ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΛΟΓΙΚΟ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ & ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ενότητα 5: Οι διαδοχικές επεκτάσεις της έννοιας του αριθμού: ακέραιος, κλάσμα, ρητός και πραγματικός αριθμός

Δημήτρης Χασάπης

Τμήμα Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία

Οι διαδοχικές επεκτάσεις της έννοιας του αριθμού:

Ακέραιος, ρητός, πραγματικός αριθμός

Η ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Απαρίθμηση

Διάταξη μεγεθών

Μέτρηση

Πράξεις αριθμών

Απαρίθμηση πληθικός **αριθμός**

Διάταξη διατακτικός **αριθμός**

Μέτρηση **αριθμός** μέτρο

Πράξεις αριθμών **αριθμός** αποτέλεσμα

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ Ν

Απαρίθμηση πληθικός **αριθμός**

Διάταξη διατακτικός **αριθμός**

Φυσικοί αριθμοί Ν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ……

ΜΗΔΕΝ 0

ΜΗΔΕΝ – ΜΙΑ ΙΔΙΟΤΥΠΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ

Το μηδέν είναι μια ιδιότυπη μαθηματική έννοια:

είναι και δεν είναι αριθμός

ως σύμβολο δηλώνει την απουσία μονάδων μιας τάξης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

1**0**5: 1 εκατοντάδα - **Καμία δεκάδα** - 5 μονάδες

ως έννοια σημαίνει καμία μονάδα, κανένα πλήθος

0

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΔΕΝ

Το μηδέν είναι ένας αριθμός, ο πρώτος αριθμός στη σειρά των αριθμών, ο οποίος εκφράζει όμως την απουσία μονάδων.

Παράλληλα, το μηδέν δηλώνει την απουσία μονάδων μιας τάξης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.
Σ’ αυτή την περίπτωση **το μηδέν δεν είναι αριθμός,** αλλά σύμβολο της απουσίας ενός αριθμού, ενός οιονδήποτε αριθμού, είναι ένας μετα-αριθμός αφού αναφέρεται σε άλλους αριθμούς.

Το μηδέν έχει επομένως δύο όψεις. Εκφράζει το κενό και ταυτόχρονα συμβολίζει το τίποτα

(Rotman Signifying Nothing: The Semiotics of Zero 1993, p. 13)

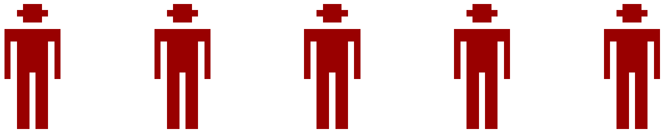
ΤΟ ΜΗΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

0 1 2 3 4 5 6 ….

105 1205

Αλλά η απαρίθμηση <u>δεν</u> αρχίζει από το 0

Πόσα είναι;



1 2 3 4 5

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝ ΣΤΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Το μηδέν έχει διαφορετικό ρόλο στις αριθμητικές πράξεις:

Πρόσθεση-αφαίρεση **0** + 1 = **1** ουδέτερο στοιχείο

Πολλαπλασιασμός **0** x 1 = **0** στοιχείο που μηδενίζει κάθε μέγεθος

Διαίρεση 1 : **0** = **άπειρο**

Αφού δεν μπορούμε να διαιρέσουμε έναν αριθμό με το 0, τότε το 0 δεν μπορεί να θεωρείται αριθμός

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ N_0

Απαρίθμηση πληθικός **αριθμός**

Διάταξη διατακτικός **αριθμός**

Φυσικοί αριθμοί N_0

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ……

ΜΕΤΡΗΣΗ

η ανάγκη να διατυπωθεί ταυτόχρονα με τον **αριθμό μέτρο** και η **κατεύθυνση μιας ποσοτικής μεταβολής**

επιβάλλει την έννοια του **αρνητικού αριθμού**

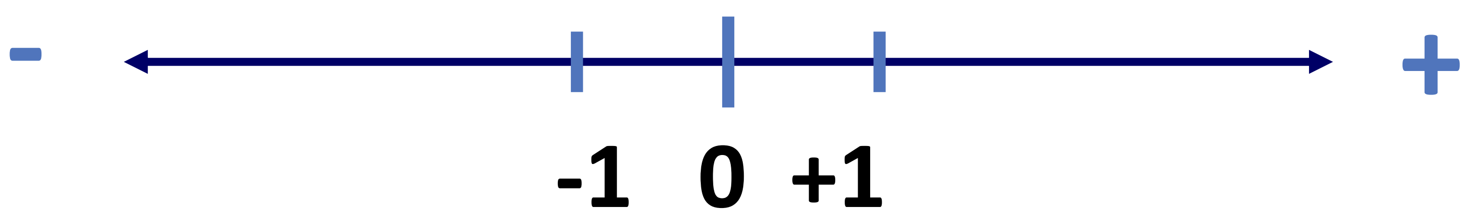
και κατά συνέπεια

τη διάκριση αρνητικών και θετικών αριθμών

ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι **αρνητικοί αριθμοί** προκύπτουν ως μέτρα μεγεθών σε μετρήσεις, στις οποίες χρησιμοποιείται:

- μια **προσανατολισμένη κλίμακα** μέτρησης και
- ένα αντίστοιχο **σύστημα μέτρησης**.



ΚΛΙΜΑΚΑ ΚΕΛΣΙΟΥ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ

Στη χρήση της κλίμακας αυτής αποτυπώνονται πολλές φορές οι εννοιολογικές δυσχέρειες κατανόησης και απόδοσης νοήματος στην έννοια των αρνητικών αριθμών.

Παράδειγμα

η ένδειξη **-3** στο θερμόμετρο "διαβάζεται" και εκφράζεται πολλές φορές, όχι ως "**πλην 3",** αλλά **ως** "**3 υπό το μηδέν**".

ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ (1)

Πρόσθεση - Αφαίρεση

Έχω 3 και πρέπει να δώσω 5.
Πόσα μου λείπουν;

3 – 5 = **;**

ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ (2)

Πρόσθεση – Αφαίρεση

Σε καταστάσεις μεταβολής του μέτρου ενός μεγέθους, στις οποίες το μέτρο της μεταβολής είναι μεγαλύτερο από το αρχικό μέτρο του μεγέθους, η έκφραση της διαφοράς (**το αποτέλεσμα μιας αφαίρεσης**)

επιβάλλει την έννοια του **αρνητικού αριθμού**
και κατά συνέπεια
τη διάκριση αρνητικών και θετικών αριθμών

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΡΟΠΟΠΟΙΕΙΤΑΙ

και

Για κάθε φυσικό αριθμό **n** (ο οποίος ονομάζεται **θετικός αριθμός**) ορίζεται ένας αντίθετος αριθμός **–n** (ο οποίος ονομάζεται **αρνητικός αριθμός**)

$$\mathbf{n + (-n) = 0}$$

Ζ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το σύνολο που περιλαμβάνει τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς μαζί με το μηδέν

ονομάζεται **σύνολο των ακεραίων αριθμών**

και συμβολίζεται με το λατινικό γράμμα **Z**

(αρχικό της γερμανικής λέξης Zahl αριθμός)

Τα στοιχεία του συνόλου αυτού (ζεύγη συμβόλων ± και φυσικών αριθμών) ονομάζονται **ακέραιοι αριθμοί.**

ΔΙΑΤΑΞΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στο σύνολο των ακεραίων αριθμών

ορίζεται

η διάταξη των αριθμών

και

οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμών

ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΙ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

Με την εισαγωγή της έννοιας του ακεραίου αριθμού

διαφοροποιείται

η **έννοια του αριθμού** από την **έννοια του μεγέθους**

Μέγεθος:
στοιχείο της πραγματικότητας
η αριθμητική έκφραση ενός ποσοτικοποιημένου χαρακτηριστικού της πραγματικότητας

Αριθμός:
μαθηματικό αντικείμενο
το στοιχείο ενός συνόλου με συγκριμένες ιδιότητες

ΓΕΝΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Η γενική έννοια του αριθμού δεν αναφέρεται ούτε σε μοναδιαίες ενότητες ενός πλήθους αντικειμένων ούτε σε μονάδες μέτρησης ενός μεγέθους.

Παράδειγμα

η τετραγωνική ρίζα του αριθμού 9 έχει νόημα και είναι ο αριθμός +3 ή -3 με τη γενική έννοια του αριθμού.

Η τετραγωνική ρίζα ενός πλήθους 9 αντικειμένων ή ενός μήκους 9 μέτρων δεν έχει προφανώς κανένα νόημα, ούτε εκφράζεται σε αντίστοιχες μονάδες.

ΜΕΓΕΘΟΣ / ΑΡΙΘΜΟΣ

Μέγεθος:
στοιχείο της πραγματικότητας

εκφράζεται γλωσσικά ως αριθμητικό επίθετο

Αριθμός:
μαθηματικό αντικείμενο
εκφράζεται γλωσσικά ως ουσιαστικό (απόλυτο)

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗ “ΑΡΙΘΜΟΥ” ΚΑΙ “ΜΕΓΕΘΟΥΣ”

Η εννοιολογική διαφοροποίηση “αριθμού” και “μεγέθους” δεν είναι μια απλή νοητική διαδικασία και απαιτεί μια συνολική εννοιολογική αναδιοργάνωση,

η οποία προϋποθέτει ένα παραπέρα βήμα στην ανάπτυξη της αφηρημένης σκέψης,
χωρίς μάλιστα τη βοήθεια της γλώσσας.

Γιατί στην ελληνική γλώσσα, όπως άλλωστε σε όλες τις Ινδο-ευρωπαϊκές γλώσσες, δεν διακρίνεται λεκτικά η γενική έννοια του αριθμού, π.χ. “εννέα”, από την πληθική έννοια του αριθμού, π.χ. “εννέα” (αντικείμενα) και την έννοια του αριθμού-μέτρου, π.χ. “εννέα” (μονάδες μέτρησης ενός μεγέθους).

ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗ ΕΝΝΟΙΑΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

Η διαφοροποίηση της έννοιας του αριθμού από την έννοια του μεγέθους επιβάλλει επίσης μια ριζική τροποποίηση της έννοιας του μηδενός.

Το “μηδέν”, ως έκφραση της απουσίας μονάδων μιας τάξης κατά την αναγραφή των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

ή

ως έκφραση του πλήθους των στοιχείων ενός κενού συνόλου απαιτείται να επεκταθεί εννοιολογικά και να περιλάβει την έννοια μιας αυθαίρετα ορισμένης “αρχής” σε μια προσανατολισμένη κλίμακα ακεραίων αριθμών.

Μηδέν

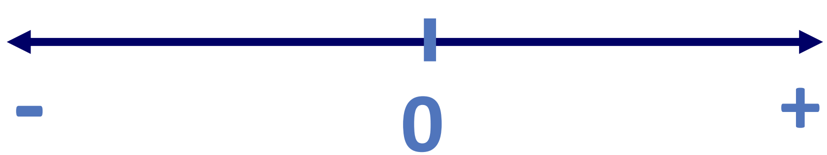
- απουσίας μονάδων μιας τάξης κατά την αναγραφή των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

105

- έκφραση του πλήθους των στοιχείων ενός κενού συνόλου

2 - 2= 0

- μια αυθαίρετα ορισμένη “αρχή” σε μια προσανατολισμένη κλίμακα ακεραίων αριθμών.



ΜΕΤΡΗΣΗ

ανάγκη να μετρηθούν μεγέθη μικρότερα μιας μονάδας μέτρησης

η επιβάλλει την έννοια του **κλασματικού αριθμού**

ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ
ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Η έκφραση του αποτελέσματος της διαίρεσης δυο οποιονδήποτε μέτρων διακριτών ή συνεχών μεγεθών

επιβάλλει την έννοια του **κλασματικού αριθμού**

Να μοιραστούν 3 σε 5 μέρη.
Πόσο είναι το καθένα;

3 : 5 = **;**

ΑΠΟ ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ ΣΤΟΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ (1)

Κλάσμα

είναι

η αριθμητική έκφραση της **σχέσης** μεταξύ ενός "**μέρους**" και του "**όλου**" ενός μεγέθους

ΑΠΟ ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ ΣΤΟΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ (2)

Το κλάσμα είναι μια **σχέση μέρους-όλου** χωρίς καμία αναφορά στα μέτρα των μεγεθών του μέρους και του όλου.

άρα

Το κλάσμα δεν είναι αριθμός

Είναι <u>αριθμητική έκφραση</u> μιας σχέσης

ΚΛΑΣΜΑ / ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

ΜΕΡΗ ΜΕΓΕΘΩΝ			**ΜΕΤΡΑ ΜΕΓΕΘΩΝ**
ΕΝΑ	1	μέτρηση	**1**
ΜΕΡΙΚΑ	α	μέτρηση	**p**
ΟΛΑ	β	μέτρηση	**q**
ΚΛΑΣΜΑ $^{\alpha}/_{\beta}$			**ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ $^{p}/_{q}$**

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ p/q

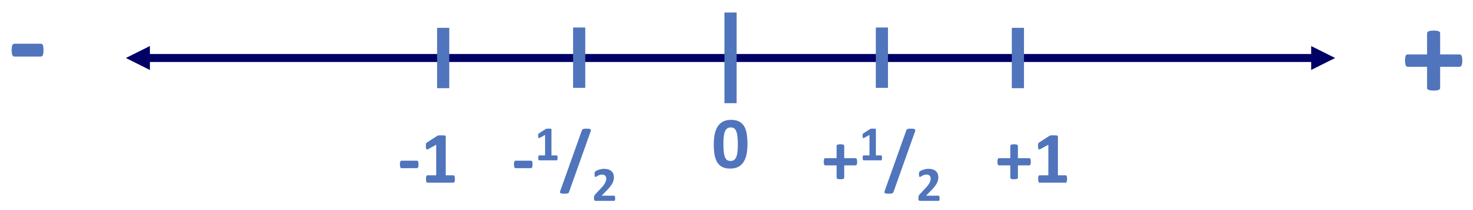
είναι η έκφραση της **σχέσης των μέτρων** ενός “**μέρους**” **p** με το “**όλο**” **q** ενός μεγέθους

ένα σύνολο ισοδύναμων μεταξύ τους διαταγμένων ζευγών, όπου p και q $\neq$ 0 είναι **φυσικοί αριθμοί**

$$1/2 = {}^{2}/_{4} = {}^{3}/_{6} = {}^{4}/_{8} = \ldots..$$

ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ ΣΤΟΝ ΡΗΤΟ ΑΡΙΘΜΟ (1)

Η σύνθεση των ακέραιων αριθμών με τους κλασματικούς αριθμούς δημιουργεί τους ρητούς αριθμούς



ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ ΣΤΟΝ ΡΗΤΟ ΑΡΙΘΜΟ (2)

Ρητός αριθμός είναι ένα σύνολο ισοδύναμων μεταξύ τους διαταγμένων ζευγών, όπου p και $q \neq 0$ είναι **ακέραιοι αριθμοί.**

Δηλαδή

ένα σύνολο κλασμάτων τα οποία εκφράζουν το ίδιο μέτρο

$$\frac{1}{2} = {}^{2}/_{4} = {}^{3}/_{6} = {}^{4}/_{8} = \ldots..$$

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

εκφράζουν αριθμητικά

το αποτέλεσμα οποιασδήποτε αριθμητικής πράξης μεταξύ οποιωνδήποτε μέτρων διακριτών ή συνεχών μεγεθών

και

το αποτέλεσμα της μέτρησης οιουδήποτε συνεχούς μεγέθους

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΚΑΙ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (1)

Νοητικές δυσκολίες κατανόησης και χειρισμού των ρητών αριθμών

- κάθε ρητός αριθμός δεν έχει μια μονοσήμαντη παράσταση αλλά ένα σύνολο άπειρου πλήθους, ισοδύναμων μεταξύ τους αριθμητικών εκφράσεων.

$$1/2 = {}^{2}/_{4} = {}^{3}/_{6} = {}^{4}/_{8} = \ldots\ldots$$

Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος $^{3}/_{4}$ ή $^{4}/_{5}$;

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΚΑΙ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (2)

Οι αριθμητικές παραστάσεις ρητών αριθμών (και των κλασμάτων) συντίθενται **ως ζεύγη ακεραίων αριθμών**, οπότε παρουσιάζουν επιφανειακές ομοιότητες με τους ακέραιους και τους φυσικούς αριθμούς, γεγονός που συγκαλύπτει την ποιοτική διαφορά των μεγεθών που εκφράζουν:

οι **ρητοί αριθμοί συνεχή μεγέθη,**
οι **ακέραιοι και οι φυσικοί αριθμοί διακριτά μεγέθη**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένας ρητός αριθμός μπορεί να “φαίνεται” μεγαλύτερος από έναν άλλο ενώ είναι μικρότερος

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{2}$$

ή μπορεί να “φαίνεται” μικρότερος ή μεγαλύτερος από έναν άλλο, ενώ είναι ίσος

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

ΔΙΑΦΟΡΑ ΡΗΤΟΥ & ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι ρητοί αριθμοί εκφράζουν συνεχή μεγέθη, ενώ οι ακέραιοι και οι φυσικοί αριθμοί διακριτά μεγέθη.

Η ποιοτική διαφορά των ρητών αριθμών από τους ακέραιους και τους φυσικούς αριθμούς συνεπάγεται μια σειρά διαφορετικών χαρακτηριστικών των ρητών από τους φυσικούς και τους ακέραιους αριθμούς.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΩΤΗ

Η **μονάδα των ρητών αριθμών** αποτελεί μονάδα μέτρησης συνεχών μεγεθών και είναι κατά συνέπεια και η ίδια ένα συνεχές μέγεθος, οπότε υπόκειται σε (υπο)διαιρέσεις, γεγονός που δεν ισχύει για τις μονάδες με τις οποίες απαριθμούνται τα διακριτά μεγέθη.

Παράδειγμα

Ο ρητός αριθμός $^3/_5$ για, εκφράζει το μέτρο ενός μεγέθους με μονάδα μέτρησης το $^1/_5$ μιας ενότητας.
Το ίδιο μέτρο μπορεί να εκφραστεί και με μονάδα μέτρησης το $^1/_{10}$ της ίδιας μοναδιαίας ενότητας $^6/_{10}$

ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΕΥΤΕΡΗ

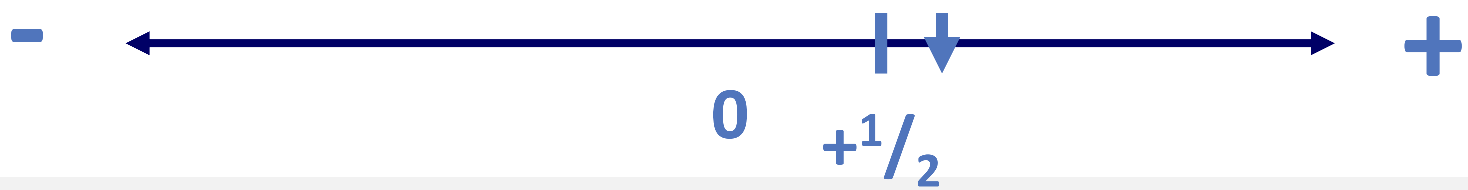
Μεταξύ δυο οιονδήποτε ρητών αριθμών υπάρχει ένα άπειρο πλήθος ρητών αριθμών.

Τυπικά διατυπωμένο, το σύνολο των ρητών αριθμών είναι πυκνό.

Αυτό σημαίνει, ότι δεδομένου ενός ρητού αριθμού δεν υπάρχει ένας μοναδικά ορισμένος “επόμενος” του ρητός αριθμός.

Παράδειγμα

Ποιος αριθμός είναι επόμενος του $^{1}/_{2}$ *;*



ΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

αποτελούν **μορφή παράστασης των ρητών αριθμών**, βασισμένη στη δομή και τις ιδιότητες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης

και όχι ένα ιδιαίτερα οριζόμενο και με διαφορετικές ιδιότητες σύνολο αριθμών.

ΕΚΦΡΑΣΗ ΡΗΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

κάθε ρητός αριθμός $\frac{p}{q}$ για τον οποίο είναι δυνατό να

διατυπωθεί μια ταυτόσημη παράσταση της μορφής $\frac{\alpha}{10^{\nu}}$

μπορεί να εκφραστεί και με τη μορφή ενός

δεκαδικού αριθμού.

Μια τέτοια παράσταση όμως, είναι δυνατή μόνο στην περίπτωση, που ο παρονομαστής q ενός ρητού αριθμού $\frac{p}{q}$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή

q = 2ν x 5ν.

(ως γινόμενο πρώτων παραγόντων το οποίο περιλαμβάνει μόνο τους αριθμούς 2 και 5)

ή ως δεκαδικό κλάσμα

Σε κάθε άλλη περίπτωση,

ένα ρητός $\frac{p}{q}$ αριθμός μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή ενός δεκαδικού αριθμού, ο οποίος προκύπτει ως αποτέλεσμα της διαίρεσης p : q,

με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων,

μια ομάδα των οποίων με μέγιστο δυνατό πλήθος (q-1) επαναλαμβάνεται περιοδικά.

Παράδειγμα

$$\frac{2}{7} = \mathbf{0,\ 285714\ \ 285714\ ...}$$

ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η συμβολική έκφραση των δεκαδικών αριθμών αποτελεί για πολλά παιδιά πηγή παρανοήσεων.

1. Η γραφή των δεκαδικών αριθμών βασισμένη στη δομή και στις ιδιότητες του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης παραπέμπει επιφανειακά στους φυσικούς αριθμούς.
2. Η γραφή κάθε δεκαδικού αριθμού προβάλλει άμεσα το μέτρο του “μέρους” συγκαλύπτοντας μέσα στο συμβολισμό το μέτρο του “όλου” στο οποίο αναφέρεται.

0,45 παραπέμπει στον αριθμό 45 (πλήθος διακριτών μονάδων) και όχι στο $\frac{45}{100}$

Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ (1)

Στην εξέλιξη της έννοιας του αριθμού διαπιστώνεται μία επαναλαμβανόμενη διαδικασία.

Οι υπολογιστικές τεχνικές αναπτύσσονται περιλαμβάνοντας μόνο αποδεκτές έννοιες του αριθμού.

Η ανάπτυξη των υπολογιστικών τεχνικών οδηγεί σε νέες μαθηματικές οντότητες που παράγονται κατά την εφαρμογή τους και κατά συνέπεια σε αδιέξοδα, τα οποία προβάλλουν την ανάγκη τροποποίησης και επέκτασης της μέχρι τότε καθιερωμένης έννοιας του αριθμού.

Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ (2)

Η έννοια του αριθμού τροποποιείται και επεκτείνεται ώστε να αποδοθεί ένα νόημα στις νέες μαθηματικές οντότητες.

Η τροποποίηση και επέκταση της έννοιας του αριθμού ανοίγει νέα πεδία εφαρμογής και οδηγεί σε μια νέα ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών.

ΕΝΝΟΙΑ ΑΡΡΗΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Η αναγκαιότητα αριθμητικής έκφρασης της σχέσης δύο μεγεθών τα οποία δεν έχουν κοινό μέτρο που να τα μετρά και να δίνει ως αποτέλεσμα έναν ακέραιο ή έναν ρητό αριθμό.

είναι δηλαδή μεγέθη ασύμμετρα

επιβάλλουν την έννοια του **άρρητου αριθμού**

Παράδειγμα

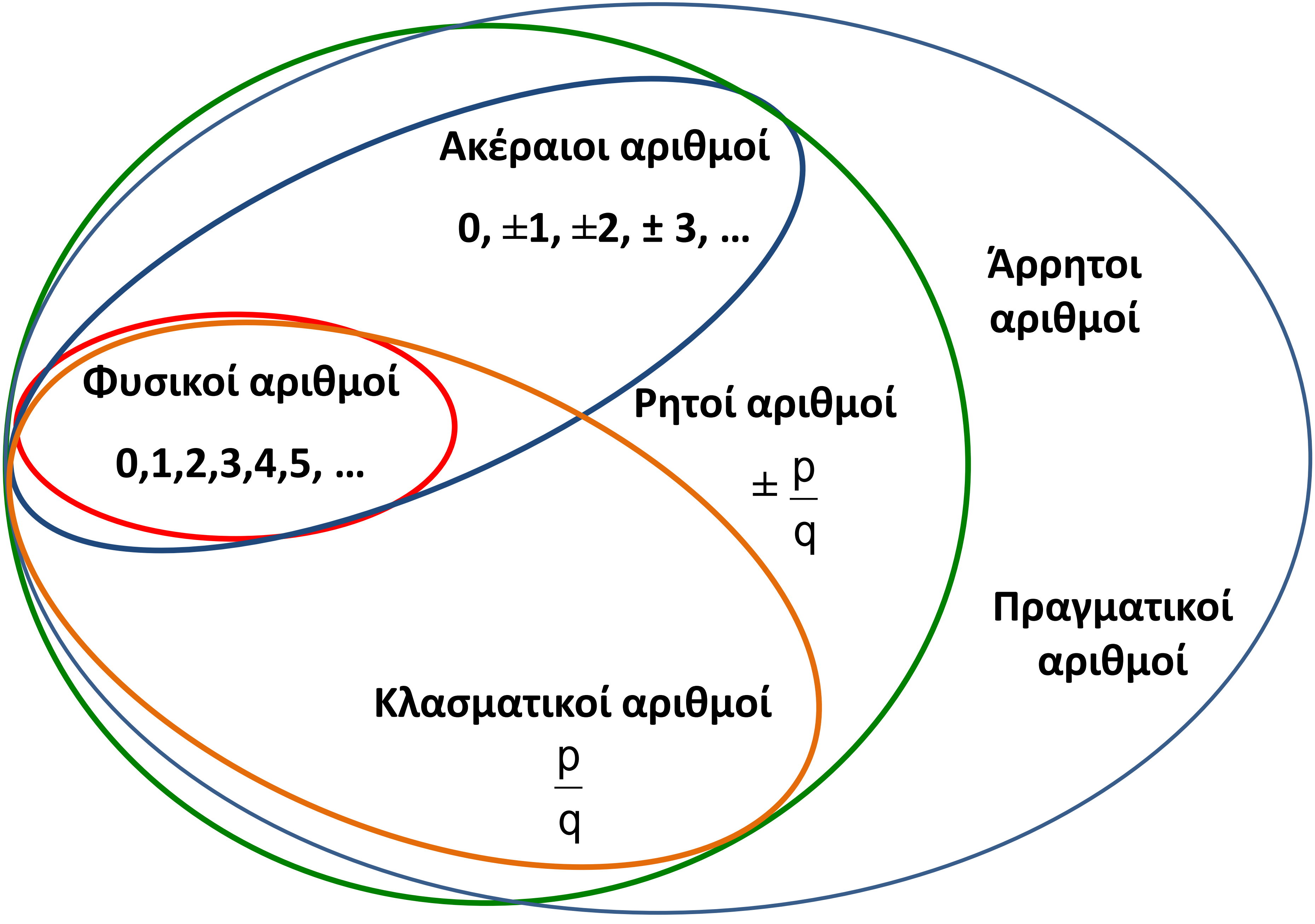
το μήκος ενός κύκλου με μέτρο τη διάμετρό του (π), ή η διαγώνιος ενός τετραγώνου πλευράς μήκους 1

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

άρρητοι είναι οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί

Ρητοί και άρρητοι αριθμοί μαζί ονομάζονται **πραγματικοί αριθμοί**.

Με τους **πραγματικούς αριθμούς** παρέχεται η δυνατότητα έκφρασης κάθε μετρήσιμου στοιχείου της πραγματικότητας και οποιουδήποτε αποτελέσματος μαθηματικής πράξης


Ακέραιοι αριθμοί
0, ±1, ±2, ± 3, …
Άρρητοι αριθμοί
Φυσικοί αριθμοί
0,1,2,3,4,5, …
Ρητοί αριθμοί
$\pm \frac{p}{q}$
Πραγματικοί αριθμοί
Κλασματικοί αριθμοί
$\frac{p}{q}$

Τέλος

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.