tl) > tf(k,l)$	Αύξουσες



Αποδόσεις κλίμακας

Ε: Μπορεί μια τεχνολογία να παρουσιάζει αύξουσες αποδόσεις κλίμακας ακόμη κι αν όλα τα οριακά της προϊόντα είναι φθίνοντα;

Αποδόσεις κλίμακας

Ε: Μπορεί μια τεχνολογία να παρουσιάζει αύξουσες αποδόσεις κλίμακας ακόμη κι αν όλα τα οριακά της προϊόντα είναι φθίνοντα;

Α:Ναι.

π.χ.
$$y = x_1^{2/3} x_2^{2/3} .$$



Αποδόσεις κλίμακας

$$y = x_1^{2/3} x_2^{2/3} = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$$a_1 + a_2 = \frac{4}{3} > 1$$

**Άρα αυτή η τεχνολογία παρουσιάζει
αύξουσες αποδόσεις κλίμακας.**

Αποδόσεις κλίμακας

$$y = x_1^{2/3} x_2^{2/3} = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$a_1 + a_2 = \frac{4}{3} > 1$ Άρα αυτή η τεχνολογία παρουσιάζει
αύξουσες αποδόσεις κλίμακας.

Αλλά $MP_1 = \frac{2}{3} x_1^{-1/3} x_2^{2/3}$ Φθίνει καθώς το x_1

αυξάνει

Αποδόσεις κλίμακας

$$y = x_1^{2/3} x_2^{2/3} = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

$$a_1 + a_2 = \frac{4}{3} > 1$$

Άρα αυτή η τεχνολογία παρουσιάζει
αύξουσες αποδόσεις κλίμακας.

Αλλά $MP_1 = \frac{2}{3} x_1^{-1/3} x_2^{2/3}$ φθίνει καθώς το x_1

αυξάνει και

$MP_2 = \frac{2}{3} x_1^{2/3} x_2^{-1/3}$ φθίνει καθώς το x_2

αυξάνει.



Αποδόσεις κλίμακας

Επομένως, μια τεχνολογία παρουσιάζει
αύξουσες αποδόσεις κλίμακας ακόμη και
αν όλα τα οριακά της προϊόντα φθίνουν.
Γιατί;



Αποδόσεις κλίμακας

Το οριακό προϊόν είναι ο ρυθμός μεταβολής του προϊόντος καθώς το επίπεδο **μιας** εισροής αυξάνει, διατηρώντας όλες τις άλλες εισροές σταθερές.

Το οριακό προϊόν φθίνει επειδή τα επίπεδα των άλλων συντελεστών παραμένουν σταθερά.

Επομένως, οι μονάδες της εισροής που αυξάνει έχουν όλο και λιγότερες μονάδες από τις άλλες εισροές για να συνεργαστούν.



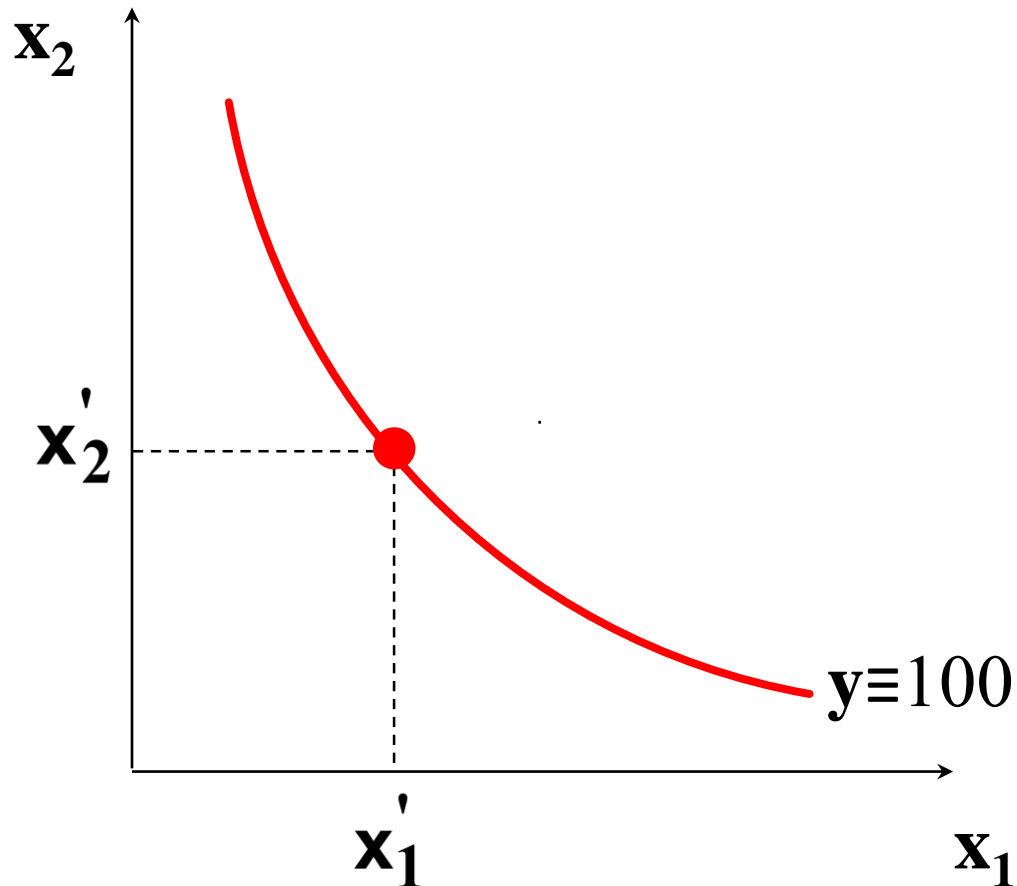
Αποδόσεις κλίμακας

Όταν τα επίπεδα **όλων** των εισροών αυξάνονται αναλογικά, δεν είναι απαραίτητο να μειώνονται τα οριακά προϊόντα, αφού η κάθε εισροή θα έχει πάντα την ίδια ποσότητα από τις άλλες εισροές με τις οποίες συνεργάζεται. Οι παραγωγικότητες των συντελεστών δεν μειώνονται απαραίτητα και γι αυτό οι αποδόσεις κλίμακας μπορεί να είναι σταθερές ή αύξουσες.

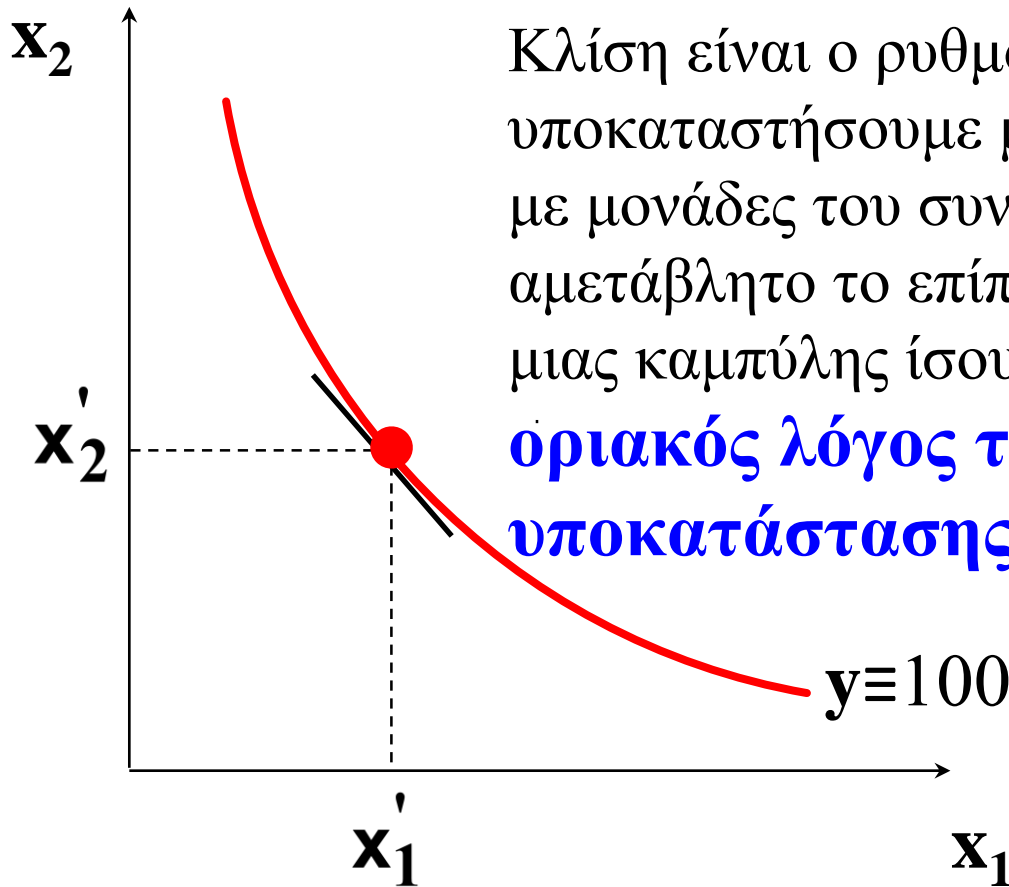
Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης

Με ποιο ρυθμό μπορεί μια επιχείρηση να υποκαθιστά ένα συντελεστή με έναν άλλο, χωρίς να αλλάζει το επίπεδο παραγωγής της;

Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης



Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης



Κλίση είναι ο ρυθμός στον οποίο πρέπει να υποκαταστήσουμε μονάδες του συντελεστή 2 με μονάδες του συντελεστή 1 για να μείνει αμετάβλητο το επίπεδο παραγωγής. Η κλίση μιας καμπύλης ίσου προϊόντος λέγεται **οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης (MRTS)**.

Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης



Πώς υπολογίζεται ο οριακός λόγος τεχνικής
υποκατάστασης;

Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης

Πώς υπολογίζεται ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης;

Η συνάρτηση παραγωγής είναι $y = f(x_1, x_2)$.

Μια μικρή μεταβολή στις εισροές (dx_1, dx_2) προκαλεί μια μεταβολή στο επίπεδο του προϊόντος

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

Αλλά με $dy = 0$ αφού δεν αλλάζει το επίπεδο παραγωγής, οι μεταβολές dx_1 και dx_2 πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2$$

Και με αναδιάταξη

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = - \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1$$

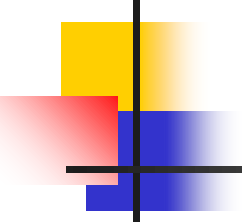
ή

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} .$$

Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2}$$

Είναι ο λόγος στον οποίο πρέπει να θυσιάσουμε μονάδες του συντελεστή 2 καθώς αυξάνει η χρήση του συντελεστή 1 έτσι ώστε να μείνει αμετάβλητο το επίπεδο παραγωγής. Είναι η κλίση της καμπύλης ίσου προϊόντος



Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης: π.χ. Cobb-Douglas

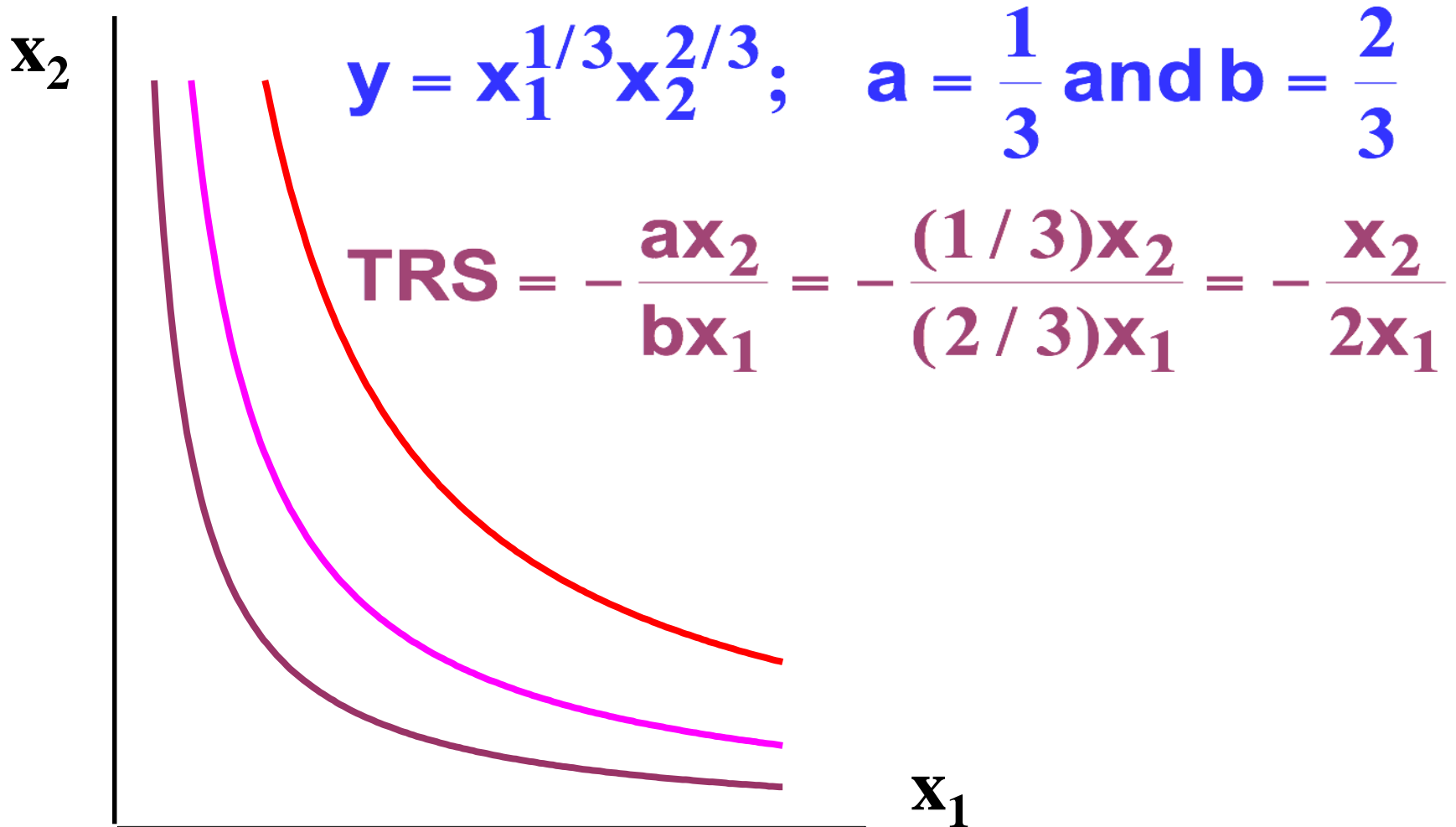
$$y = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

άρα $\frac{\partial y}{\partial x_1} = ax_1^{a-1}x_2^b$ και $\frac{\partial y}{\partial x_2} = bx_1^a x_2^{b-1}$.

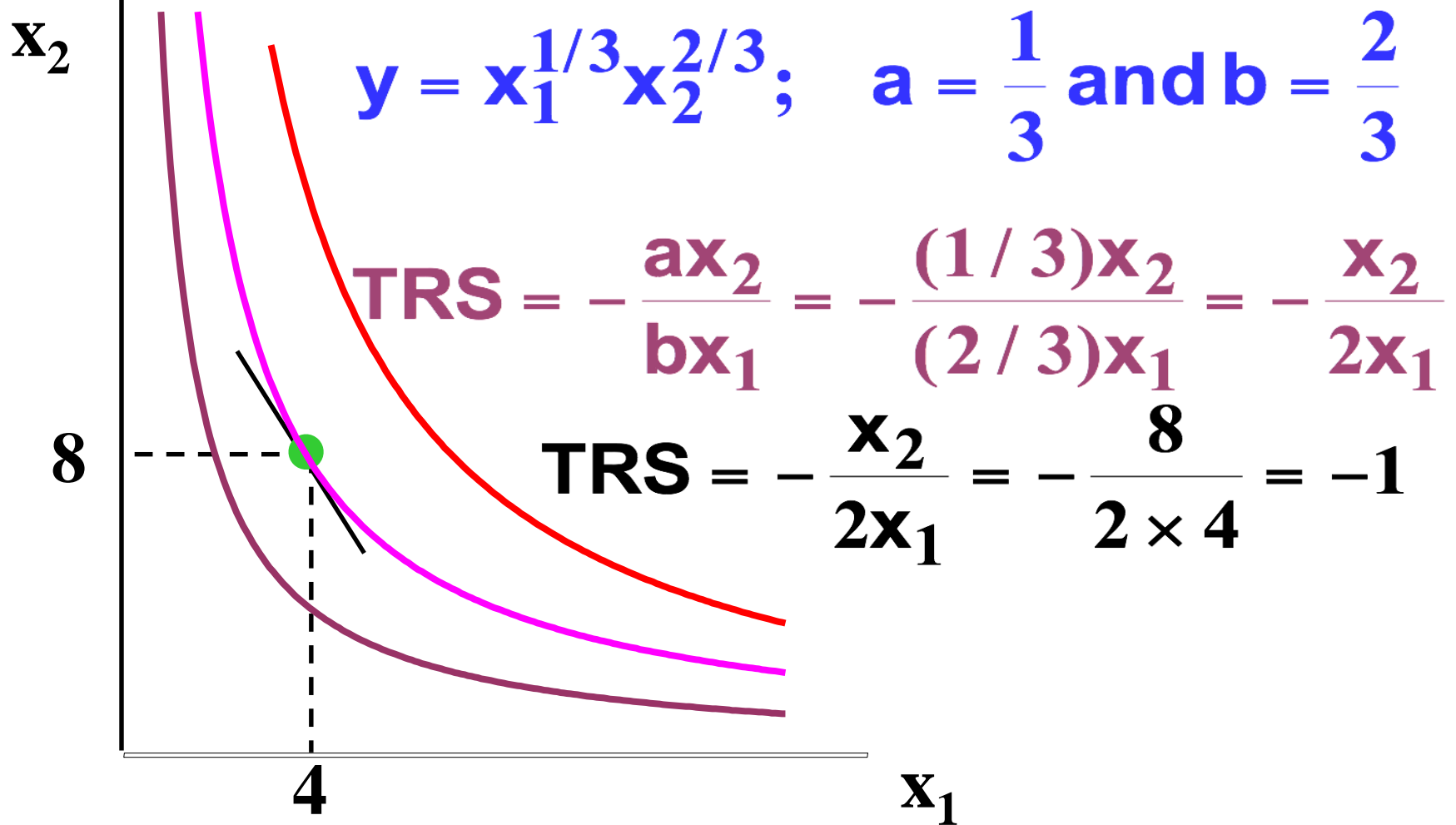
Ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης (MRTS) είναι

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = -\frac{ax_1^{a-1}x_2^b}{bx_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{ax_2}{bx_1}.$$

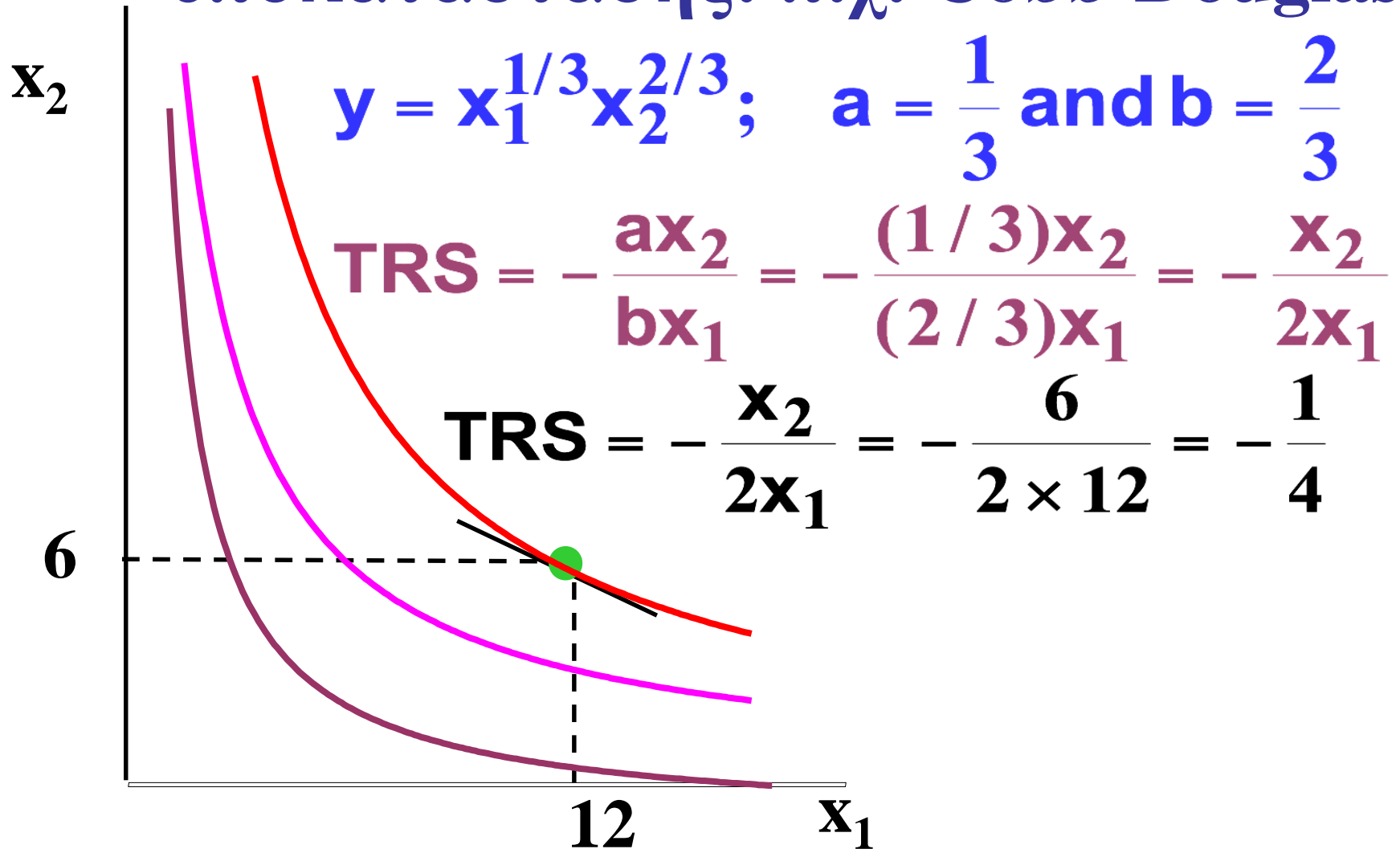
Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης: π.χ. Cobb-Douglas



Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης: π.χ. Cobb-Douglas



Οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης: π.χ. Cobb-Douglas



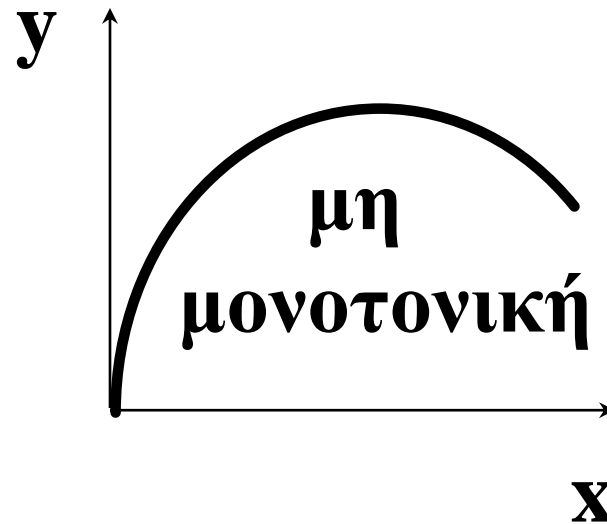
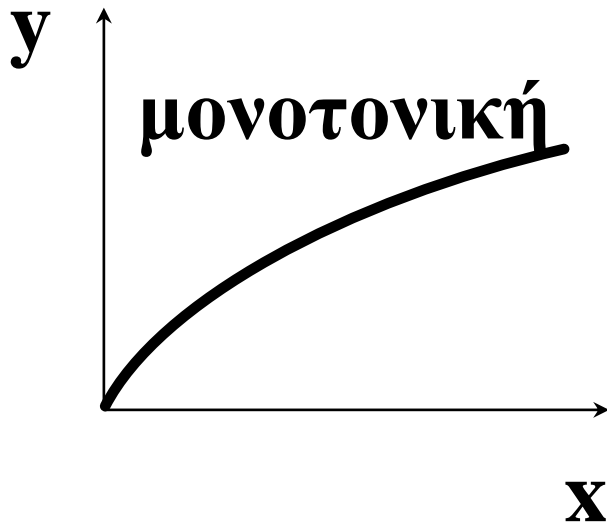


Ομαλές τεχνολογίες

Μια **ομαλή** τεχνολογία είναι
μονοτονική και
κυρτή.

Ομαλές τεχνολογίες- μονοτονικότητα

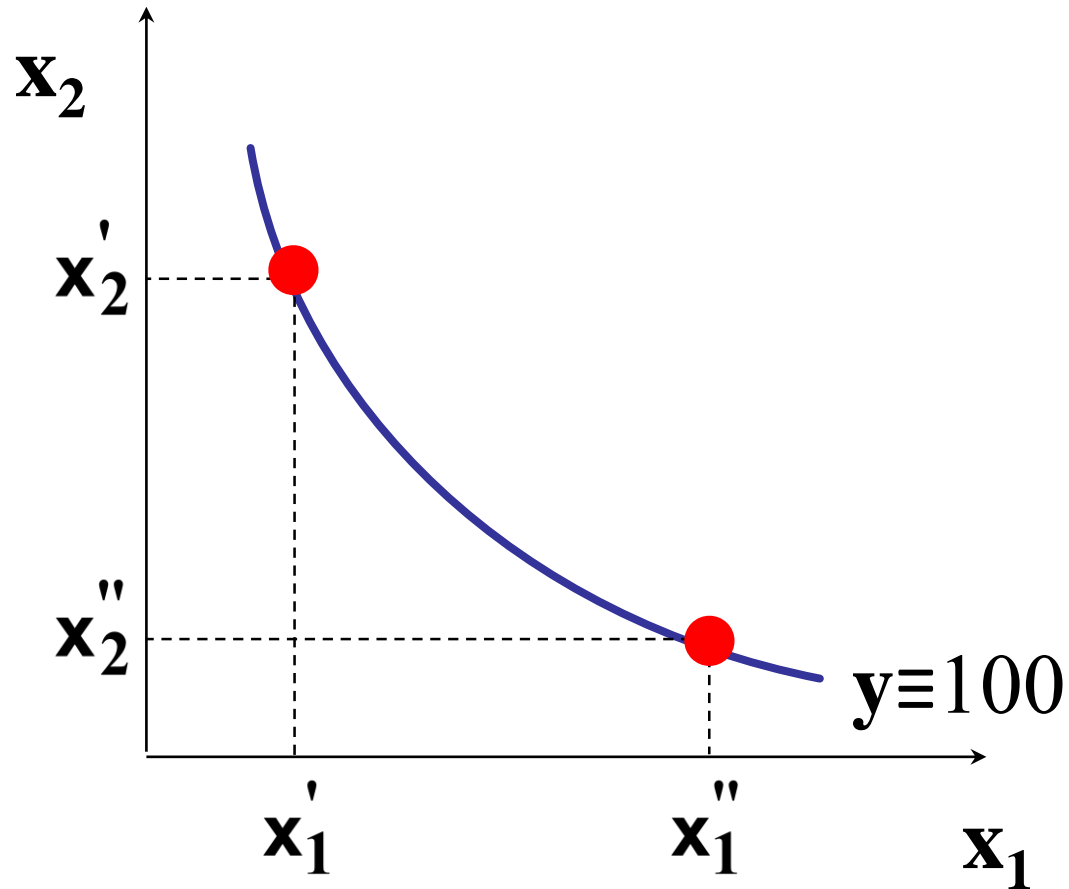
Μονοτονικότητα: Όσο πιο πολύ από μια εισροή τόσο μεγαλύτερο το προϊόν.



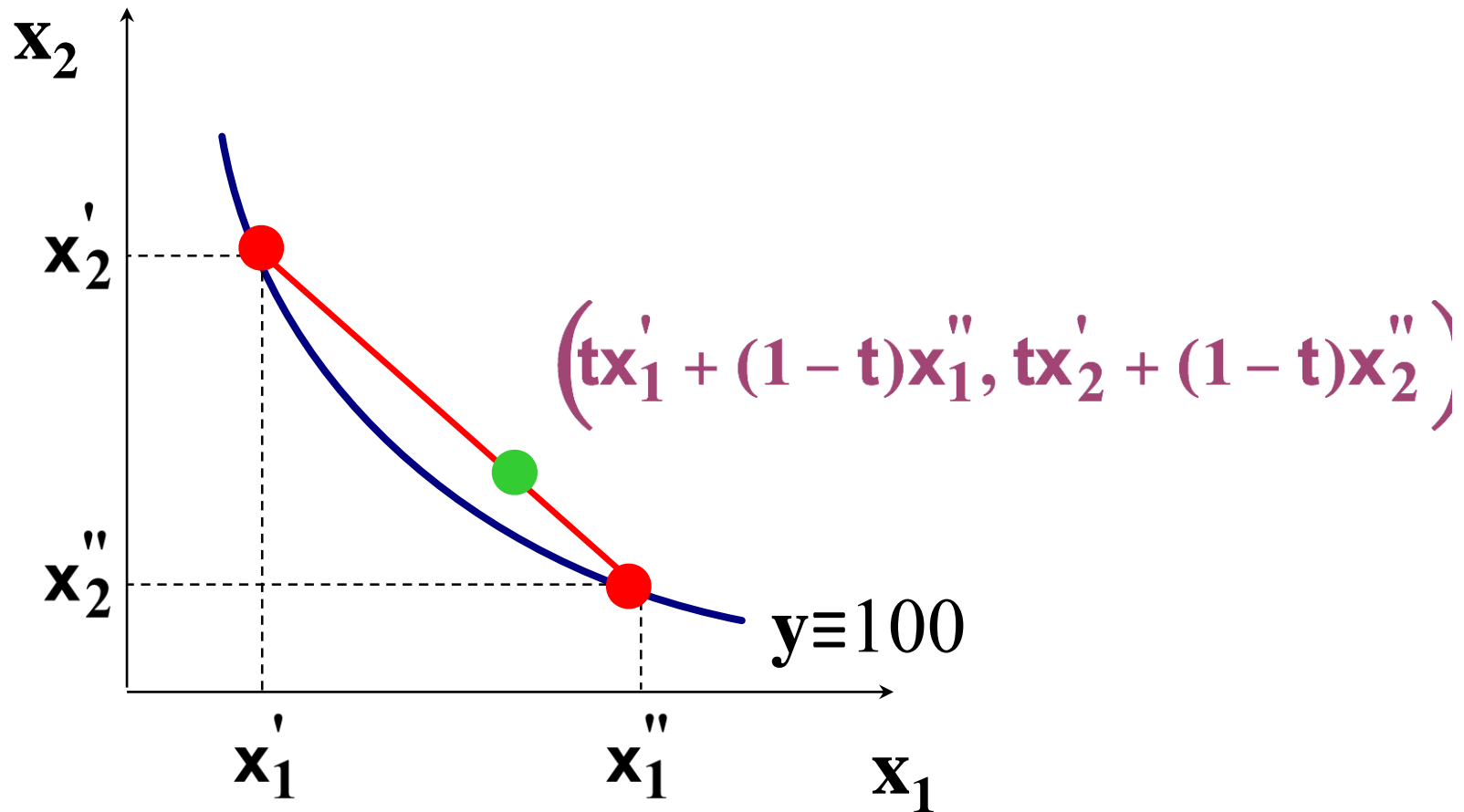
Ομαλές τεχνολογίες - κυρτότητα

Κυρτότητα: Αν ο συνδυασμός εισροών x' και x'' παράγουν y μονάδες προϊόντος, τότε το μείγμα εισροών $tx' + (1-t)x''$ παράγουν τουλάχιστο y μονάδες προϊόντος, για κάθε $0 < t < 1$.

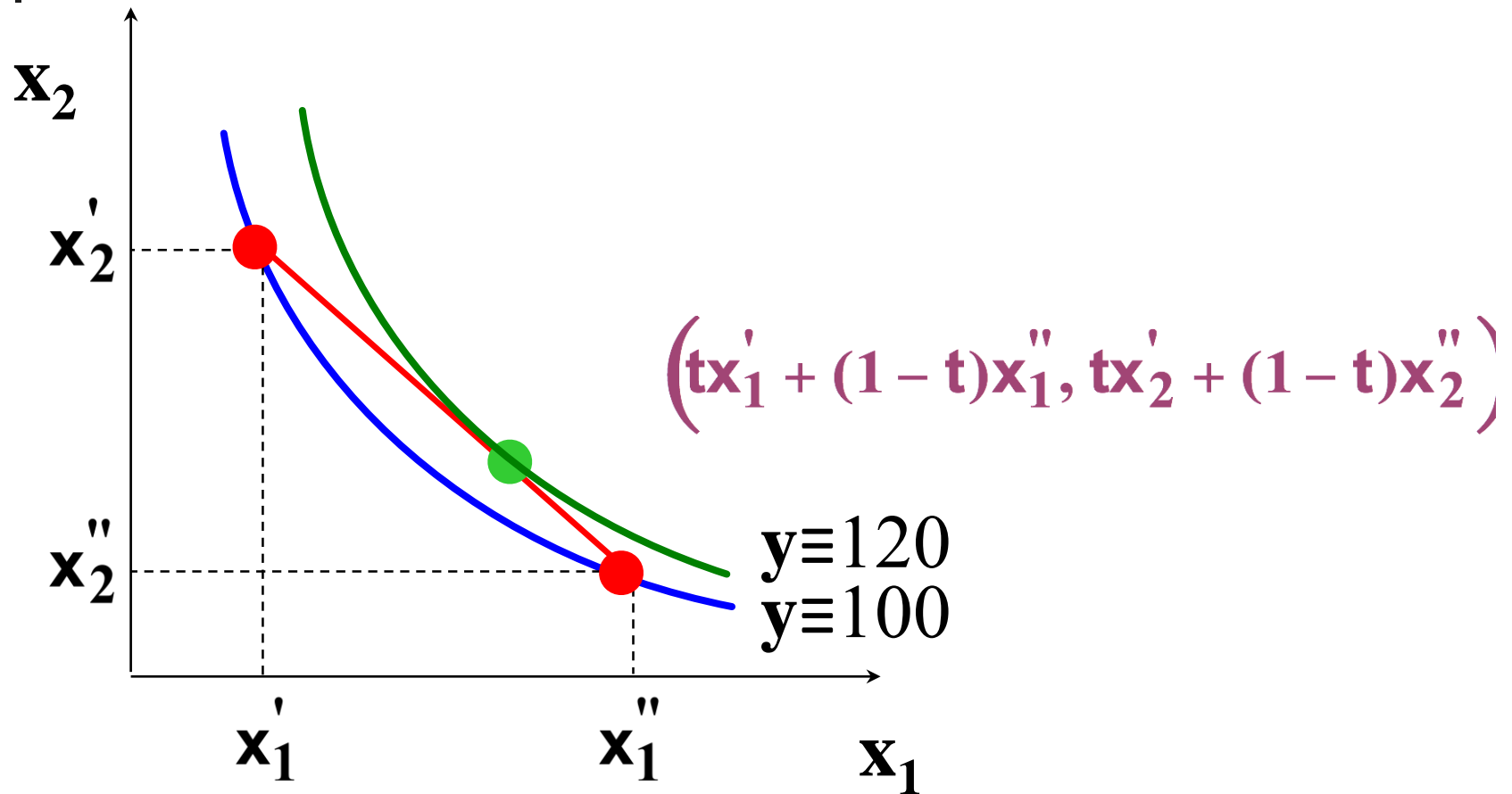
Ομαλές τεχνολογίες - κυρτότητα



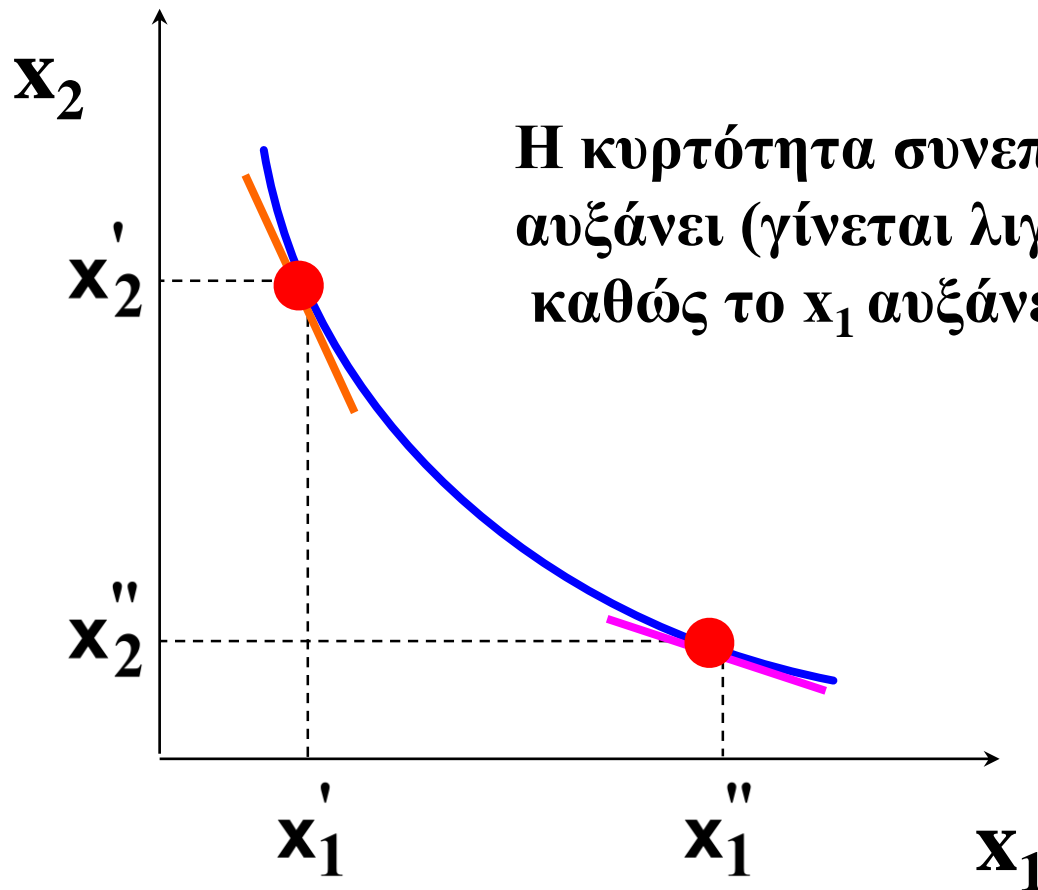
Ομαλές τεχνολογίες - κυρτότητα



Ομαλές τεχνολογίες - κυρτότητα

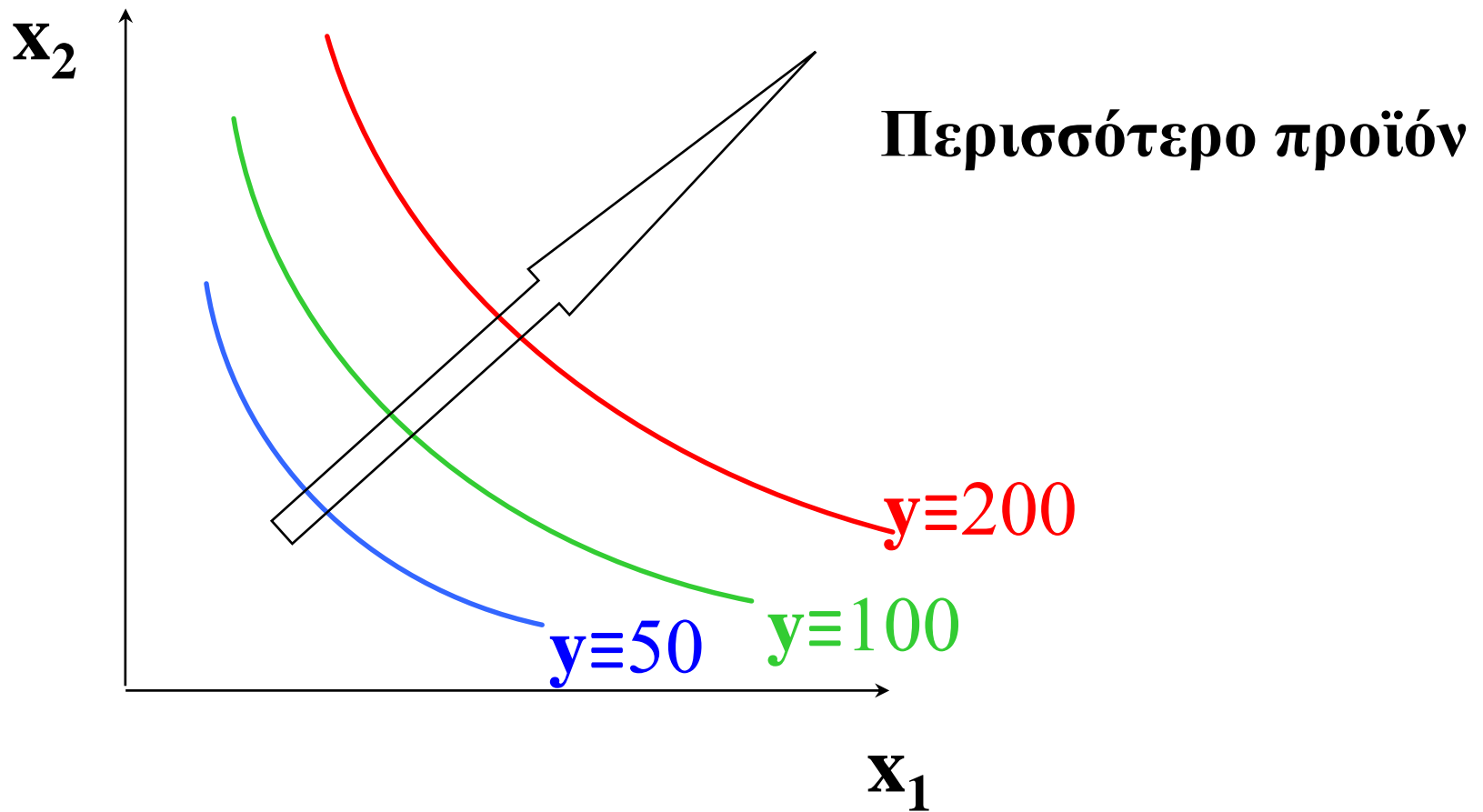


Ομαλές τεχνολογίες - κυρτότητα



Η κυρτότητα συνεπάγεται ότι ο MRTS αυξάνει (γίνεται λιγότερο αρνητικός) καθώς το x_1 αυξάνει.

Ομαλές τεχνολογίες - κυρτότητα





Η γραμμική συνάρτηση παραγωγής

Έστω η συνάρτηση παραγωγής

$$q = f(k, l) = ak + bl$$

Αυτή η συνάρτηση παρουσιάζει σταθερές αποδόσεις κλίμακας

$$f(tk, tl) = atk + btl = t(ak + bl) = tf(k, l)$$

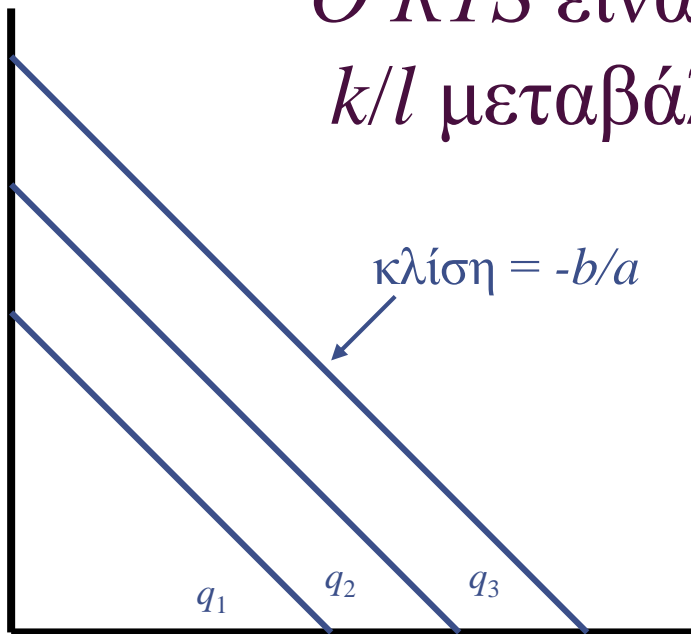
Όλες οι καμπύλες ίσου προϊόντος είναι ευθείες γραμμές.

Ο *RTS* είναι σταθερός

Η γραμμική συνάρτηση παραγωγής

Κεφάλαιο και εργασία είναι τέλεια υποκατάστατα

k ανά περίοδο



Ο RTS είναι σταθερός καθώς το k/l μεταβάλλεται

l ανά περίοδο

Μακροχρόνια και βραχυχρόνια περίοδος



Στη μακροχρόνια περίοδο η επιχείρηση δεν έχει περιορισμούς στην επιλογή της για τις ποσότητες που θα χρησιμοποιήσει από όλες τις εισροές.

Υπάρχουν πολλές βραχυχρόνιες περίοδοι.

Στη βραχυχρόνια περίοδο η επιχείρηση έχει περιορισμούς στις επιλογές της για το επίπεδο εισροής που θα χρησιμοποιήσει τουλάχιστο για μια εισροή.

Μακροχρόνια και βραχυχρόνια περίοδος



- Παραδείγματα περιορισμών που έχει μια επιχείρηση βραχυχρόνια :
 - Δεν μπορεί να εγκαταστήσει ή να απομακρύνει εξοπλισμό για μικρό χρονικό διάστημα.
 - Υποχρεώνεται από το νόμο να μην χρησιμοποιεί κάποιες εισροές πάνω από ένα ποσό
 - Σε μερικές περιπτώσεις πρέπει να χρησιμοποιεί, μέχρι ένα ποσοστό, εγχώριες εισροές.

Μακροχρόνια και βραχυχρόνια περίοδος



Ένας χρήσιμος τρόπος για να σκεφτούμε τη μακροχρόνια περίοδο είναι να θεωρήσουμε ότι η επιχείρηση μπορεί να επιλέξει, όπως της αρέσει, σε ποια βραχυχρόνια κατάσταση θα ήθελε να είναι.

Μακροχρόνια και βραχυχρόνια περίοδος

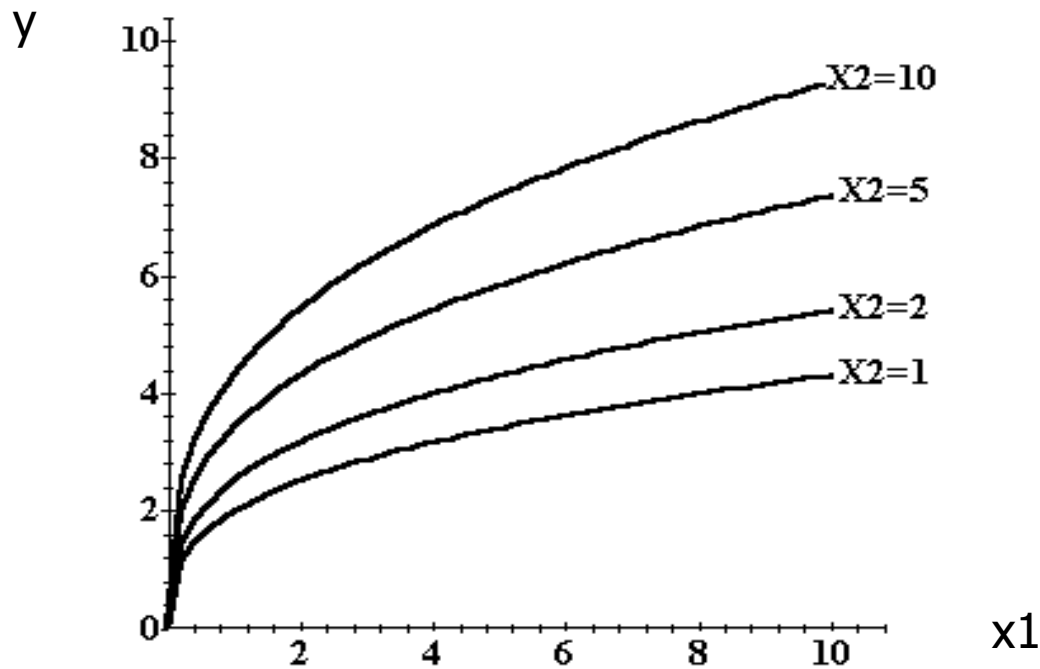


Τι συνεπάγονται οι βραχυχρόνιοι περιορισμοί στην τεχνολογία μιας επιχείρησης;

Ας υποθέσουμε ότι ένας βραχυχρόνιος περιορισμός είναι να είναι σταθερό το επίπεδο χρήσης της εισροής 2.

Η εισροή 2 είναι επομένως μια **σταθερή** εισροή βραχυχρόνια. Η εισροή 1 παραμένει **μεταβλητή**.

Μακροχρόνια και βραχυχρόνια περίοδος



Τέσσερις βραχυχρόνιες συναρτήσεις παραγωγής.

Μακροχρόνια και βραχυχρόνια περίοδος

$y = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$ είναι η μακροχρόνια συνάρτηση παραγωγής
(x_1 και x_2 είναι μεταβλητά).

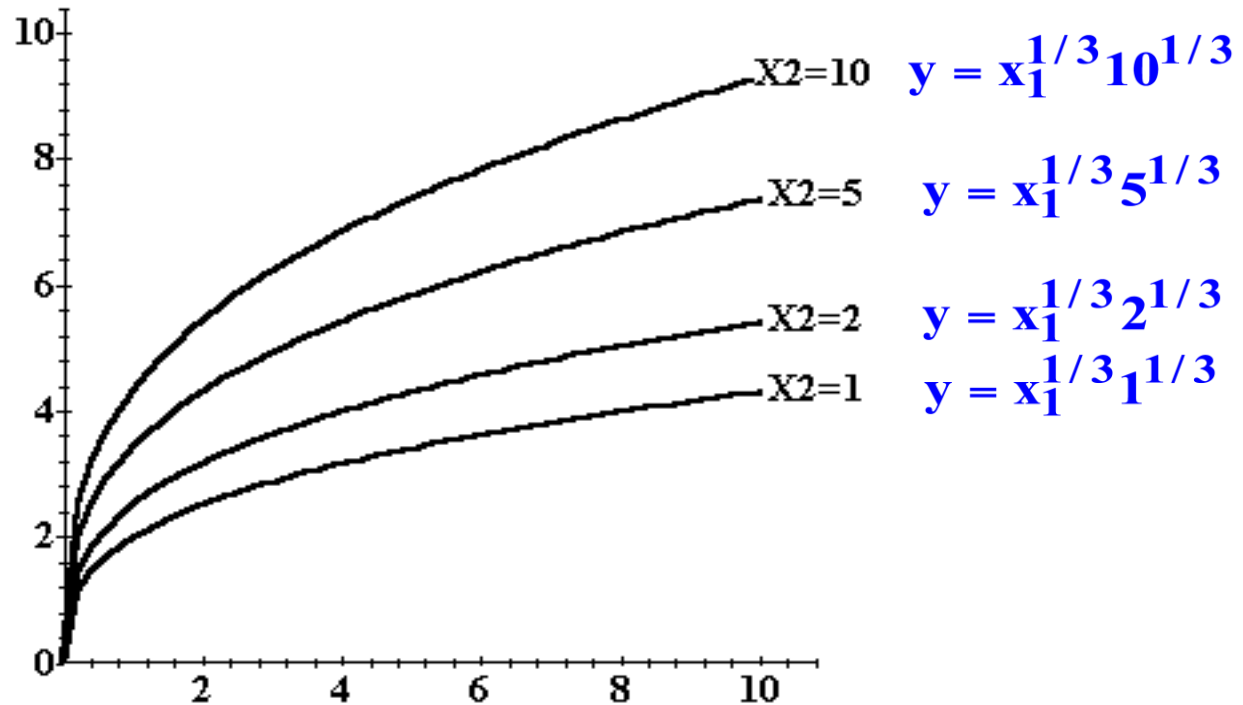
Η βραχυχρόνια συνάρτηση παραγωγής όταν
 $x_2 \equiv 1$ είναι

$$y = x_1^{1/3} 1^{1/3} = x_1^{1/3}.$$

Η βραχυχρόνια συνάρτηση παραγωγής όταν
 $x_2 \equiv 10$ είναι

$$y = x_1^{1/3} 10^{1/3}.$$

Μακροχρόνια και βραχυχρόνια περίοδος



Τέσσερις βραχυχρόνιες συναρτήσεις παραγωγής.



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Σημειώματα



Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών,
Ανδρέας Παπανδρέου 2015. Ανδρέας Παπανδρέου.
«Μικροοικονομική Ανάλυση της Κατανάλωσης και της Παραγωγής.
Τεχνολογία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή
διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/ECON5/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.