ΕΚΠΑ-ΝΟΠΕ-ΤΟΕ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

<u>Διδάσκων:</u> Στ. Κώτσιος

3η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

<u>Άσκηση 1η:</u>. Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\vec{u} = (1,-1,0,3)$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{v} = (0,1,1,-4)$.

<u>Άσκηση 2η:</u>. Έστωσαν τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$. Δείξατε ότι τα διανύσματα αυτά είναι ορθογώνια αν και μόνον αν $\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} + \vec{v} \|^2$. (Πυθαγόρειο θεώρημα).

<u>Άσκηση 3η:</u>. Δείξατε ότι εάν οποιοδήποτε διαγώνιο στοιχείο του

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix}$$

Γίνει μηδέν, τότε οι γραμμές είναι γραμμικώς εξαρτημένες

<u>Άσκηση 4η:</u>. Βρείτε την διάσταση του χώρου των συμμετρικών 3 επί 3 πινάκων καθώς και μία βάση.

<u>Άσκηση 5η:</u> Ποιο από τα κάτωθι υποσύνολα του R^3 είναι γραμμικός υπόχωρος;

1) Το σύνολο των διανυσμάτων με πρώτη συνιστώσα μηδέν.
2) Το σύνολο των διανυσμάτων με πρώτη συνιστώσα το ένα.
3) Τα διανύσματα (α,β,γ) με $\alpha\beta=0$.
4) Το διάνυσμα $(0,0,0)$.
5) Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $(1,1,0)$ και $(2,0,1)$.
6) Τα διανύσματα (α,β,γ) με $\gamma-\beta+3\alpha=0$.

<u>Άσκηση 6η:</u>. Ποια από τα επόμενα σύνολα είναι γραμμικοί υπόχωροι του συνόλου όλων των πραγματικών ακολουθιών;
1) Όλες οι ακολουθίες που είναι ίσες με μηδέν από ένα n και μετά.
2) Όλες οι φθίνουσες ακολουθίες.
3) Όλες οι συγκλίνουσες ακολουθίες.
4) Όλες οι αριθμητικές πρόοδοι.
5) Όλες οι γεωμετρικές πρόοδοι.

<u>Άσκηση 7η:</u>. Δείξατε ότι κάθε υποσύνολο ενός συνόλου γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων, αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

<u>Άσκηση 8η:</u>. Έστω V ο γραμμικός χώρος των πολυωνύμων 4ου βαθμού. Ελέγξατε εάν τα κάτωθι σύνολα αποτελούν βάση:

1) $\{1,1+t,1+t+t^2,1+t+t^2+t^3,1+t+t^2+t^3+t^4\}$

2) $\{1+t,t+t^2,t^2+t^3,t^3+t^4\}$

<u>Άσκηση 9η:</u>. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $u_1,u_2,\ldots u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνον αν τα διανύσματα $u_1,u_2+a_2u_1,u_3+a_3u_1,\ldots,u_n+a_nu_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Άσκηση 10η:</u> Να δειχτεί ότι τα διανύσματα $(1,0,0,4),(1,1,0,0),\quad(0,0,1,1),(0,0,0,2)$ αποτελούν βάση στο R^4 και να βρεθούν οι συντεταγμένες ενός τυχαίου διανύσματος ως προς αυτή την βάση.

<u>Άσκηση 11η:</u> Εξετάσατε εάν υπάρχει αριθμός a τέτοιος ώστε τα διανύσματα (1,1,1) και $(1,a,a^2)$ να αποτελούν βάση του R^3.<u>(προσοχή ο εκθέτης είναι 3)</u>

<u>Άσκηση 12η:</u> Έστωσαν οι υπόχωροι:

$$U=\{(x,y,z,w),\quad y+z+w=0\}$$
$$W=\{(x,y,z,w)\},\quad x+y=0,\quad y-2w=0\}$$

Βρείτε μία βάση και την διάσταση της τομής τους.

<u>Άσκηση 13η:</u> Να υπολογισθεί η τιμή της παραμέτρου k ώστε η γωνία των διανυσμάτων (-1,-1,0), (-1,k,-2k+1) να είναι $\pi/3$.

Άσκηση 14η: Να βρείτε μία βάση και την διάσταση του υπόχωρου που παράγεται από τα διανύσματα (1,2,0), (4,0,-7) και (0,1,3).

Άσκηση 15η: Να βρείτε μία βάση και την διάσταση του υπόχωρου που παράγεται από τα διανύσματα:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 16η: Δίδεται ο γραμμικός χώρος των 2x2 πινάκων $M_2(R)$ και το σύνολο U:

$$U = \left\{ A \in M_2(R): \quad A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \right\}$$

Δείξατε ότι το U είναι υπόχωρος. Να βρείτε μία βάση και την διάσταση αυτού του υπόχωρου.