Παραδ.

X διακριτή $\quad p_X(x) = \begin{cases} 1/9, & x=-4,-3,\dots,4 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$g(x) = |x| \qquad Y = g(X) = |X|.$

Τιμές της Y: 0, 1, 2, 3, 4.

σμπ

$$p_Y(y) = P(Y=y) = P(|X|=y) = \boxed{P(X=y \text{ ή } X=-y)}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \neq 0,1,2,3,4 \\ \frac{1}{9}, & y=0 \\ \frac{2}{9}, & y=1,2,3,4 \end{cases}$$

Ερμην. E[X] ως κέντρο βάρους

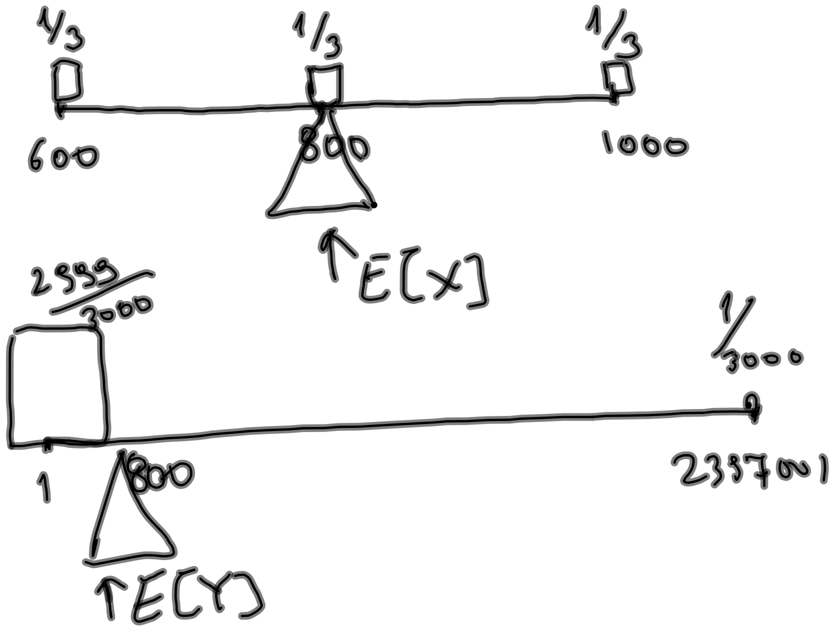
$p_X(600) = \frac{1}{3}$

$p_X(800) = \frac{1}{3}$

$p_X(1000) = \frac{1}{3}$

$p_Y(1) = \frac{2999}{3000}$

$p_Y(2.397.001) = \frac{1}{3000}$



Υπολογισμός Διασποράς

$$Var[X] = \sum_x (x - E[X])^2 \, p_X(x)$$

$p_X(600) = 1/3$

$p_X(800) = 1/3$

$p_X(1000) = \frac{1}{3}$

$E[X] = 800$

$$Var[X] = (600-800)^2 \cdot \frac{1}{3} + \underbrace{\cancel{(800-800)^2 \cdot \frac{1}{3}}}_{\to 0} + (1000-800)^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 2 \cdot 200^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$Pr(1) = \frac{2999}{3000}$$

$$Pr(2\,397\,001) = \frac{1}{3000}$$

$$E[x] = 800$$

$$Var[X] = (1-800)^2 \cdot \frac{2999}{3000} + (2397001-800)^2 \cdot \frac{1}{3000}$$

Γεωμετρική πρόοδος

$$S = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n$$

$$\underbrace{(1-t)S}_{} = S - tS$$

$$= 1 + \cancel{t} + \cancel{t^2} + \dots + \cancel{t^n}$$

$$- \cancel{t} - \cancel{t^2} - \dots - \cancel{t^n} - t^{n+1}$$

$$= \underbrace{1 - t^{n+1}}_{} \Rightarrow S = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

Νοε 5-4:20 μμ

$$1+t+t^2+t^3+\dots=\frac{1}{1-t},\ |t|<1.$$

Διωνυμικό ανάπτυγμα:

$$(1+t)^2=1+2t+t^2$$

$$(1+t)^3=1+3t+3t^2+t^3$$

$$\vdots$$

$$(1+t)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}t+\binom{n}{2}t^2+\binom{n}{3}t^3+\dots+\binom{n}{n}t^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k$$

Μέση τιμή συναρτ. τ.μ.

$$\boxed{E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x).}$$

$$E[X] = \sum_x x p_X(x)$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x)$$

$$E[\eta\mu(X)] = \sum_x \eta\mu x \, p_X(x)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

$$E[g(X)] \neq g(E[X])$$

π.χ.

$$E[X] = 5 \quad , \quad E[X^2] \neq 5^2$$

$$E[\eta\mu X] \neq \eta\mu 5$$

Για γραμμικές σχ.

$E[X]=5$

$$E[3x+2]=E[3x]+2$$
$$=3E[X]+2$$
$$=17$$

$$E[aX+b] = aE[X]+b$$

Αποδ:

$$E[aX+b] = \sum_x (ax+b)\,p_X(x)$$

$$= a\sum_x x\,p_X(x) + b\sum_x p_X(x)$$

$$= a\,E[X] + b\cdot 1$$

$$Var[aX+b]=a^2 Var[X].$$

Αποδ:

$$Var[aX+b]=E\left[\left(aX+b-E(aX+b)\right)^2\right]$$

$$=E\left[\left(aX+\cancel{b}-aE(X)-\cancel{b}\right)^2\right]$$

$$=E\left[a^2\left(X-E(X)\right)^2\right]$$

$$=a^2E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=a^2Var[X].$$

Εναλλακτικός Υπολ. Var[X].

Ορισμός: $\mathrm{Var}[X] = E[(X - E[X])^2]$

$$= E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2]$$

$$= E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

Εναλ. Υπολ. $\underline{\underline{\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2}}$

Παιχνίδι γνώσεων

Εύκολη ερωτ. → 100€ πιθ. Σ: 0.8

Δύσκ. ερωτ. → 200€ πιθ. Σ: 0.5

Έχω δικαίωμα για 1 ερωτ.

X : Κέρδος από εύκολη $p_X(100) = 0.8$

$p_X(0) = 0.2$

$E[X] = 0 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.8$

$= 80.$

Y: Κέρδος από δυσκ. $p_Y(200) = 0.5$

$p_Y(0) = 0.5$ $E[Y] = 100.$

Παιχν. γνώσεων

Ευκολη 100 0.8

Δυσκολ. 200 0.5

Διαλέγεις όποια θέλεις 1η. Συνεχίζεις αν κερδίσεις.

X = κέρδος αν διαλέξεις την Ε για 1η:

Y = κέρδος αν διαλέξεις την Δ για 1η:

$p_X(0) = 0.2$

$p_X(100) = 0.8 \cdot 0.5 = 0.4$

$p_X(300) = 0.8 \cdot 0.5 = 0.4$

$E[X] = 0 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.4 + 300 \cdot 0.4$

$= 160.$

$E[Y] = 0 \cdot 0.5 + 200 \cdot 0.1 + 300 \cdot 0.4$

$= 140.$