



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# ΛΟΓΙΚΟ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ & ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Ενότητα 5: Οι διαδοχικές επεκτάσεις της έννοιας  
του αριθμού: ακέραιος, κλάσμα, ρητός και  
πραγματικός αριθμός

Δημήτρης Χασάπης

Τμήμα Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

# Η ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

**Απαρίθμηση**

**Διάταξη**

μεγεθών

**Μέτρηση**

**Πράξεις**

αριθμών



**Απαρίθμηση**

**πληθικός αριθμός**

**Διάταξη**

**διατακτικός αριθμός**

**Μέτρηση**

**αριθμός μέτρο**

**Πράξεις  
αριθμών**

**αριθμός αποτέλεσμα**



# ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ N

**Απαρίθμηση**

**πληθικός αριθμός**

**Διάταξη**

**διατακτικός αριθμός**

**Φυσικοί αριθμοί N**

**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .....**



ΜΗΔΕΝ

0

# ΜΗΔΕΝ – ΜΙΑ ΙΔΙΟΤΥΠΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ

Το μηδέν είναι μια ιδιότυπη μαθηματική έννοια:

**είναι και δεν είναι αριθμός**

**ως σύμβολο** δηλώνει την απουσία μονάδων μιας τάξης  
στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

**105**: 1 εκατοντάδα - **Καμία δεκάδα** - 5 μονάδες

**ως έννοια** σημαίνει καμία μονάδα, κανένα πλήθος 0



# Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΔΕΝ

**Το μηδέν είναι ένας αριθμός**, ο πρώτος αριθμός στη σειρά των αριθμών, ο οποίος εκφράζει όμως την απουσία μονάδων.

Παράλληλα, το μηδέν δηλώνει την απουσία μονάδων μιας τάξης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Σ' αυτή την περίπτωση **το μηδέν δεν είναι αριθμός**, αλλά σύμβολο της απουσίας ενός αριθμού, ενός οιονδήποτε αριθμού, είναι ένας μετα-αριθμός αφού αναφέρεται σε άλλους αριθμούς.

Το μηδέν έχει επομένως δύο όψεις.

**Εκφράζει το κενό και ταυτόχρονα συμβολίζει το τίποτα**

(Rotman Signifying Nothing: The Semiotics of Zero 1993, p. 13)



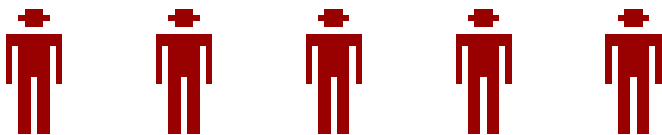


# ΤΟ ΜΗΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

**0      1      2      3      4      5      6      ....**  
**105   1205**

Αλλά η απαρίθμηση δεν αρχίζει από το 0

**Πόσα είναι;**



1      2      3      4      5



# Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝ ΣΤΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Το μηδέν έχει διαφορετικό ρόλο στις αριθμητικές πράξεις:

Πρόσθεση-αφαίρεση

$0 + 1 = 1$  ουδέτερο στοιχείο

Πολλαπλασιασμός

$0 \times 1 = 0$  στοιχείο που  
μηδενίζει κάθε  
μέγεθος

Διαίρεση

$1 : 0 = \text{άπειρο}$

Αφού δεν μπορούμε να  
διαιρέσουμε έναν αριθμό με το  
0, τότε το 0 δεν μπορεί να  
θεωρείται αριθμός



# ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ **No**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .....

# ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

η ανάγκη να διατυπωθεί ταυτόχρονα με τον αριθμό μέτρο και η κατεύθυνση μιας ποσοτικής μεταβολής

επιβάλλει την έννοια του αρνητικού αριθμού

και κατά συνέπεια

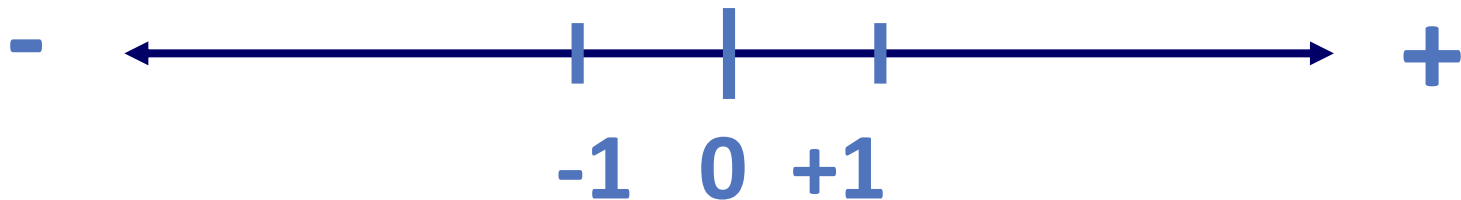
τη διάκριση αρνητικών και θετικών αριθμών



# ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Οι **αρνητικοί αριθμοί** προκύπτουν ως μέτρα μεγεθών σε μετρήσεις, στις οποίες χρησιμοποιείται:

- μια **προσανατολισμένη κλίμακα** μέτρησης και
- ένα αντίστοιχο **σύστημα** μέτρησης.



# ΚΛΙΜΑΚΑ ΚΕΛΣΙΟΥ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ



Στη χρήση της κλίμακας αυτής αποτυπώνονται πολλές φορές οι εννοιολογικές δυσχέρειες κατανόησης και απόδοσης νοήματος στην έννοια των αρνητικών αριθμών.

## Παράδειγμα

η ένδειξη **-3** στο θερμόμετρο “διαβάζεται” και εκφράζεται πολλές φορές, όχι ως “**πλην 3**”, αλλά ως “**3 υπό το μηδέν**”.



# ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΡΙΘΜΩΝ: ΜΕΤΑΒΟΛΗ

## Πρόσθεση - Αφαίρεση

Έχω 3 και πρέπει να δώσω 5.

**Πόσα μου λείπουν;**

$$3 - 5 = ;$$



# ΕΝΝΟΙΑ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Σε καταστάσεις μεταβολής του μέτρου ενός μεγέθους, στις οποίες το μέτρο της μεταβολής είναι μεγαλύτερο από το αρχικό μέτρο του μεγέθους, η έκφραση της διαφοράς (**το αποτέλεσμα μιας αφαίρεσης**)

επιβάλλει την έννοια του **αρνητικού αριθμού**

και κατά συνέπεια

τη διάκριση αρνητικών και θετικών αριθμών





# ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

**Η έννοια του φυσικού αριθμού τροποποιείται**

**και**

Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  (ο οποίος ονομάζεται **θετικός αριθμός**) ορίζεται ένας αντίθετος αριθμός  $-n$  (ο οποίος ονομάζεται **αρνητικός αριθμός**)

$$n + (-n) = 0$$



# Z ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το σύνολο που περιλαμβάνει τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς μαζί με το μηδέν

ονομάζεται **ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**

και συμβολίζεται με το λατινικό γράμμα **Z**

(αρχικό της γερμανικής λέξης *Zahl* αριθμός)

Τα στοιχεία του συνόλου αυτού (ζεύγη συμβόλων  $\pm$  και φυσικών αριθμών) ονομάζονται

**ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.**



# ΣΥΝΟΛΟ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**Στο σύνολο των ακεραίων αριθμών**

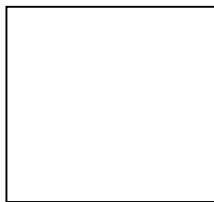
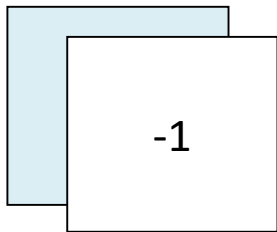
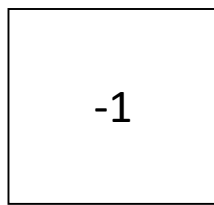
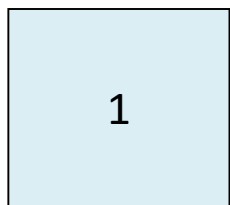
**ορίζεται**

**η διάταξη των αριθμών**

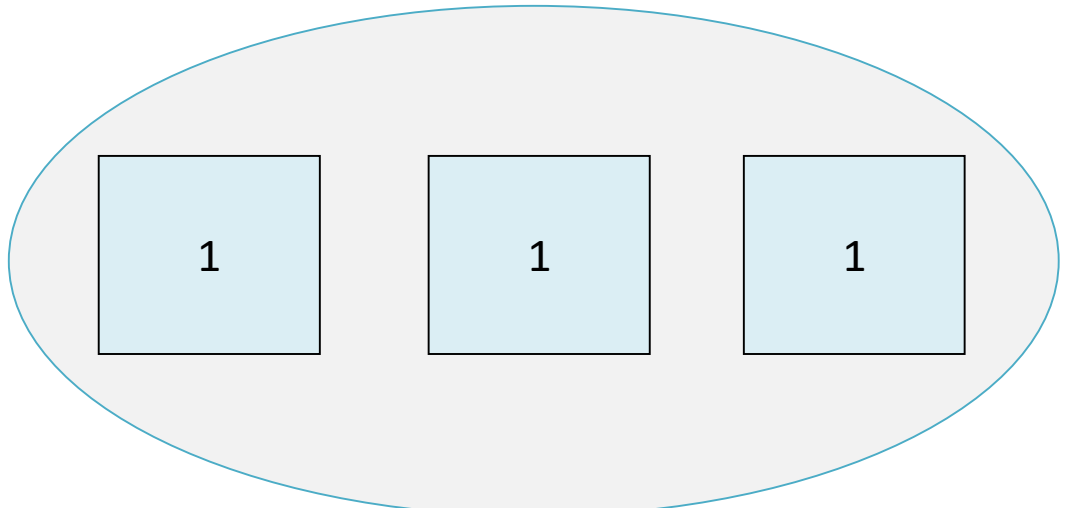
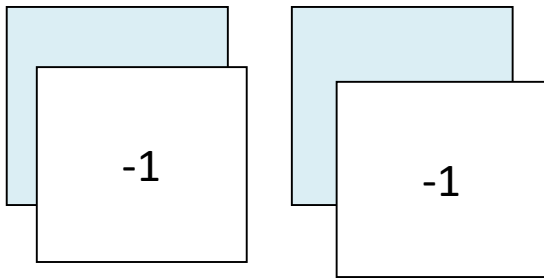
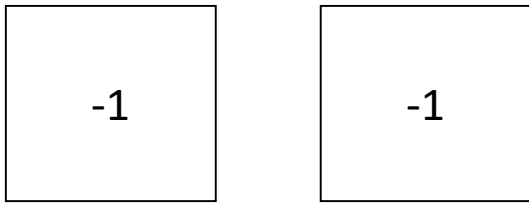
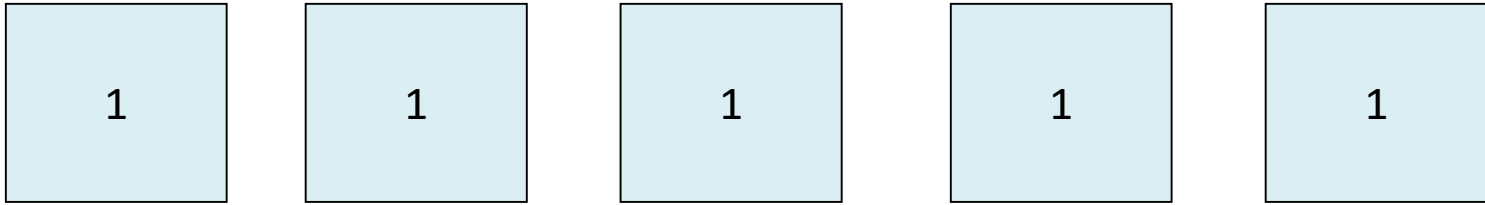
**και**

**οι πράξεις της πρόσθεσης και του  
πολλαπλασιασμού αριθμών**



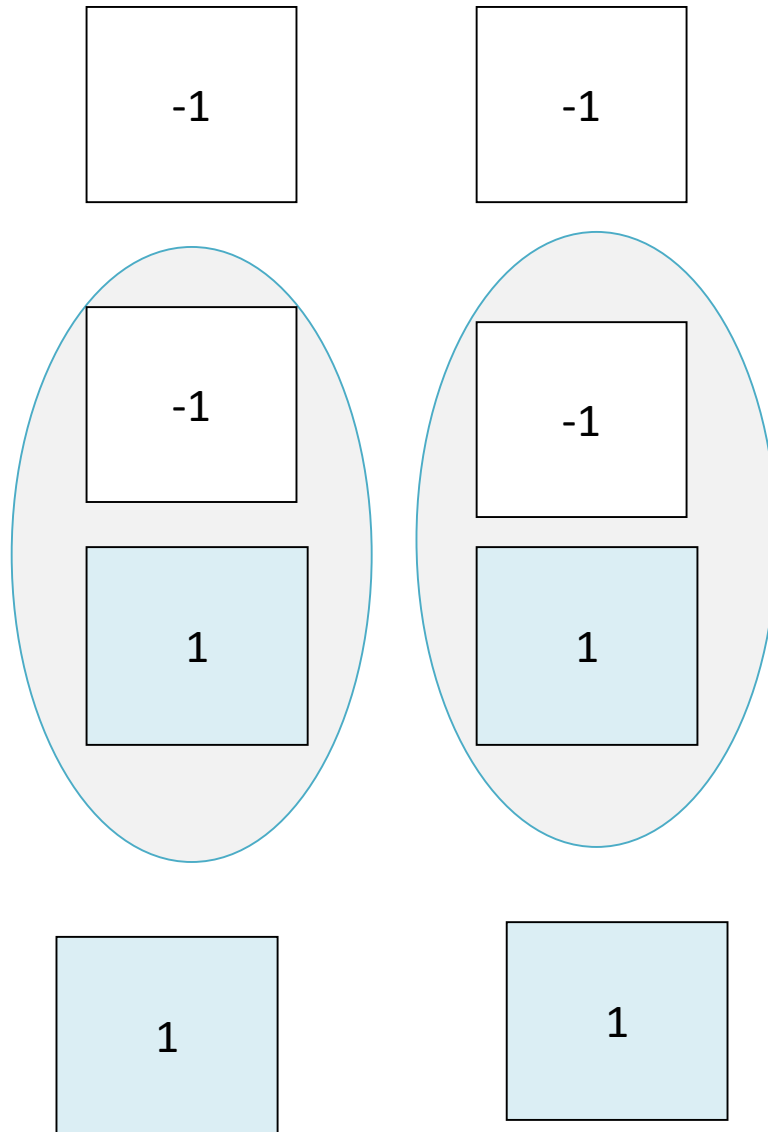


$$(+5) + (-2)$$



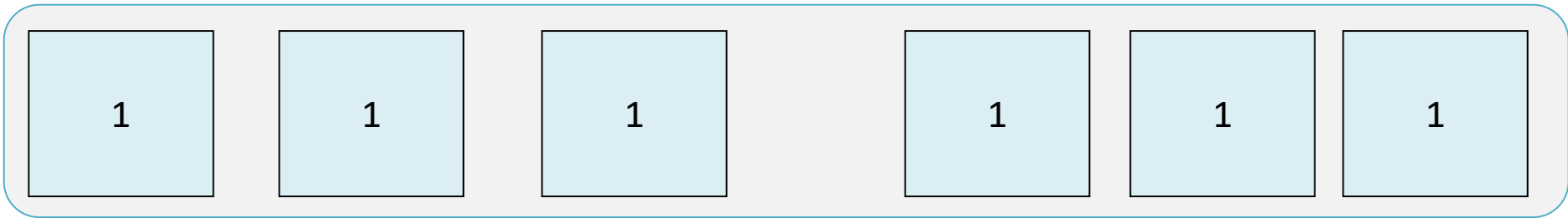
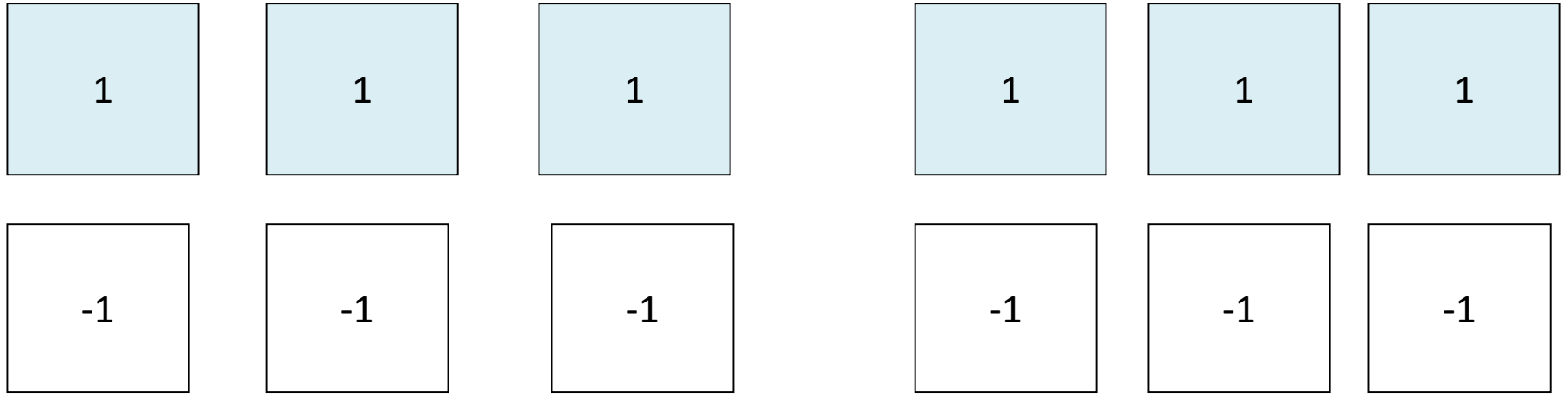
$$+5 + (-2) = +3$$

$$(-2) - (-4)$$



$$(-2) - (-4) = +2$$

$$(-2) \times (+3)$$



$$(-2) \times (+3) = -6$$



$$\begin{aligned} \text{[Negative piece with notch]} + \text{[Positive piece with bump]} &= \text{[Negative piece with notch]} + \text{[Negative piece with notch]} + \text{[Positive piece with bump]} \\ &= \text{[Negative piece with notch]} + \text{[Joined piece with notch and bump]} \\ &= \text{[Negative piece with notch]} + 0 = \text{[Negative piece with notch]}, \text{ or } -2 \end{aligned}$$



# ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΡΙΘΜΟΣ & ΜΕΓΕΘΟΣ

Με την εισαγωγή της έννοιας του ακεραίου αριθμού  
**διαφοροποιείται**

η **έννοια του αριθμού** από την **έννοια του μεγέθους**

**Μέγεθος:**

**στοιχείο της πραγματικότητας**

η αριθμητική έκφραση ενός ποσοτικοποιημένου  
χαρακτηριστικού της πραγματικότητας

**Αριθμός:**

**μαθηματικό αντικείμενο**

το στοιχείο ενός συνόλου με συγκριμένες ιδιότητες



# ΓΕΝΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΩΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

**Η γενική έννοια του αριθμού ως μαθηματικού αντικειμένου δεν αναφέρεται ούτε σε μοναδιαίες ενότητες ενός πλήθους ούτε σε μονάδες μέτρησης ενός μεγέθους.**

## Παράδειγμα

η τετραγωνική ρίζα του αριθμού 9 έχει νόημα και είναι ο αριθμός  $+3$  ή  $-3$  με τη γενική έννοια του αριθμού.

Η τετραγωνική ρίζα ενός πλήθους 9 αντικειμένων ή ενός μήκους 9 μέτρων δεν έχει προφανώς κανένα νόημα, ούτε εκφράζεται σε αντίστοιχες μονάδες.



# ΜΕΓΕΘΟΣ / ΑΡΙΘΜΟΣ

**Μέγεθος:**  
**στοιχείο της πραγματικότητας**

εκφράζεται γλωσσικά ως αριθμητικό επίθετο

**Αριθμός:**  
**μαθηματικό αντικείμενο**  
εκφράζεται γλωσσικά ως ουσιαστικό (απόλυτο)



# ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗ “ΑΡΙΘΜΟΥ” ΚΑΙ “ΜΕΓΕΘΟΥΣ”

Η εννοιολογική διαφοροποίηση “αριθμού” και “μεγέθους” δεν είναι μια απλή νοητική διαδικασία και απαιτεί μια συνολική εννοιολογική αναδιοργάνωση,

η οποία προϋποθέτει ένα παραπέρα βήμα στην ανάπτυξη της αφηρημένης σκέψης, χωρίς μάλιστα τη βοήθεια της γλώσσας.

Γιατί στην ελληνική γλώσσα, όπως άλλωστε σε όλες τις Ινδο-ευρωπαϊκές γλώσσες, δεν διακρίνεται λεκτικά η γενική έννοια του αριθμού, π.χ. “εννέα”, από την πληθική έννοια του αριθμού, π.χ. “εννέα” (αντικείμενα) και την έννοια του αριθμού-μέτρου, π.χ. “εννέα” (μονάδες μέτρησης ενός μεγέθους).



# Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ

**Η διαφοροποίηση της έννοιας του αριθμού από την έννοια του μεγέθους επιβάλλει επίσης μια ριζική τροποποίηση της έννοιας του μηδενός.**

Το “μηδέν”, ως έκφραση της απουσίας μονάδων μιας τάξης κατά την αναγραφή των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

ή

ως έκφραση του πλήθους των στοιχείων ενός κενού συνόλου απαιτείται να επεκταθεί εννοιολογικά και να περιλάβει

**την έννοια μιας αυθαίρετα ορισμένης “αρχής” σε μια προσανατολισμένη κλίμακα ακεραίων αριθμών.**



# ΜΗΔΕΝ

## Μηδέν

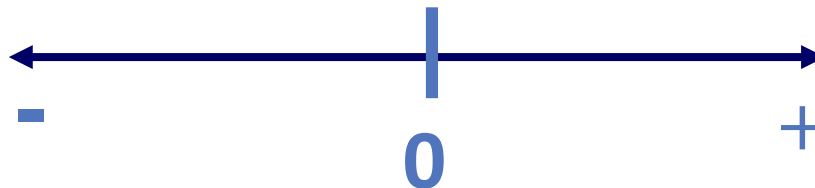
- απουσίας μονάδων μιας τάξης κατά την αναγραφή των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

**105**

- έκφραση του πλήθους των στοιχείων ενός κενού συνόλου

$$2 - 2 = 0$$

- μια αυθαίρετα ορισμένη “αρχή” σε μια προσανατολισμένη κλίμακα ακεραίων αριθμών.



Τέλος

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Δημήτρης Χασάπης. Δημήτρης Χασάπης. «Λογικο-μαθηματικές σχέσεις και αριθμητικές έννοιες στην προσχολική εκπαίδευση». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/ECD101>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

