

ΕΚΠΑ-ΝΟΠΕ-ΤΟΕ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διδάσκων: Στ. Κώτσιος

1^η ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1^η: Δίδονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας σύνθετους πίνακες υπολογίσατε το γινόμενο AB , καθώς και τον αντίστροφο του A .

Άσκηση 2^η: Ένας τετραγωνικός πίνακας A ικανοποιεί την σχέση:

$A^2 + 2A - 3I = 0$. Υπολογίσατε τον αντίστροφο του A και απλοποιήσατε την παράσταση: $A^4 + 2A^3 - 4A^2 - A + I$.

Άσκηση 3^η: Έστωσαν οι πίνακες A, B . Εάν ο πίνακας $I + AB$ είναι αντιστρέψιμος, δείξατε ότι: $(I + BA)^{-1} = I - B(I + AB)^{-1}A$.

Άσκηση 4^η: Υπολογίσατε την n -οστή δύναμη του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5^η: Δίδονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Εξετάσατε εάν ισχύουν οι ιδιότητες:

$$(A \otimes B) \otimes d = A \otimes (B \otimes d), \quad B \otimes (A + C) = (B \otimes A) + (B \otimes C)$$

Άσκηση 6^η: Αποδείξατε την ιδιότητα: $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.

Άσκηση 7^η: Να βρεθούν όλοι οι πίνακες που αντιμετατίθενται με τον $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 8^η: Έστωσαν δύο 2×2 πίνακες, A, B . Δείξατε ότι υπάρχει αριθμός λ έτσι ώστε: $(AB - BA)^2 = \lambda I$.

Άσκηση 9^η: Να βρεθούν όλοι οι 2×2 πίνακες, που επαληθεύουν την ισότητα: $X^2 = 0$.

Άσκηση 10^η: Υπολογίσατε την n -οστή δύναμη του πίνακα: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 11^η: Αν για έναν πίνακα A , ισχύει $A^2 = A$, δείξτε ότι $A^\mu = A^\nu$, για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς μ, ν .

Άσκηση 12^η: Αποδείξτε την σχέση $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$.

Άσκηση 13^η: Αποδείξτε ότι κάθε πίνακας με μηδενική γραμμή ή στήλη δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 14^η: Εάν οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι, δείξτε ότι και το γινόμενο AB είναι αντιστρέψιμο και μάλιστα $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Άσκηση 15^η: Αποδείξτε ότι εάν ο πίνακας B αντιμετατίθεται με όλους τους 2×2 πίνακες, τότε $B = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}$, για κάποιο κ .

Άσκηση 16^η: Δώσατε παραδείγματα 2×2 πινάκων, τέτοιων ώστε:

- α) $A^2 = -I$
- β) $B^2 = 0$ με $B \neq 0$
- γ) $CD = -DC$ χωρίς να συμβαίνει $CD = 0$
- δ) $EF = 0$, χωρίς κανένα στοιχείο των E και F να είναι 0 .

Άσκηση 17^η: Υπό ποιές συνθήκες για τα στοιχεία του είναι ο A αντιστρέψιμος, όταν

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 18^η: Έστω $M_{2 \times 2}(B)$, το σύνολο των 2×2 πινάκων, με στοιχεία τους δυαδικούς αριθμούς 0 ή 1 . Διαλέγουμε έναν πίνακα στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα να είναι αντιστρέψιμος;

Άσκηση 19^η: Να βρεθεί η LDU παραγοντοποίηση του πίνακα: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 20^η: Επιλύσατε προσεγγιστικά την διαφορική εξίσωση:

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{e^x}{x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad f(0) = f(1) = 0$$

Χρησιμοποιώντας βήμα $h=0.2$.