Βασικοί Υπολογ.

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ. ισον, $S_n = X_1 + \dots + X_n$

n μεγάλο ($n \geq 30$) $E[X_i]=\mu$, $Var[X_i]=\sigma^2$

$$P(a \leq S_n \leq b) = P\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}}}_{\substack{\sim \\ \mathcal{N}(0,1)}} \leq \frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Κανονική προσέγγιση της Bin(n, p)

$$S_n \sim Bin(n, p)$$

$$P(a \le S_n \le b) = \sum_{a \le k \le b} \underbrace{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{P(S_n = k)}$$

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i} \qquad X_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθ } p \\ 0 & \text{με πιθ } 1-p \end{cases}$$

$E[X_i] = p$, $Var[X_i] = p(1-p)$

ΚΟΘ

· De Moivre - Laplace : $Bin(n,p) \simeq N(np, np(1-p))$

$n \geq 30$

$S_n \sim Bin(n,p) \quad q = 1-p$

$$P(a \le S_n \le b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Όταν S_n διων.

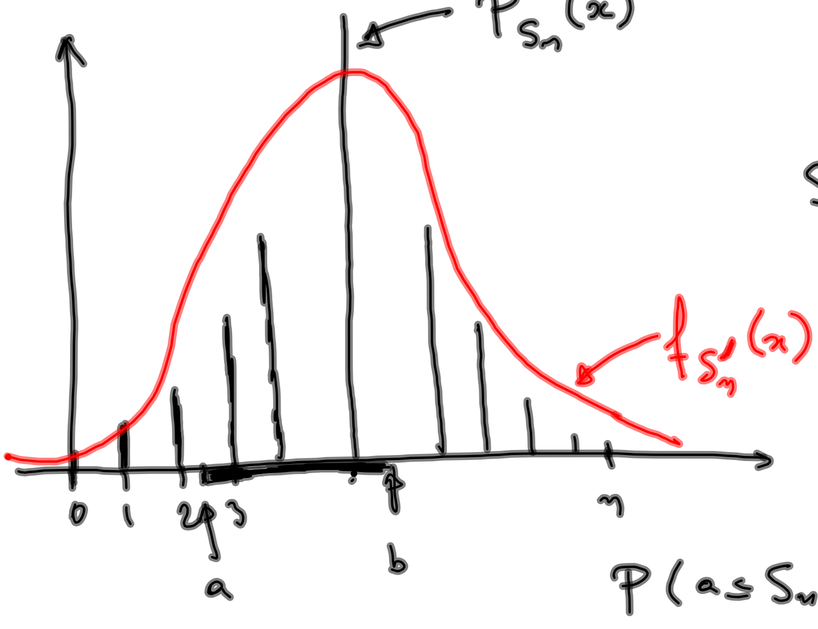
$$P(4 \le S_n \le 5) = P(3.5 \le S_n \le 5.7) = P(3 < S_n < 6)$$

$$= P(S_n = 4) + P(S_n = 5)$$

Πολλές επιλογές για a, b για κανον. προσεγγ

Ποιά είναι η καλύτερη;

Κανον. προσέγγιση διων. σχηματικά



$S_n \sim Bin(n,p)$

$S'_n \sim N(np, npq)$

$P(a \le S_n \le b)$

Διόρθωση συνέχειας

Αν με ενδιαφ. Bin(n,p)

$P(a \le S_n \le b)$, a, b ακερ.

Χρησιμοποιώ ΚΟΘ ξεκιν. με την

$P\left(a-\frac{1}{2} \le S_n \le b+\frac{1}{2}\right)$

π.χ $P(S_n = 4 \text{ ή } 5 \text{ ή } 6) = \overbrace{P(3.5 \le S_n \le 6.5)}^{\text{Διορθ. συνεχ.}}$

Άσκ 1: Ρίψεις ζαριού

Ρίψη ζαριού								
	X_i ↓	Ένδειξη	1	2	3	4	5	6
	Y_i	Κέρδος	-1	-2	-3	3	2	1

Y_i = Κέρδος στην i ρίψη

$S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ = Κέρδος ως την n-οστή ρίψη.

$P(S_{42} \geq 7) =$;

$$E[Y_i] = (-1)\cdot\frac{1}{6} + (-2)\cdot\frac{1}{6} + (-3)\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} = 0$$

$$\mathrm{Var}[Y_i] = E[Y_i^2] - \cancel{(E[Y_i])^2}^{\,0} =$$

$$= (-1)^2\cdot\frac{1}{6} + (-2)^2\cdot\frac{1}{6} + (-3)^2\cdot\frac{1}{6} + 3^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{1}{6} + 1^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

$E[S_n]=0, \quad Var[S_n]=\frac{14}{3}n$

$$P(S_{42}\geq 7) \overset{\text{Διορθ. συν.}}{=} P(S_{42}\geq 6.5)$$

$$= P\left(\frac{S_{42}-E[S_{42}]}{\sqrt{Var[S_{42}]}} \geq \frac{6.5-0}{\sqrt{\frac{14}{3}\cdot 42}}\right)$$

$$= P(\underset{\substack{\sim \\ N(0,1)}}{Z_{42}} \geq 0.4643) \overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq} 1-\underbrace{\Phi(0.4643)}_{0.6772}$$

$=0.3228.$

Άσκ. 2: Ελαχ. αριθμός κλινών

Πόλη: 4000 κατ.

Μέσο πλήθος ατόμων για νοσηλ.: 10 /ημέρα.

$p = P$(ένα άτομο της Πόλης χρειαζ. νοσ. μια συγκ. μέρα) $= \frac{10}{4000} = \frac{1}{400}$.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το άτομο } i \text{ χρ. νοσηλ.} \ (p = \tfrac{1}{400}) \\ 0, & \text{διαφ.} \ \left(q = \tfrac{399}{400}\right) \end{cases}$$

ανεξ.

$S_{4000} = X_1 + \cdots + X_{4000} = \#$ ατόμων που χρειαζ. νοσ.

$P(\text{όχι διακοπής}) \geq 0.95$

$$\Leftrightarrow \boxed{P(\underset{\substack{\uparrow \\ \#\text{ για} \\ \text{νοσηλ}}}{S_{4000}} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{διαθέσιμα} \\ \text{κρεβ}}}{\kappa}) \geq 0.95}$$

$$S_{4000} \sim Bin\left(4000, \frac{1}{400}\right)$$

$$E[S_{4000}] = 4000 \cdot \frac{1}{400} = 10$$

$$Var[S_{4000}] = \underset{\substack{\parallel \\ n}}{4000} \cdot \underset{\substack{\parallel \\ p}}{\frac{1}{400}} \cdot \underset{\substack{\parallel \\ q}}{\frac{399}{400}} = \frac{399}{40} \simeq 9.9$$

$$P(S_{4000} \le k) \geq 0.95 \iff P\left(S_{4000} \le k + \tfrac{1}{2}\right) \geq 0.95$$

$$\iff P\left(\frac{S_{4000} - E[S_{4000}]}{\sqrt{Var[S_{4000}]}} \le \frac{k + \frac{1}{2} - 10}{\sqrt{9.9}} \right) \geq 0.95$$

$$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\iff} P\left(\underset{\substack{\wr \\ \mathcal{N}(0,1)}}{Z} \le \frac{k + \frac{1}{2} - 10}{\sqrt{9.9}} \right) \geq 0.95$$

$$\iff \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - 10}{\sqrt{9.9}} \right) \geq 0.95 = \Phi(1.65)$$

$$\iff \frac{k + \frac{1}{2} - 10}{\sqrt{9.9}} \geq 1.65 \iff k \geq 1.65 \times \sqrt{9.9} + 10 - \frac{1}{2}$$

$$\iff \dots \quad k \geq 14.$$

Ασκ. 3: Εισοδ. Χαρτοπαικτη

X_i: Εισοδ. i μέρα $\sim$ Uniform $([-5, 5])$.

σ.π.π. $f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & , x \in [-5, 5] \\ 0 & , \text{διαφ.} \end{cases}$

$E[X_i] = \frac{a+b}{2} = \int_{-5}^{5} x f_X(x)\, dx = 0 = \mu$

$Var[X_i] = \frac{(b-a)^2}{12} = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{100}{12} = \frac{25}{3} = \sigma^2$

$E[S_n] = n \cdot 0 = 0$

$Var[S_n] = n \cdot \frac{25}{3}$.

Δεκ 23-10:39 πμ

$$\boxed{P\left(\underset{\text{μέρες}}{S_n} \lessgtr \underset{\text{ποσό}}{x}\right) \geq \underset{\text{επίπεδο βεβ.}}{y}}$$

$E[S_n] = 0$

$Var[S_n] = \frac{25n}{3}$

$P(S_{48} \geq 30) = ;$ $\quad (y\,;)$

$P(|S_{48}| \leq s) \geq 0.95$ $\quad (s\,;)$

$P(|S_n| \leq 50) \geq 0.95$ $\quad (n\,;)$

$$P(S_{48} \geq 30) = P\left(\frac{S_{48} - E(S_{48})}{\sqrt{Var[S_{48}]}} \geq \frac{30 - 0}{\sqrt{\frac{25 \cdot 48}{3}}}\right)$$

$$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq} P(\underset{\sim N(0,1)}{Z} \geq 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332$$

$$= 0{,}0668$$

$$P(|S_{48}| \le s) \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow P(-s \le S_{48} \le s) \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-s-0}{20} \le \frac{S_{48} - E(S_{48})}{\sqrt{Var(S_{48})}} \le \frac{s-0}{20}\right) \geq 0.95$$

$$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\Leftrightarrow} P\Big(-\frac{s}{20} \le \underset{\substack{\wr\wr \\ N(0,1)}}{Z} \le \frac{s}{20}\Big) \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{s}{20}\right) - \Phi\left(-\frac{s}{20}\right) \geq 0.95$$

$$\overset{\Phi(-z) = 1-\Phi(z)}{\Leftrightarrow} \Phi\left(\frac{s}{20}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{s}{20}\right) \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow 2\,\Phi\left(\frac{s}{20}\right) - 1 \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{s}{20}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96)$$

$$\overset{\Phi \uparrow}{\Leftrightarrow} \frac{s}{20} \geq 1.96$$

$$\Leftrightarrow s \geq 20 \cdot 1.96$$

$$\Leftrightarrow s \geq 39.20$$

Δεκ 23-10:54 πμ

$$P\left(|S_n| \le 50 \right) \geq 0.95$$

$$\iff P\left(-50 \le S_n \le 50 \right) \geq 0.95$$

$$\iff P\left(\frac{-50-0}{\sqrt{\frac{25}{3}n}} \le \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \le \frac{50-0}{\sqrt{\frac{25}{3}n}} \right) \geq 0.95$$

ΚΟΘ

$$\iff P\left(-\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \le \underset{\mathcal{N}(0,1)}{\underset{\sim}{Z}} \le \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \right) \geq 0.95$$

$$\iff \Phi\left(\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$$

$$\iff 2\,\Phi\left(\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - 1 \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \geq 1.96$$

$$\Leftrightarrow \quad n \leq \left(\frac{10\sqrt{3}}{1.96}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow n \leq 78.09$$