Ανισότητα Markov

$$X \geq 0,\ a > 0 \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

Αποδ:

Θέτω:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{αν } X < a \\ a, & \text{αν } X \geq a \end{cases}$$

Τότε $Y \leq X \Rightarrow E[Y] \leq E[X]$

$$\Rightarrow \cancel{0 \cdot P(Y=0)} + aP(Y=a) \leq E[X]$$

$$\Rightarrow aP(X \geq a) \leq E[X] \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Εφαρμογή:

X με άγνωστη κατανομή.

$X \geq 0$

$E(X) = 15.$

$$P(X \geq 30) \leq \frac{E[X]}{30} = \frac{1}{2}.$$

$$P(X \geq n E[X]) \leq \frac{1}{n}$$

Ανισότητα Chebyshev

$$X \text{ τ.μ.}, \; c>0 \;\Rightarrow\; P\left(|X-E[X]| \geq c\right) \leq \frac{Var[X]}{c^2}.$$

Αποδ:

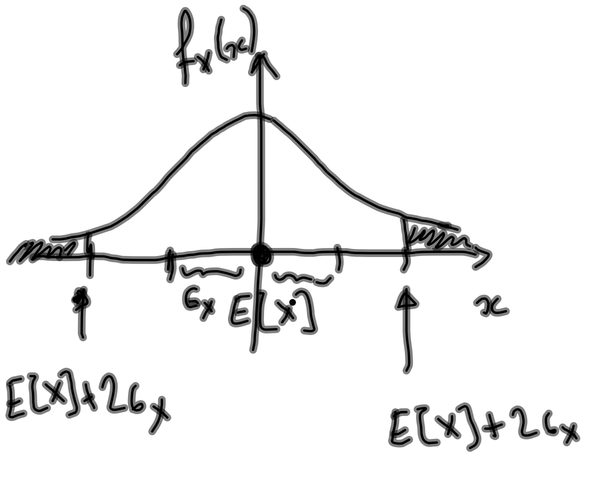
$$P\left(|X-E[X]| \geq c\right) = P\Big(\underbrace{(X-E[X])^2}_{\text{μη-αρν. τ.μ}} \geq c^2\Big)$$

$$\overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E[(X-E[X])^2]}{c^2} = \frac{Var[X]}{c^2}.$$

Εφαρμογή

X τ.μ.

$$P\left(|X - E[X]| \geq \overset{c}{\overset{\shortparallel}{2\sigma_X}}\right) \leq \frac{\cancel{Var[X]}}{4\cancel{\sigma_X^2}} = \frac{1}{4}.$$



Ανισότητα Chernoff

X τ.μ.
$M_X(s)$ πεπερασμ. $\Rightarrow P(X \geq a) \leq \inf_{s>0} e^{-sa} M_X(s)$

Αποδ:

$$P(X \geq a) = P(\underbrace{e^{sX}}_{Y} \geq \underbrace{e^{sa}}_{\text{σταθ}}) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E[e^{sX}]}{e^{sa}}$$

$$= e^{-sa} M_X(s), \quad \forall s>0$$

$$\Rightarrow P(X \geq a) \leq \inf_{s>0} e^{-sa} M_X(s).$$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$X \; X \; Y \; Y \qquad X \; X \; Y \; Y$$

$$\boxed{E(XY)^2 \leq E(X^2)\,E(Y^2)}$$

Αποδ:

X, Y τ.μ. και $t \in \mathbb{R}$

$$Var(X + tY) \geq 0 \Rightarrow Var(X) + Var(tY) + 2Cov(X, tY) \geq 0$$

$$\Rightarrow Var[Y] \cdot t^2 + 2Cov(X,Y)t + Var(X) \geq 0 \quad \forall t$$

$\Longrightarrow$ Η διακρ. ≤ 0

$$\Rightarrow 4\,Cov(X,Y)^2 - 4\,Var(X)\,Var(Y) \leq 0$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y)^2 \leq Var(X)\,Var(Y) \leftarrow$$ 2η μορφή C-S

$$\Rightarrow \left(E[XY] - E[X]E[Y]\right)^2 \leq \left(E[X^2] - (E[X])^2\right)\left(E[Y^2] - (E[Y])^2\right)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow E[XY]^2 \leq E[X^2]\,E[Y^2].$$

Πόρισμα:

Ο συντελ. συσχ. $\rho(X,Y) \in [-1,1]$.

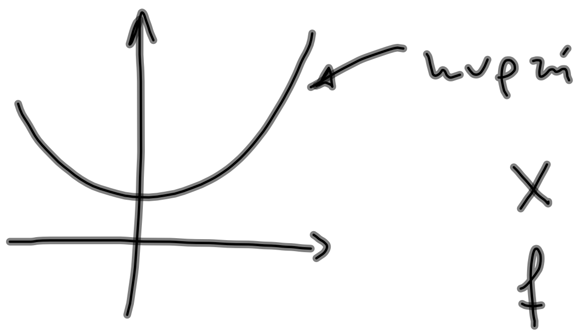
Πράγματι:

$$(\rho(X,Y))^2 = \left(\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}\right)^2 \leq 1$$

C-S.

$\Rightarrow \rho(X,Y) \in [-1,1]$

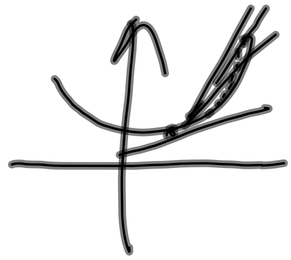
Ανισότητα Jensen



X τ.μ.
f κυρτή $\Rightarrow f(E[X]) \leq E[f(X)]$

π.χ. $f(x) = x^2 \Rightarrow (E[X])^2 \leq E[X^2]$

Αποδ:



Έστω $\mu = E[X]$.

Έχω ότι f κυρτή οπότε

$$f(x) \geq f(\mu) + f'(\mu)(x-\mu), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f(x)-f(\mu)}{x-\mu} \begin{array}{ll} \geq f'(\mu), & x>\mu \\ \leq & , x<\mu \end{array} \right)$$

$$\to f(X) \geq f(\mu) + f'(\mu)(X-\mu)$$

$$\Rightarrow E[f(X)] \geq f(\mu) + \cancel{f'(\mu)(E[X]-\mu)} = f(E[X])$$

$$Var[X] = 0 \Rightarrow ;$$

$$Var[X] = 0 \Rightarrow \exists c : \quad P(X = c) = 1, \quad P(X \neq c) = 0.$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ. ισον. τ.μ.

παρατηρήσεις ενός μεγέθους σε δείγμα.

$S_n = X_1 + \dots + X_n$: Άθροισμα παρατηρ.

$M_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$: Μ.Ο. παρατηρ

στο δείγμα

• Έστω $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$

ΚΟΘ:

Για μεγάλα n $(n \geq 30)$ $\quad S_n$, M_n ακολουθούν κανονική κατανομή

$$E[S_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n] = n\mu$$

$$Var[S_n] = Var[X_1] + \dots + Var[X_n] = n\sigma^2$$

$$E[M_n] = E\left[\frac{1}{n} S_n\right] = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

$$Var[M_n] = Var\left[\frac{1}{n} S_n\right] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \sigma^2/n$$

Δεκ 17-4:29 μμ

Για μεγάλα n $(n \geq 30)$:

$S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$

$M_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Δεκ 17-4:32 μμ

Αυστηρή διατύπωση του ΚΟΘ

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ. ισον $\quad S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$M_n = S_n / n$

$\Downarrow$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \le x \right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - E[M_n]}{\sqrt{Var[M_n]}} \le x \right)$$

$$= \Phi(x)$$

$\uparrow$

σ.κ της $\mathcal{N}(0,1)$

Πρακτική χρήση ΚΟΘ

$$P(\underline{a \le S_n \le b}) = P\left(\quad \le \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \le \quad \right)$$

$$= P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

$$Z_n \simeq N(0,1)$$

$$\cong P\left(\quad \le Z \le \quad \right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Άσκηση (Φορτίο αεροπλ.)

$n = 100$ πακέτα

$X_1, X_2, \dots, X_{100}$: Βάρη των πακέτων

$X_i \sim \text{Uniform}([5, 50])$

σππ $f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{45} & , x \in [5, 50] \\ 0 & , \text{διαφ.} \end{cases}$

$\mu = E[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_5^{50} \frac{1}{45} x dx = \frac{5+50}{2} = 27,5$

$\sigma^2 = Var[X_i] = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{(50-5)^2}{12} = 168.75$

$$P(S_{100} \geq 3000)$$

αρκετά μεγάλο n $(n \geq 30)$

$$= P\left(\frac{S_{100} - E[S_{100}]}{\sqrt{Var[S_{100}]}} \geq \frac{3000 - E[S_{100}]}{\sqrt{Var[S_{100}]}} \right)$$

ΚΟΘ

$$\simeq P\left(\underset{\underset{\mathcal{N}(0,1)}{\sim}}{Z} \geq \frac{3000 - 100 \cdot 27.5}{\sqrt{100 \cdot 168.75}} \right) = P(Z \geq 1.92)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.92) = 1 - \Phi(1.92) = 1 - 0.9726$$

$$= \ldots$$

Δεκ 17-4:48 μμ

Άσκηση (Σειριακή επισ. προϊόντων)

$X_1, X_2, \ldots$ χρόνοι επισ. μηχανών

$X_i \sim \text{Uniform}([1,5])$

$E[X_i] = \frac{1+5}{2} = 3 \qquad Var[X_i] = \frac{(5-1)^2}{12} = \frac{4}{3}.$

P(σε χρόνο 320 να παραχθούν τουλάχ. 100 μηχ.)

$= P(S_{100} \leq 320)$

αρκ. μεγ. $(n \geq 30)$ οκ για ΚΟΘ

$= P\left(\frac{S_{100} - E[S_{100}]}{\sqrt{Var[S_{100}]}} \leq \frac{320 - E[S_{100}]}{\sqrt{Var[S_{100}]}} \right)$

$$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq} P\left(\underset{\underset{\mathcal{N}(0,1)}{\wr}}{Z} \leq \frac{320 - 100 \cdot 3}{\sqrt{100 \cdot 4/3}} \right)$$

$$= P(Z \leq 1.73)$$

$$= \Phi(1.73)$$

$$= 0.9582$$