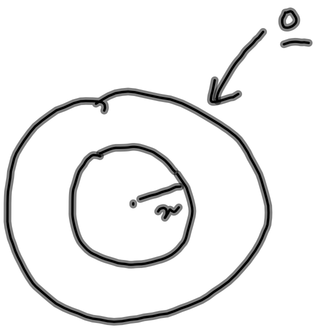
Ρίψη βέλους σε κυκλ. στόχο




Γεωμ. πιθ.

$$P(A) = \frac{\text{Εμβ } A}{\text{Εμβ } \Omega}$$

$$P(X = x) = \frac{\text{Εμβ. κύκλου } \{X = x\}}{\pi \cdot 1^2} = 0.$$

$X$: αποστ από κέντρο

$$P(X=x)=0 \quad \forall x\in[0,1]$$

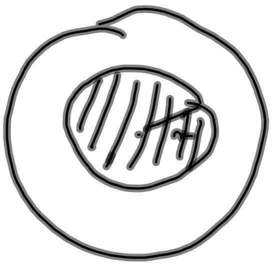
$$1=P(X\le 1)=P\Big(\bigcup_{x\in[0,1]}\{X=x\}\Big)$$

$$\neq \sum_{x\in[0,1]} P(X=x)=\sum_{x\in[0,1]} 0=0.$$

όχι αριθμήσιμη ένωση

Νοε 4-9:35 πμ

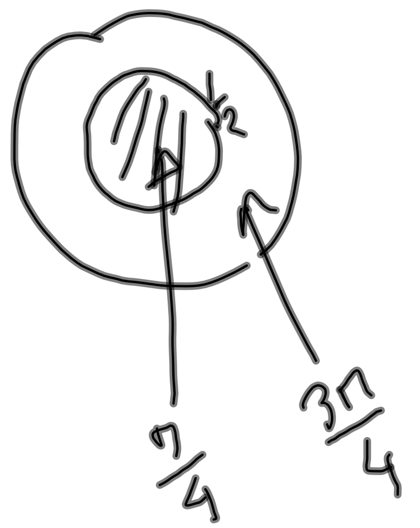
Συναρτ. καταν. $F_X(x) =$



$$P(X \leq x) = \frac{\pi \cdot x^2}{\pi \cdot 1^2}$$

$$= x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$




Τυχ. σημείο

στο μοναδ. δίσκο

Μέση αποστ. από το κέντρο

Μάλλον μέση αποστ.

$> \frac{1}{2}$.

Νοε 4-9:43 πμ

Διωνυμική κατανομή

n δοκιμές Bernoulli $\begin{cases} \xrightarrow{\text{επιτ.}} p \\ \xrightarrow{\text{αποτ}} 1-p \end{cases}$

$X = \#$ επιτυχ $\sim \text{Bin}(n, p)$

συναρτ. (μάζας) πιθαν.

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\frac{(k+n-k)!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ΕΕΑΑ ... ΑΕ...Ε

$\underbrace{\text{ΕΕΕ...Ε}}_{k}\underbrace{\text{ΑΑ...Α}}_{n-k} \to p^k (1-p)^{n-k}$

k

$\underbrace{|Ε|Ε|Α|Ε| \;\ldots\; |Α|}_{n \text{ θέσεις}}$

Γεωμετρική κατανομή

Ακολ. δοκιμών Bernoulli $\langle \begin{smallmatrix} E \to p \\ A \to 1-p \end{smallmatrix}$

$X = \#$ δοκιμών μέχρι $1^{\eta}$ επιτ.

σ.μ.π.

$$P(X=k) = P(\{\underbrace{AAA\cdots A}_{k-1}E\}) = (1-p)^{k-1}p, \quad k=1,2,3,\ldots$$

# Κατανομή Poisson

Κατανομή Poisson = Διωνυμική κατανομή με μεγάλο $n$ και μικρό $p$

π.χ. Πελάτες σε Τράπεζες, Τηλεφ. κέντρα κλπ.

Ασθενείς σε Εφημερίες.

Διωνυμική έχει δύσκολα υπολογ. σημ. για μεγάλα n.

$n = 100$
$p = 0.01$

$$P(X = \underset{k}{10}) = \binom{\overset{n}{100}}{\underset{k}{10}} \underset{p}{0.01}^{\overset{k}{10}} \cdot \underset{1-p}{0.99}^{\overset{n-k}{90}}$$

Poisson :

$$\boxed{P(X=k) \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

$np = \lambda$ $\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$

$n p \to$ Μέσο # επιτυχ.

$n$ μεγ.

$p$ μικρό

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow{n\to\infty}$$

Γεωμετρικές κατανομές

Πειρ. τύχης: Ακολ. δοκ Bernoulli $\begin{matrix} E \to p \\ A \to 1-p \end{matrix}$

$X = \#$ δοκ ως την $1^{\eta}$ $E$ $\quad p_X(k) = (1-p)^{k-1} p, \; k = 1, 2, 3, \dots$

$Y = \#$ δοκ ως την $1^{\eta}$ $A$ $\quad p_Y(k) = p^{k-1}(1-p), \; k = 1, 2, 3, \dots$

$Z = \#$ $A$ ως την $1^{\eta}$ $E$ $\quad p_Z(k) = (1-p)^{k} p, \; k = 0, 1, 2, \dots$

$W = \#$ $E$ ως την $1^{\eta}$ $A$ $\quad p_W(k) = p^{k}(1-p), \; k = 0, 1, 2, \dots$

# Αρνητική Διωνυμική

Πειρ. Τύχης: Δοκ. Bernoulli $\begin{cases} Ε \to p \\ Α \to 1-p \end{cases}$

$X$ = # δοκ. ως την $n$-οστή επιτυχία

$X \sim NegBin(n, p)$.

$n = 1 \longrightarrow$ Γεωμετρική

Άσκηση:

$$P(X=x) = c\,\frac{\lambda^x}{x!}\,,\quad x=0,1,\ldots$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) = 1 \Rightarrow c\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = 1$$

$$\Rightarrow c\cdot e^{\lambda} = 1 \Rightarrow c = e^{-\lambda}.$$

$$P_X(x) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!}\,,\quad x=0,1,\ldots$$

$$P(X=0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2)$$
$$= 1 - P_X(0) - P_X(1)$$
$$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$$

$$P(\underbrace{X=3}_{A} \mid \underbrace{X \geq 2}_{B}) = \frac{P(\{X=3\} \cap \{X \geq 2\})}{P(X \geq 2)} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^3}{3!}}{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}}$$