



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# ΛΟΓΙΚΟ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ & ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

## Ενότητα 2: Σχέσεις

Δημήτρης Χασάπης

**Τμήμα Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία**

# ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΛΟΓΙΚΟ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

**Ποιες είναι οι θεμελιώδεις λογικές έννοιες και σχέσεις, οι οποίες αποτελούν αναγκαία προϋπόθεση για τη συγκρότηση των μαθηματικών εννοιών;**



# ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ

Προϋποθέσεις για τη συγκρότηση των λογικο-  
μαθηματικών σχέσεων και των μαθηματικών  
εννοιών



Η μονιμότητα των αντικειμένων  
και η σταθερότητα των χαρακτηριστικών  
τους στο χώρο



Διατήρηση των χαρακτηριστικών ενός αντικειμένου ή ενός συνόλου αντικειμένων ανεξάρτητα από τις θέσεις τους στο χώρο και την οπτική γωνία θέασης τους



# Ομαδοποίηση

# Ταξινόμηση

με βάση μια ή περισσότερες ιδιότητες



# ΣΧΕΣΗ

**σχέση**

**κάθε σαφώς διατυπωμένος κανόνας**

**ο οποίος συνδέει μεταξύ τους στοιχεία του ίδιου ή διαφορετικών συνόλων υλικών ή νοητών**



# ΛΟΓΙΚΟ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

- Ισοδυναμία
- Διάταξη
- Αντιστοίχιση





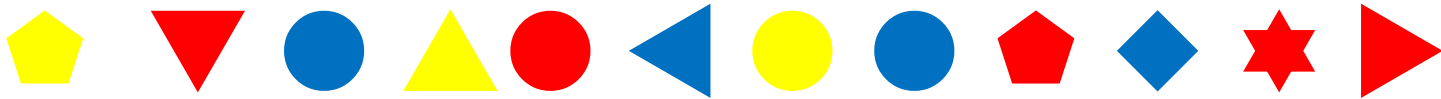
# ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

Μια σχέση  
είναι σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο,  
όταν ορίζει ένα **κριτήριο**  
με βάση το οποίο **δύο οποιαδήποτε στοιχεία**  
**του συνόλου μπορεί να θεωρηθούν ίδια**

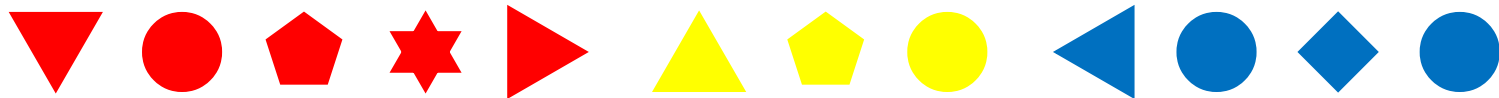
..... ίδιο .....



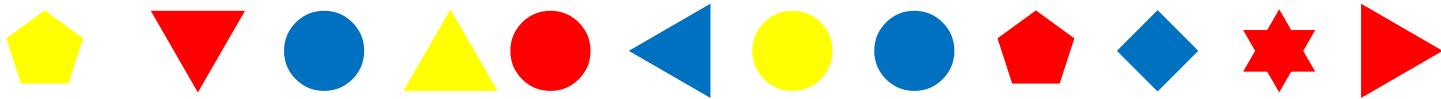
..... ίδιο .....



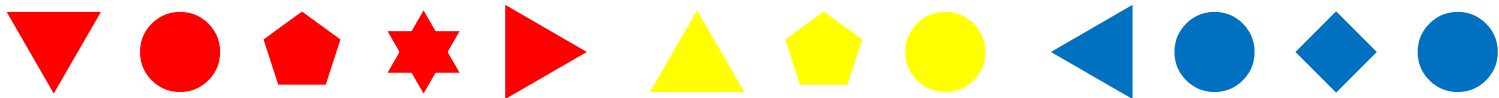
χρώμα



..... ίδιο .....



σχήμα



# ΣΧΕΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Κάθε σχέση ισοδυναμίας **ομαδοποιεί** αντικείμενα θεωρώντας τα ισοδύναμα με βάση ένα καθορισμένο κριτήριο και ταυτόχρονα με βάση το ίδιο κριτήριο τα διακρίνει από όλα τα υπόλοιπα.

Κάθε σχέση ισοδυναμίας δηλαδή, είναι μια σχέση **ταύτισης και διάκρισης** αντικειμένων.



# ΔΙΑΚΡΙΣΗ – ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

Η **διάκριση** και η αντίστροφη πράξη της η **ταύτιση** δύο ή περισσότερων αντικειμένων βασίζεται πρωταρχικά σε άμεσα αντιληπτά ποιοτικά χαρακτηριστικά ή ιδιότητες των αντικειμένων, ενώ αντίθετα η **σύγκριση** δύο ή περισσότερων αντικειμένων μεταξύ τους βασίζεται πρωταρχικά σε ποσοτικοποιημένα ή ποσοτικά χαρακτηριστικά των αντικειμένων, που δεν είναι άμεσα αντιληπτά αλλά προκύπτουν ως αποτέλεσμα νοητικής επεξεργασίας.

Η σύγκριση επομένως είναι πιο σύνθετη νοητική πράξη και προϋποθέτει τη διάκριση των αντικειμένων.



# ΔΙΑΚΡΙΣΗ – ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

**Η διάκριση και η ταύτιση αντικειμένων με βάση ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά ή ιδιότητες τους επιβάλλει τη συγκρότηση σχέσεων ισοδυναμίας μεταξύ των αντικειμένων αυτών, οι οποίες με τη σειρά τους υποβάλλουν δραστηριότητες ομαδοποίησης και ταξινόμησης των ίδιων αντικειμένων.**

και αντίστροφα



# ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΝΟΗΤΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ

**διάκριση – ταύτιση αντικειμένων**



**σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των αντικειμένων**



**δραστηριότητες ομαδοποίησης  
και ταξινόμησης των αντικειμένων**



# ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΚΑΙ ΤΑΥΤΙΣΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

έχει διαπιστωθεί, ότι τα παιδιά διακρίνουν και ταυτίζουν αντικείμενα (και αντίστοιχα συγκροτούν σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των αντικειμένων) σταδιακά με βάση:

- **Φυσικά χαρακτηριστικά ή ιδιότητες** άμεσα αντιληπτές (χρώμα, σχήμα, υλικό των αντικειμένων)
- **Λειτουργικά χαρακτηριστικά ή ιδιότητες** (χρήση των αντικειμένων από τους ανθρώπους)
- **Σχέσεις σε ένα γενικότερο σύστημα σχέσεων** (σχέσεις συγγένειας ή κτήσης)





# ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

Από αντίστοιχες έρευνες μάλιστα έχει διαπιστωθεί ότι μεταξύ των φυσικών χαρακτηριστικών των αντικειμένων προηγείται στην πορεία της νοητικής εξέλιξης η διάκριση

1. του **χρώματος**,
2. έπεται η διάκριση του **μεγέθους** και ακολουθεί η διάκριση
3. της **μορφής και του σχήματος** των αντικειμένων.



# ΤΑΥΤΙΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΣΗ

Τα στοιχεία κάθε συνόλου που προκύπτει από μια ομαδοποίηση ή μια ταξινόμηση **ταυτίζονται** μεταξύ τους

και ταυτόχρονα

**διακρίνονται** από τα στοιχεία των άλλων συνόλων

από **μια κοινή ιδιότητα ή από ένα κοινό χαρακτηριστικό,**

το οποίο προσδιορίζεται από την αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας



**Η συγκρότηση σχέσεων ισοδυναμίας  
είναι η βάση της  
συγκρότησης των εννοιών**



# ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ Η ΣΥΜΠΕΡΙΛΗΨΗΣ

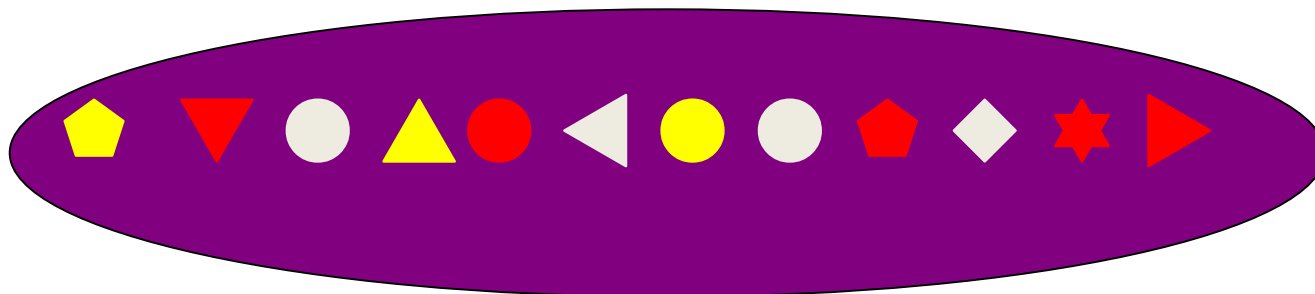
Η διαμέριση ενός συνόλου σε τάξεις, δηλαδή η εισαγωγή μιας σχέσης ισοδυναμίας σε ένα σύνολο

παράγει

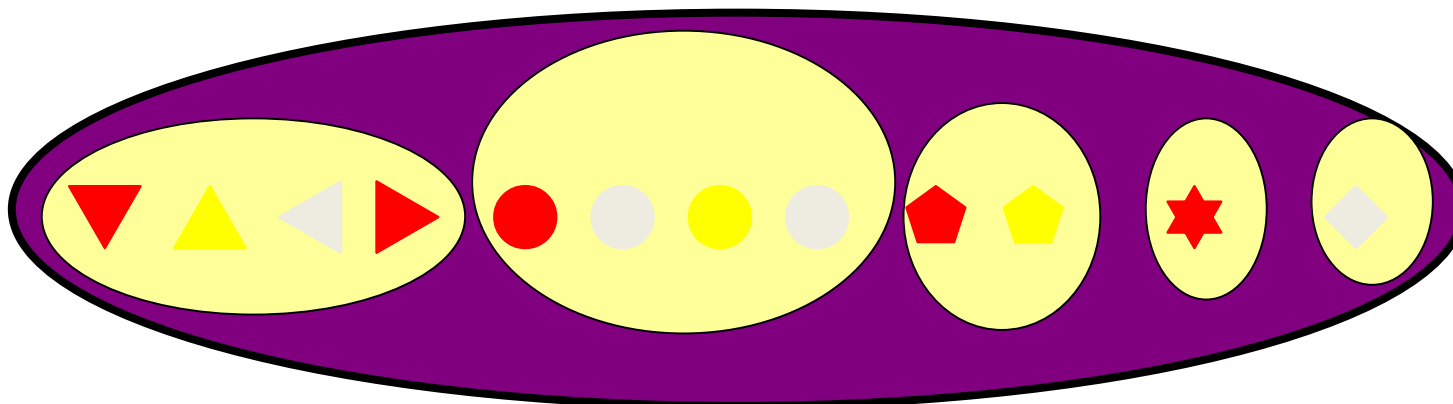
- σχέσεις μεταξύ των τάξεων,
- σχέσεις μεταξύ των τάξεων και του συνόλου και
- σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του συνόλου και των τάξεων στις οποίες διαμερίζεται



Σύνολο



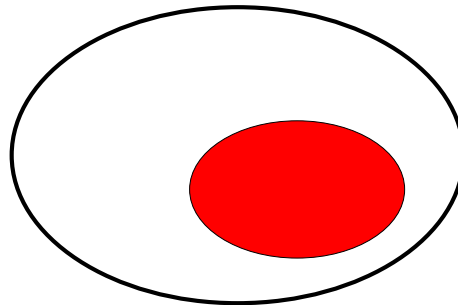
Σχέση ισοδυναμίας «ίδιο σχήμα»



σχέσεις ανάμεσα στα **μέρη** (τάξεις ή στοιχεία τάξεων)  
και στο **όλο** (σύνολο ή τάξη).

# ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ΜΕΡΗ ΚΑΙ ΣΤΟ ΟΛΟ

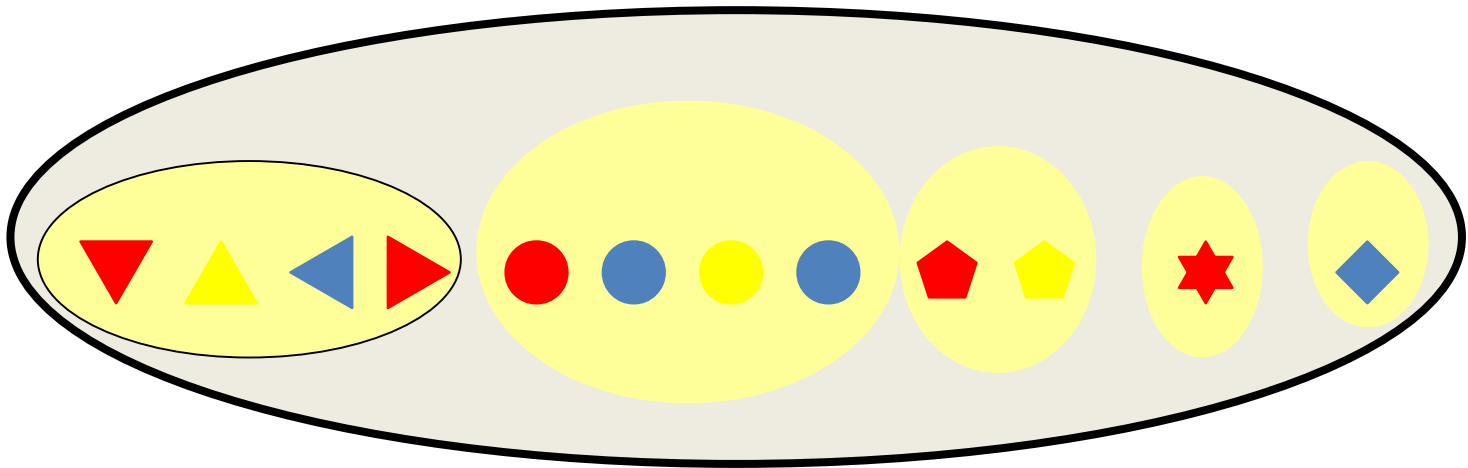
σχέσεις ανάμεσα στα μέρη (τάξεις ή στοιχεία τάξεων)  
και το όλο (σύνολο ή τάξη)



οι οποίες εκφράζονται συνήθως με τις διατυπώσεις  
**"περιέχεται σε"** και **"ανήκει σε"**  
σε συνδυασμό με τους προσδιοριστικούς όρους  
**"κανένα"**, **"ένα"** ή **"κάθε"**  
τάξη ή στοιχείο και **"μερικά"** στοιχεία.



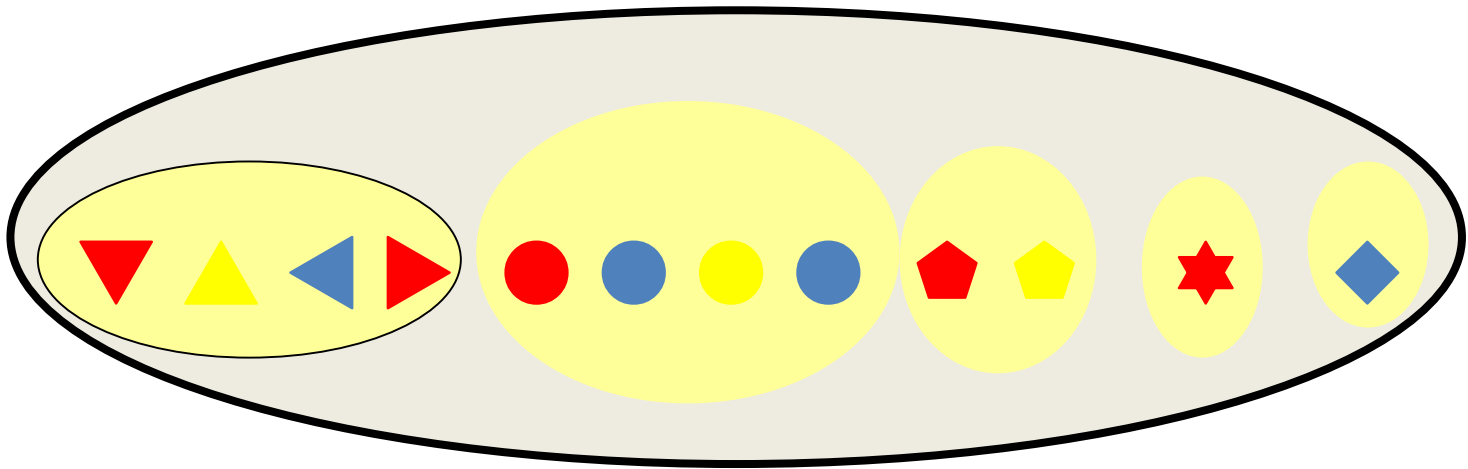
# Σχέση ισοδυναμίας «ίδιο σχήμα»



Κάθε τάξη στην οποία διαμερίζεται ένα σύνολο περιλαμβάνει **ταυτόχρονα δύο κατηγορίες ιδιοτήτων**



# Σχέση ισοδυναμίας «ίδιο σχήμα»

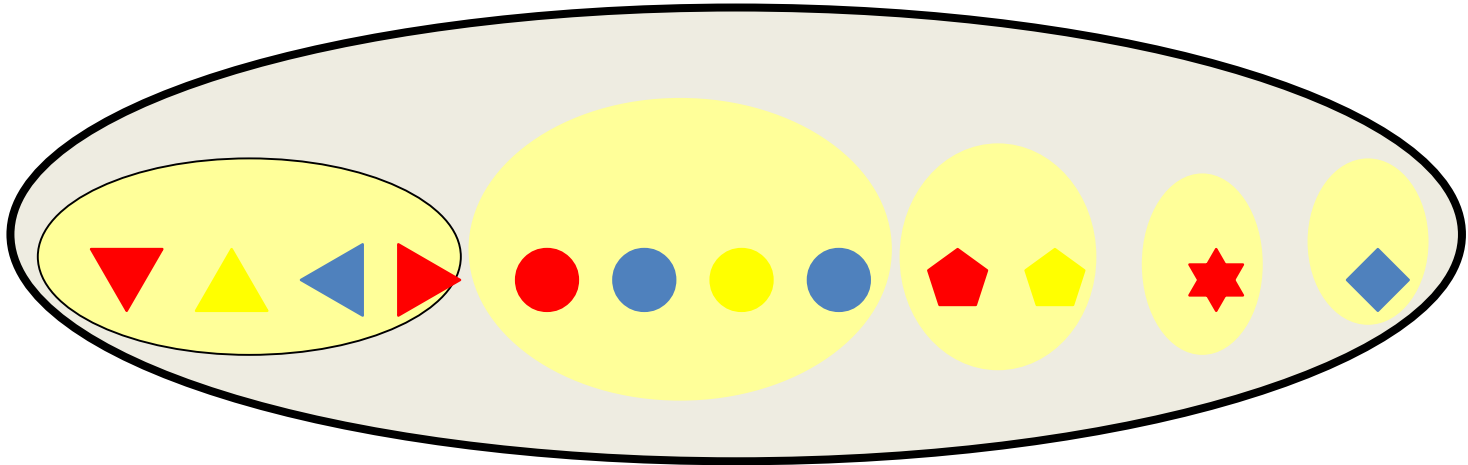


- **Ιδιότητες που είναι κοινές σε όλες τις τάξεις**
- ιδιότητες ταύτισης των αντικειμένων
- **Αναγκαίες ιδιότητες ορισμού της τάξης**
- Επίπεδα σχήματα





# Σχέση ισοδυναμίας «ίδιο σχήμα»



- **Ιδιότητες αποκλειστικά χαρακτηριστικές της δεδομένης τάξης**
- Ιδιότητες διάκρισης των στοιχείων της τάξης αυτής από τα στοιχεία των άλλων τάξεων
- **Ικανές ιδιότητες ορισμού τάξης**
- **Ισόπλευρα τρίγωνα**

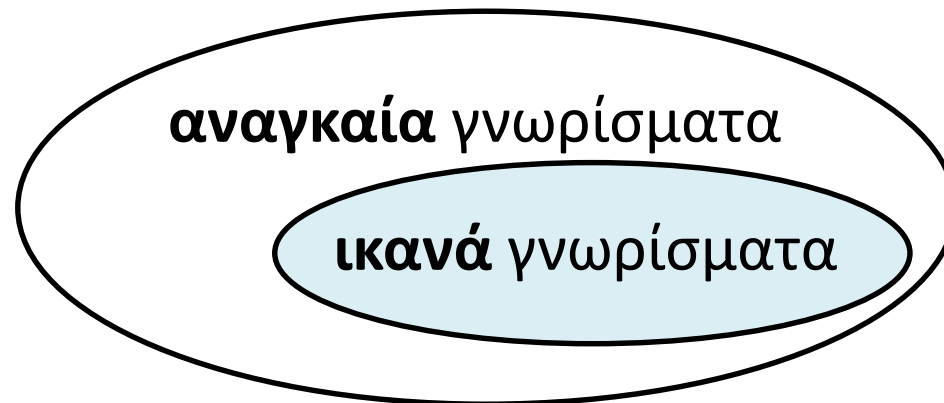


- Οι σχέσεις ισοδυναμίας **ομαδοποιούν**
- Οι σχέσεις εγκλεισμού **διαμερίζουν**
- Ο συνδυασμός σχέσεων ισοδυναμίας και σχέσεων εγκλεισμού **ταξινομούν**



# Ο ΟΡΙΣΜΟΣ

## Αναγκαίες και Ικανές ιδιότητες



### Παράδειγμα:

**Παραλληλόγραμμο** (οριζόμενη έννοια) είναι το **τετράπλευρο σχήμα** (αναγκαίο γνώρισμα), που οι **απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες** (ικανό γνώρισμα).



# ΛΟΓΙΚΟ-ΜΑΘΗΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

- Ισοδυναμία
- **Διάταξη**
- Αντιστοίχιση



# ΔΙΑΤΑΞΗ

Μια σχέση

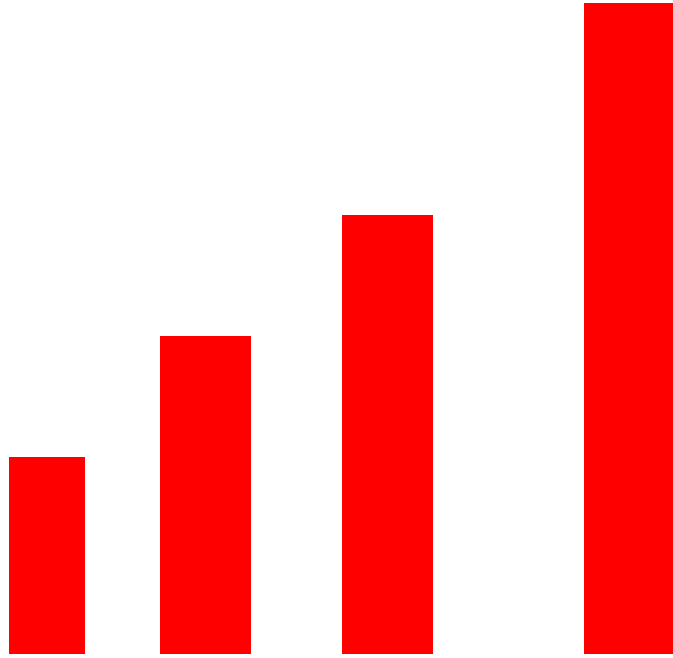
είναι σχέση διάταξης σε ένα σύνολο,

όταν ορίζει ένα **κριτήριο**

με βάση το οποίο για κάθε ζεύγος στοιχείων του συνόλου να διαπιστωθεί ποιο από τα δύο στοιχεία είναι επόμενο του άλλου.

..... επόμενο / προηγούμενο .....





# ΕΙΔΗ ΣΕΙΡΟΘΕΤΗΣΕΩΝ

Στις αναλύσεις του ο Piaget διακρίνει δύο είδη **σειροθετήσεων** (ή **νοητικών πράξεων διάταξης**) αντικειμένων:

- την **απλή σειροθέτηση**, όπου η διάταξη των αντικειμένων γίνεται με την ταξινόμηση των διαφορών τους σε μία διεύθυνση (ανιούσα ή κατιούσα, αύξουσα ή φθίνουσα) και **ως προς ένα μόνο χαρακτηριστικό τους** και
- την **πολλαπλή σειροθέτηση**, όπου η διάταξη των αντικειμένων γίνεται με την ταξινόμηση των διαφορών τους σε μία διεύθυνση (ανιούσα ή κατιούσα, αύξουσα ή φθίνουσα) και **ως προς δύο ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους ταυτόχρονα**

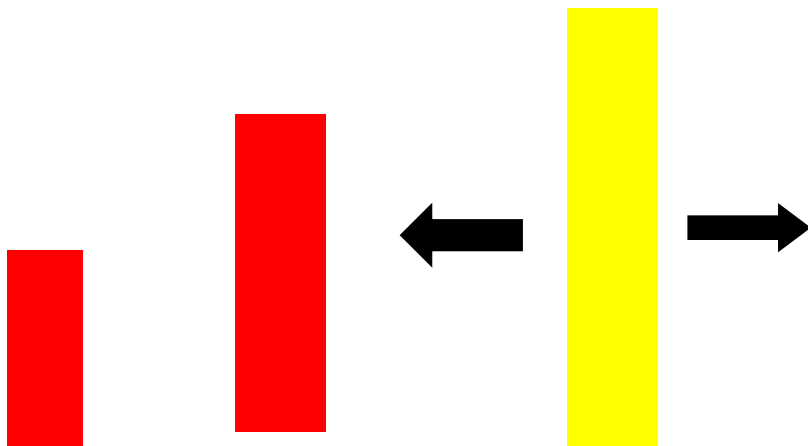


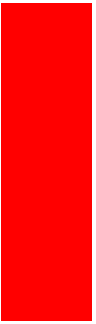
Βασικές νοητικές προϋποθέσεις για την κατανόηση των σχέσεων διάταξης είναι, σύμφωνα με τις αντίστοιχες αναλύσεις του Piaget,

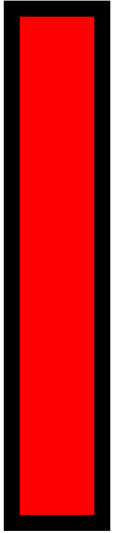
- η **ευχέρεια νοητικής αναπαράστασης μιας πράξης σειροθέτησης** αντικειμένων πριν από την εκτέλεση της και ταυτόχρονα
- η **κατανόηση του γεγονότος, ότι κάθε στοιχείο μιας συλλογής αντικειμένων στην οποία έχει εισαχθεί μια σχέση διάταξης είναι “επόμενο” ενός στοιχείου και ταυτόχρονα “προηγούμενο” ενός άλλου στοιχείου της σειράς.**











# ΛΟΓΙΚΟ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

- **Ισοδυναμία**
- **Διάταξη**
- **Αντιστοίχιση**



# ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ

Μια σχέση

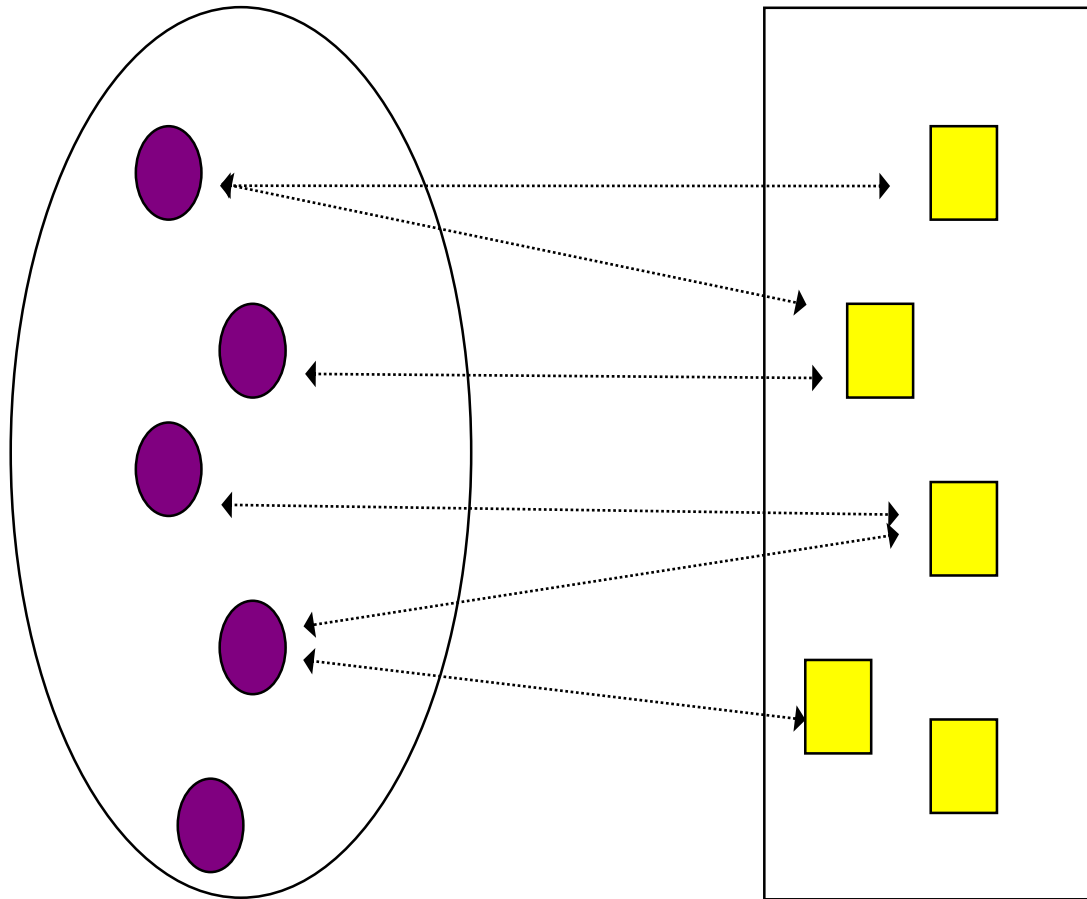
είναι σχέση αντιστοίχισης από ένα σύνολο  $X$  σε ένα σύνολο  $Y$ ,

όταν ορίζει έναν κανόνα με βάση τον οποίο μερικά ή και όλα τα στοιχεία του συνόλου  $X$  συνδέονται με στοιχεία του συνόλου  $Y$

..... αντίστοιχο.....



# ΣΧΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ



# ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

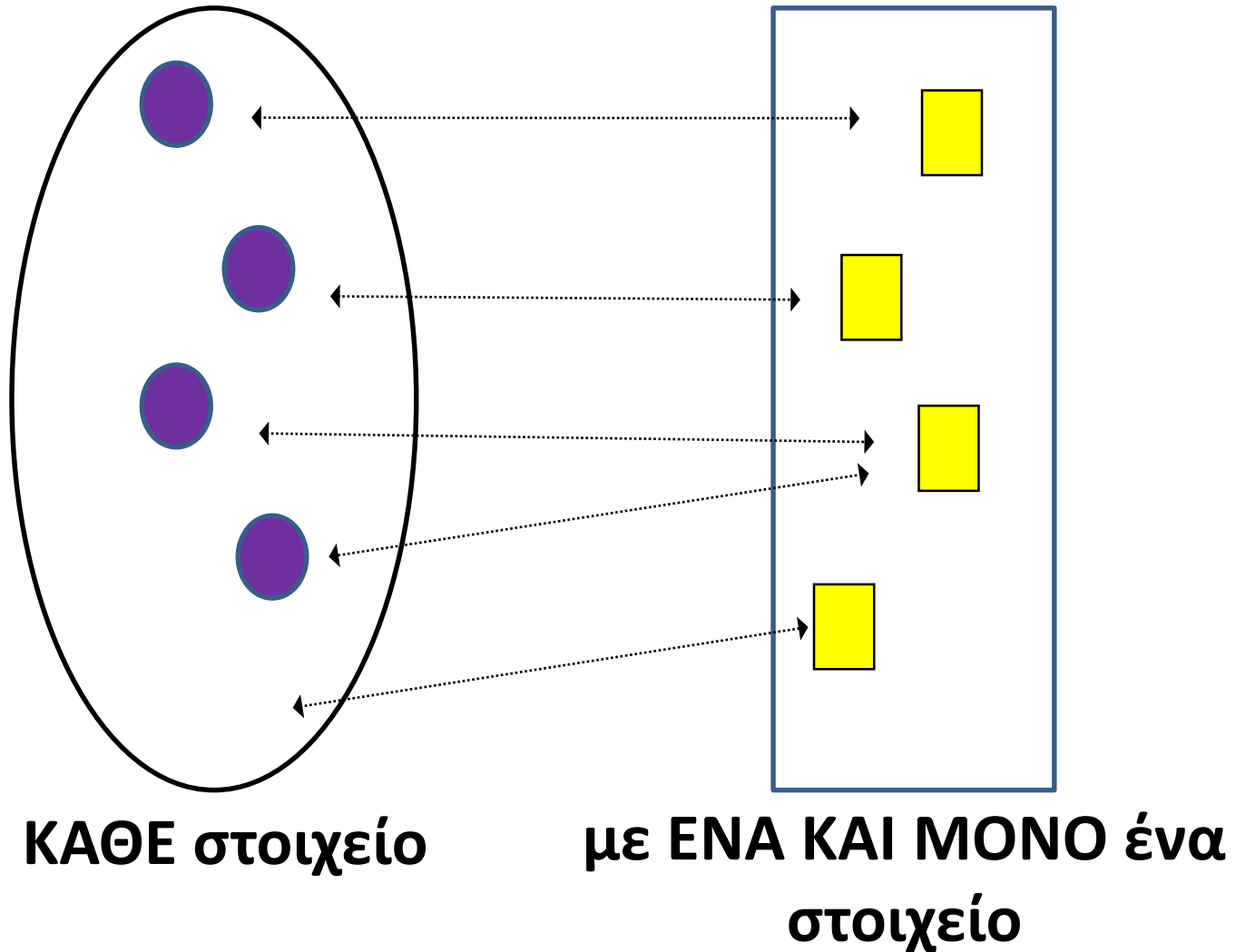
μια σχέση αντιστοίχισης  
η οποία συνδέει

**κάθε στοιχείο** ενός συνόλου  $X$   
**με ένα και μόνο ένα στοιχείο**  
ενός άλλου συνόλου  $Y$

λέγεται **συνάρτηση** από το σύνολο  $X$  στο  
σύνολο  $Y$ .



# ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ





Τέλος

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Δημήτρης Χασάπης. Δημήτρης Χασάπης. «Λογικο-μαθηματικές σχέσεις και αριθμητικές έννοιες στην προσχολική εκπαίδευση». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/ECD101>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

