Έλεγχος Υποθέσεων

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, 10)$

Μέγεθος που μελετάω

n παρατηρήσεις

Μέση τιμή μεγ $= \mu$ άγνωστο.

$H_0: \mu = 175$ ← συντηρητική (προεπιλ μοντ.)

$H_1: \mu = 180$ ← εναλλακτ. (νέο μοντ.)

Πως αποφασίζω ποιά υποθ. αποδέχομαι.

Χώρος δεδομ. $= R \cup R^c$

R: περιοχή απόρριψης της H_0

R^c: περιοχή αποδοχής της H_0

Δεδομένα $\in R \longrightarrow$ Απορρίπτω την H_0

Δεδομένα $\in R^c \longrightarrow$ Αποδεχ. την H_0

Στο παραδ. θα μπορούσε π.χ.

$$R = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} > 179 \right\}$$

περιοχή απορ.

$$(x_1, \dots, x_n) \to \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} > 179 \to \text{απορ } H_0 \to \mu = 180$$

$$(x_1, \dots, x_n) \to \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq 179 \to \text{αποδ } H_0 \to \mu = 175$$

Άλλη επιλογή

$$R = \{ (x_1, \dots, x_n) : \max(x_1, \dots, x_n) > 185 \}$$

Ιαν 14-3:34 μμ

Έλεγχος Πηλίκου Πιθανοφάνειας

$H_0: \theta = \theta_0$ $\qquad$ $H_1: \theta = \theta_1$

$$\underset{\substack{p \\ \text{διδομ}}}{L(x)} = \frac{p_X(x;\theta_1)}{p_X(x;\theta_0)} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{μεγάλο} \longrightarrow \text{απορ. } H_0 \\ \searrow \text{μικρό} \longrightarrow \text{αποδ. } H_0 \end{array}$$

Πρέπει να βρω μια κρίσιμη τιμή ζ.

ΕΠΠ: $L(x) > \zeta \Longrightarrow$ απορ. H_0

$L(x) \leq \zeta \Longrightarrow$ αποδ. H_0

Πως βρίσκω το ζ; $P(L(X) > \zeta; H_0) \leq \alpha$

Παρ: Έλεγχος ζαριού

$$H_0: p_x(x; H_0) = \frac{1}{6} \quad x = 1, \dots, 6 \quad \Big\| \quad H_1: p_x(x; H_1) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 1,2 \\ \frac{1}{8}, & x = 3,4,5,6 \end{cases}$$

$$L(x) = \frac{p_x(x; H_1)}{p_x(x; H_0)} = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x = 1,2 \\ \frac{3}{4}, & x = 3,4,5,6 \end{cases}$$

ΕΠΠ: Επιλέγω μια κρίσιμη τιμή ξ

$L(x) > \xi \Rightarrow$ Απορ. H_0

$L(x) \leq \xi \Rightarrow$ Αποδ. H_0

Περιοχή απορ: (ξ, ∞)

$P($σφάλμα τύπου I$)$

$= P($λανθ. απορ. της $H_0)$

$= P(\underline{L(X) > \xi}\,; H_0)$

$$= \begin{cases} 1, & \xi \leq \frac{3}{4} \\ 1/3, & \frac{3}{4} < \xi \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \xi > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$L(x) = \frac{3}{2}$,

$x = 1, 2$

$L(x) = \frac{3}{4}$

$x = 3, 4, 5, 6$

$P($σφάλμα τύπου II$)$

$= P($λανθ. αποδ. της $H_0)$

$= P(L(X) \leq \xi \,;\, H_1)$

$$= \begin{cases} 0, & \xi < \frac{3}{4} \\ 1/2, & \frac{3}{4} < \xi < \frac{3}{2} \\ 1, & \frac{3}{2} < \xi \end{cases}$$

$L(x) = \frac{3}{2}$, $x = 1, 2$

$L(x) = \frac{3}{4}$, $x = 3, 4, 5, 6$

Ποιός είναι ο ΕΠΠ σε επιπ. σημ. 5%

$P(\text{σφάλμα τύπου I.}) \leq 0.05$

Πρέπει να επιλέξω $\xi > \frac{3}{2}$.

Παρ. 2: Έλεγχος συναγερμού

$$H_0: \ f(x; H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{x^2}{2v}\right), \ x \in \mathbb{R}$$

$$H_1: \ f(x; H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2v}\right), \ x \in \mathbb{R}$$

$$L(x) = \frac{f(x; H_1)}{f(x; H_0)} = \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2v} + \frac{x^2}{2v}\right)$$

$$= \exp\left(-\cancel{\frac{x^2}{2v}} + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}v} - \frac{1}{2v} + \cancel{\frac{x^2}{2v}}\right)$$

$$L(x) = \exp\left(\frac{x}{\sigma} - \frac{1}{2\sigma}\right).$$

ΕΠΠ:
$$\left\{\begin{array}{ll} L(x) > \zeta & \longrightarrow \text{Απορ. } H_0 \\ L(x) \leq \zeta & \longrightarrow \text{Αποδ. } H_0. \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x > \underbrace{\sigma \log \zeta - \frac{1}{2}}_{=\gamma} & \longrightarrow \text{Απορ. } H_0 \\ x \leq \underbrace{\sigma \log \zeta - \frac{1}{2}}_{=\gamma} & \longrightarrow \text{Αποδ. } H_0 \end{array}\right\}$$

$\{x : x > \gamma\}$: Περιοχή απορ.

$$P(\text{σφάλμα τύπου I}) = P(\text{λανθ. απορ. } H_0)$$

$$= P(X > \gamma ; H_0) \underset{\substack{\uparrow \\ X \sim N(0,\upsilon)}}{=} P\Big(\underbrace{\frac{X-0}{\sqrt{\upsilon}}} > \frac{\gamma-0}{\sqrt{\upsilon}} ; H_0\Big)$$

$$= 1 - \Phi\Big(\frac{\gamma}{\sqrt{\upsilon}}\Big).$$

$$P(\text{σφάλμα τύπου II}) = P(\text{λανθ. αποδ. } H_0)$$

$$= P(X \leq \gamma ; H_1) \underset{\substack{\uparrow \\ X \sim N(1,\upsilon)}}{=} P\Big(\underbrace{\frac{X-1}{\sqrt{\upsilon}}} \leq \frac{\gamma-1}{\sqrt{\upsilon}} ; H_1\Big)$$

$$= \Phi\Big(\frac{\gamma-1}{\sqrt{\upsilon}}\Big).$$

ΕΠΠ σε επιπ. σημαντ. $\alpha = 0.025$.

$$P(\text{σφάλμα τύπου I}) \leq 0.025$$

$$\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\upsilon}}\right) \leq 0.025$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\upsilon}}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma}{\sqrt{\upsilon}} \geq 1.96$$

$$\Leftrightarrow \gamma \geq 1.96\sqrt{\upsilon}.$$

Άρα ο έλεγχος: Απορ. H_0 αν $X > 1.96\sqrt{\upsilon}$
Αποδ. H_0 αν $X \leq 1.96\sqrt{\upsilon}$

είναι ο ΕΠΠ σε επιπ. σημ. 0.025.