Σχέση Μέσου Τετρ. Σφαλμ.

Μεροληψίας & Διασποράς Εκτιμ.

θ : άγνωστη παραμ (αριθμός)

$\hat{\Theta}_n$: εκτιμήτρια (τ.μ.)

$\tilde{\Theta}_n = \hat{\Theta}_n - \theta$: σφάλμα (τ.μ.)

$$Var_\theta(\tilde{\Theta}_n) = E_\theta[\tilde{\Theta}_n^2] - (E[\tilde{\Theta}_n])^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$Var_\theta(\hat{\Theta}_n) = MSE(\hat{\Theta}_n) - (b_\theta(\hat{\Theta}_n))^2$$

Αμεροληψία του δειγμ. μέσου $\bar{X}$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. ισον

$E[X_i] = \mu \qquad Var[X_i] = \sigma^2.$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\boxed{E_\mu[\bar{X}]} = E_\mu\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \underbrace{\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E_\mu[X_i]}_{=\mu}}_{= n\mu}}_{\mu}$$

$$\boxed{= \mu}$$

Αμεροληψία του μ

$$Var[\bar{X}] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ο $\bar{X}$ είναι πολύ καλή εκτιμ.

1] Είναι αμερολ. $E[\bar{X}] = \mu$

2] $Var[\bar{X}] \downarrow 0$ καθώς $n \to \infty$.

Αμεροληψία της S^2

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\mu)^2 - 2(X_i-\mu)(\bar{X}-\mu) + (\bar{X}-\mu)^2\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\underbrace{E[(X_i-\mu)^2]}_{Var[X_i]} - 2E\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}_{n(\bar{X}-\mu)}(\bar{X}-\mu)\right] + nE[(\bar{X}-\mu)^2]$$

$$= n\sigma^2 - 2nE[(\bar{X}-\mu)^2] + nE[(\bar{X}-\mu)^2]$$

$$= n\sigma^2 - nE[(\bar{X}-\mu)^2] = n\sigma^2 - n\cdot Var[\bar{X}] = n\sigma^2 - \cancel{n}\cdot\frac{\sigma^2}{\cancel{n}}$$

$$=(n-1)\sigma^2 \Rightarrow E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2\right] = \sigma^2 \Rightarrow E[S^2]=\sigma^2$$

Ασκ. 1 : Εστω Διων(N,p)

N γνωστό , p άγνωστο

συναρτ. πιθανοφ.

$$p_X(x_1, x_2, \dots, x_n; p)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \binom{N}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{N-x_i}$$

$$= \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^{n} \binom{N}{x_i} \right\} \cdot p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{nN - \sum_{i=1}^{n} x_i}}_{\text{θέλω να max ως προς } p}$$

(τα x_i σταθ.)

Μεγιστοποιώ τη λογαρ. πιθανοφ.

$$\log P_X(x_1, \dots, x_n; p)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \log \binom{N}{x_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \log p + \left(nN - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \log(1-p)$$

$$\frac{d}{dp} \log P_X(x_1, \dots, x_n; p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \frac{1}{p} - \left(nN - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \frac{1}{1-p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)(1-\cancel{p}) - \left(nN - \cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) p = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{nN}}$$

Το $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{nN}$ είναι υποψ. εμπ.

Ισχυρίζομαι ότι είναι πραγμ. μέγιστο.

$$\frac{d^2}{dp^2} P_X(x_1, x_2, \dots, x_n; p)\Big|_{p=\hat{p}}$$

$= \dots < 0$ Άρα οκ.

$\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{nN}$: εκτίμηση μ.π. $\quad \hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{nN}$: εκτιμήτρια μ.π.

Αμεροληψία;

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{mN}\right] = \frac{1}{mN}\sum_{i=1}^{m}\underbrace{E[X_i]}_{Np} = p.$$

Ναι, η $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{mN}$ είναι

αμερόληπτη εκτιμ. του p.

Ασκ 2: Εμπ για το λ σε Poisson

$$P_X(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i; \lambda)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = \underbrace{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}}_{\text{συν. πιθανοφ.}}$$

λογ. πιθανοφ.:

$$\log P_X(x_1, \dots, x_n; \lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \log \lambda + \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1}{x_i!}\right)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\log p_X(x_1,\ldots,x_n;\lambda) = -n + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\frac{1}{\lambda}.$$

$$\frac{d}{d\lambda} = 0 \iff \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$ υποψηφ. εμπ.

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = -\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\frac{1}{\hat{\lambda}^2} < 0.$$ Άρα πραγμ. εμπ.

Εκτιμήτρια μπ : $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}.$

Είναι και αμερόληπτη.