Εκτίμηση μ από δείγμα $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

σ^2 γνωστό.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ με $E[X_i] = \mu$.

$Var[X_i] = \sigma^2$.

Σημειακή εκτιμήτρια:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad : \text{Δειγμ. μέσος}$$

(αμερολ. εκτιμ: $E[\bar{X}] = \mu$)

$$Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Διαστήματα εμπιστοσύνης

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

μ άγνωστο, σ^2 γνωστό

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2 / n}} \sim N(0,1)$$

Διάστημα εμπιστοσύνης με συντελ. 95%

$$P\left(\left| \underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}_{\sim N(0,1)} \right| \le z \right) = 95\%$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = Z \sim N(0,1)$$

$$P(|Z| \le z) = 95\% = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P(-z \le Z \le z) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \Phi(z) - \Phi(-z) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \Phi(z) = 0.975$$

$$\Leftrightarrow \Phi(z) = \Phi(1.96)$$

$$\Leftrightarrow z = 1.96$$

Ιαν 13-9:28 πμ

$$P\left(\left| \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right| \leq 1.96 \right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq 1.96 \right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{X} - 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \right) = 0.95$$

Άρα το

$$\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\sigma^2/n} , \bar{X} + 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \right]$$

είναι δ. ε. για το μ με συντελεστή 95%

<u>Υπενθύμιση:</u>

Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ κανονικές τ.μ., ανεξ.

τότε $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ κανονική.

Πόρισμα

$X_1, \dots, X_n$ ανεξ. και $N(\mu, \sigma^2)$

$\Downarrow$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Longrightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

Ιαν 13-9:38 πμ

Διάστημα εμπιστ. για ποσοστά
και διαφ. ποσοστών

Δείγμα:

$X_1, X_2, \ldots, X_{980}$, $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο i } \cancel{\text{έχει}} \text{ κάπνιστής άσθμα} \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{4350}$, $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο i μη-καπν άσθμα} \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

p_1 = ποσοστό ασθ στους καπνιστές $\quad$ p_2 = ποσοστό ασθ. στους μη καπν

Εκτιμ. για το p_1 : $\hat{p}_1 = \overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{980} X_i}{980}$.

—〃— p_2 : $\hat{p}_2 = \overline{Y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4350} Y_i}{4350}$

ΚΟΘ:

$$\hat{p}_1 = \overline{X} \overset{\text{προσεγγ.}}{\approx} N(\,;\,,\,;\,)$$

$$E[\overline{X}] = E[X_1] = p_1$$

$$Var[\overline{X}] = \frac{Var[X_1]}{980} = \frac{p_1(1-p_1)}{980}$$

$$\hat{p}_1 \approx N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{980}\right)$$

$$\hat{p}_1 \approx N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{980}\right).$$

άγνωστο άγνωστο.

Επειδή η διασπ είναι άγνωστη την αντικαθιστώ με εκτίμησή της,

$\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{980}$. Άρα

$$\hat{p}_1 \approx N\left(p_1, \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{980}\right).$$

$$\frac{\hat{P}_1 - P_1}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{380}}} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

Θέλω δ.ε. 95%.

$$P\Bigg(\underbrace{\left| \frac{\hat{P}_1 - P_1}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{380}}} \right|}_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)} \le z \Bigg) = 0.95$$

Όπως πριν .... $z = 1.96$

Ιαν 13-10:06 πμ

$$P\left(\left| \frac{\hat{p}_1 - p_1}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{980}}} \right| \le 1.96 \right) = 0.95$$

$$P\left(-1.96 \le \frac{\hat{p}_1 - p_1}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{980}}} \le 1.96 \right) = 0.95$$

$$P\left(\hat{p}_1 - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{980}} \le p_1 \le \hat{p}_1 + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{980}} \right) = 0.95$$

Άρα το δ.ε. με συντελ. 95% είναι

$$\left[\hat{p}_1 - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{980}} \, , \; \hat{p}_1 + 1.96\sqrt{} \right].$$

Για το p_2 όμοια.

- Διάστημα εμπιστοσύνης για την $p_1 - p_2$

Θεωρώ την εκτιμήτρια

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ για την $p_1 - p_2$.

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \overline{X} - \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{980} X_i}{980} - \frac{\sum_{i=1}^{4350} Y_i}{4350}.$$

Ιαν 13-10:35 πμ

$$\hat{p}_1 \overset{\text{ΚΟΘ}}{\approx} N\left(p_1, \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{980}\right)$$

$$\hat{p}_2 \overset{\text{ΚΟΘ}}{\approx} N\left(p_2, \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{4350}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \approx N\left(p_1 - p_2, \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{980} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{4350}\right)$$

(γιατί $E[W-V] = E[W] - E[V]$
αλλά $Var[W-V] \underset{W,V \text{ ανεξ}}{=} Var[W] + Var[V]$)

Άρα

$$\underbrace{\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{380} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{4350}}}}_{Z} \sim N(0,1)$$

$$P(|Z| \leq z) = 0.95$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow z = 1.96$$

$$P\left(\left| \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{880} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{4350}}} \right| \leq 1.96 \right) = 0.95$$

$$\Updownarrow$$

Δ.Ε. για $p_1 - p_2$:

$$\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 1.96\sqrt{} \ , \ (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + 1.96\sqrt{} \right].$$

με συντελ. εμπιστ 95%.

Ιαν 13-10:44 πμ

Προσδιορ. μεγέθους δείγματος

Εκτίμηση $\mu = E[X_i]$ (μέσου πληθ.)

με συγκεκριμένη ακρίβεια

& βεβαιότητα.

1.73// $\underline{\underline{1.50 - 2.00}}$ με $\underline{\underline{60\%}}$.

Μέγεθος δειγμ.

$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad n\,?$

Συντελ. εμπ $= 95\% = 0.95$

Επιτρεπτό σφάλμα εκτιμ $= 2.5$

$\sigma^2 = 18^2$

$$\bar{X} \underset{\uparrow}{\simeq} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(\mu, \frac{18^2}{n}\right)$$

άγνωστο

ΚΟΘ $(n \geq 30)$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{18^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(|\bar{X}-\mu| \le 2.5\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{18^2/n}}\right| \le \frac{2.5\sqrt{n}}{18}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{2.5\sqrt{n}}{18}\right) - \Phi\left(-\frac{2.5\sqrt{n}}{18}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow\ 2\,\Phi\left(\frac{2.5\sqrt{n}}{18}\right) - 1 = 0.95$$

$$\Leftrightarrow\ \Phi\left(\frac{2.5\sqrt{n}}{18}\right) = 0.975 = \Phi(1.96)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2.5\sqrt{n}}{18} = 1.96$$

$$\Leftrightarrow\ n = \left(\frac{18\cdot 1.96}{2.5}\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow\ n = 200.$$