Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 6:
Οριακά θεωρήματα στη Θεωρία Πιθανοτήτων

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (1η μορφή)

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (1η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (1η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,

  $$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \ n \geq 1,$$

  το άθροισμα των πρώτων n από αυτές

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (1η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \; n \geq 1,$$
το άθροισμα των πρώτων n από αυτές και
$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \; n \geq 1,$$
η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (1η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \; n \geq 1,$$
το άθροισμα των πρώτων n από αυτές και
$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \; n \geq 1,$$
η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.
Τότε η συνάρτηση κατανομής της Z_n συγκλίνει στη συνάρτηση κατανομής $\Phi(z)$ της τυποποιημένης κανονικής:

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (1η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \; n \geq 1,$$
το άθροισμα των πρώτων n από αυτές και
$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \; n \geq 1,$$
η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.
Τότε η συνάρτηση κατανομής της Z_n συγκλίνει στη συνάρτηση κατανομής $\Phi(z)$ της τυποποιημένης κανονικής:
$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (2η μορφή)

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (2η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (2η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \ n \geq 1,$$
ο δειγματικός μέσος των πρώτων n από αυτές

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (2η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \; n \geq 1,$$
ο δειγματικός μέσος των πρώτων n από αυτές και
$$Z_n = \frac{M_n - E[M_n]}{\sqrt{Var[M_n]}} = \frac{\sqrt{n}(M_n - \mu)}{\sigma}, \; n \geq 1,$$
η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (2η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \; n \geq 1,$$
ο δειγματικός μέσος των πρώτων n από αυτές και
$$Z_n = \frac{M_n - E[M_n]}{\sqrt{Var[M_n]}} = \frac{\sqrt{n}(M_n - \mu)}{\sigma}, \; n \geq 1,$$
η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.
Τότε η συνάρτηση κατανομής της Z_n συγκλίνει στη συνάρτηση κατανομής $\Phi(z)$ της τυποποιημένης κανονικής:

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (2η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \ n \geq 1,$$
ο δειγματικός μέσος των πρώτων n από αυτές και
$$Z_n = \frac{M_n - E[M_n]}{\sqrt{Var[M_n]}} = \frac{\sqrt{n}(M_n - \mu)}{\sigma}, \ n \geq 1,$$
η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.
Τότε η συνάρτηση κατανομής της Z_n συγκλίνει στη συνάρτηση κατανομής $\Phi(z)$ της τυποποιημένης κανονικής:
$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Ερμηνεία του ΚΟΘ

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Τότε, για μεγάλα n

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Τότε, για μεγάλα n
  Η S_n προσεγγίζεται από μια κανονική $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Τότε, για μεγάλα n
  Η S_n προσεγγίζεται από μια κανονική $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.
  Η M_n προσεγγίζεται από μια κανονική $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Τότε, για μεγάλα n
  Η S_n προσεγγίζεται από μια κανονική $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.
  Η M_n προσεγγίζεται από μια κανονική $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
- Υπολογισμοί που αφορούν αθροίσματα και δειγματικούς μέσους (μέσους όρους) για μεγάλα δείγματα δεδομένων, γίνονται ‘ξεχνώντας ’ την κατανομή των δεδομένων και χρησιμοποιώντας την κανονική.

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- n μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιώ το ΚΟΘ για $n \geq 30$.

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- n μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιώ το ΚΟΘ για $n \geq 30$.
- $P(a \leq S_n \leq b) =$;

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- n μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιώ το ΚΟΘ για $n \geq 30$.
- $P(a \leq S_n \leq b) =;$
- Έχουμε:

$$P(a \leq S_n \leq b) \;=\; P(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}})$$

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- n μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιώ το ΚΟΘ για $n \geq 30$.
- $P(a \leq S_n \leq b) =;$
- Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(a \leq S_n \leq b) &= P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq Z_n \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- n μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιώ το ΚΟΘ για $n \geq 30$.
- $P(a \leq S_n \leq b) =;$
- Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
P(a \leq S_n \leq b) &= P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq Z_n \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}
$$

ΚΟΘ De Moivre - Laplace

ΚΟΘ De Moivre - Laplace

- S_n διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.

ΚΟΘ De Moivre - Laplace

- S_n διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.
- n: Πλήθος δοκιμών.

ΚΟΘ De Moivre - Laplace

- S_n διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.
- n: Πλήθος δοκιμών.
- p: Πιθανότητα επιτυχίας ανά δοκιμή. $q = 1 - p$.

ΚΟΘ De Moivre - Laplace

- S_n διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.
- n: Πλήθος δοκιμών.
- p: Πιθανότητα επιτυχίας ανά δοκιμή. $q = 1 - p$.
- $E[S_n] = np$, $Var[S_n] = npq$.

ΚΟΘ De Moivre - Laplace

- S_n διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.
- n: Πλήθος δοκιμών.
- p: Πιθανότητα επιτυχίας ανά δοκιμή. $q = 1 - p$.
- $E[S_n] = np$, $Var[S_n] = npq$.
- $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, X_n ανεξ. ισον.

ΚΟΘ De Moivre - Laplace

- S_n διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.
- n: Πλήθος δοκιμών.
- p: Πιθανότητα επιτυχίας ανά δοκιμή. $q = 1 - p$.
- $E[S_n] = np$, $Var[S_n] = npq$.
- $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, X_n ανεξ. ισον.
- ΚΟΘ $\Rightarrow S_n \simeq \mathcal{N}(np, npq)$.

ΚΟΘ De Moivre - Laplace

- S_n διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.
- n: Πλήθος δοκιμών.
- p: Πιθανότητα επιτυχίας ανά δοκιμή. $q = 1 - p$.
- $E[S_n] = np$, $Var[S_n] = npq$.
- $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, X_n ανεξ. ισον.
- ΚΟΘ $\Rightarrow S_n \simeq \mathcal{N}(np, npq)$.
- Ειδικότερα:

$$P(k \leq S_n \leq l) = P(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{l - np}{\sqrt{npq}})$$

ΚΟΘ De Moivre - Laplace

- S_n διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.
- n: Πλήθος δοκιμών.
- p: Πιθανότητα επιτυχίας ανά δοκιμή. $q = 1 - p$.
- $E[S_n] = np$, $Var[S_n] = npq$.
- $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, X_n ανεξ. ισον.
- ΚΟΘ $\Rightarrow S_n \simeq \mathcal{N}(np, npq)$.
- Ειδικότερα:

$$
\begin{aligned}
P(k \le S_n \le l) &= P(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{l - np}{\sqrt{npq}}) \\
&= P(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} \le Z_n \le \frac{l - np}{\sqrt{npq}})
\end{aligned}
$$

ΚΟΘ De Moivre - Laplace

- S_n διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p.
- n: Πλήθος δοκιμών.
- p: Πιθανότητα επιτυχίας ανά δοκιμή. $q = 1 - p$.
- $E[S_n] = np$, $Var[S_n] = npq$.
- $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, X_n ανεξ. ισον.
- ΚΟΘ $\Rightarrow S_n \simeq \mathcal{N}(np, npq)$.
- Ειδικότερα:

$$\begin{aligned}
P(k \leq S_n \leq l) &= P(\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{l-np}{\sqrt{npq}}) \\
&= P(\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq Z_n \leq \frac{l-np}{\sqrt{npq}}) \\
&\simeq \Phi(\frac{l-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}).
\end{aligned}$$

Διόρθωση συνέχειας - Ποιότητα προσέγγισης

- Αφού η διωνυμική S_n παίρνει τιμές $0, 1, 2, \ldots, n$, για οποιαδήποτε k, l τα ενδεχόμενα $\{k \leq S_n \leq l\}$, $\{k-1 < S_n < l+1\}$, $\{k \leq S_n < l + \frac{1}{2}\}$ κλπ. ταυτίζονται και επομένως έχουν ίδιες πιθανότ.

Διόρθωση συνέχειας - Ποιότητα προσέγγισης

- Αφού η διωνυμική S_n παίρνει τιμές $0, 1, 2, \ldots, n$, για οποιαδήποτε k, l τα ενδεχόμενα $\{k \leq S_n \leq l\}$, $\{k - 1 < S_n < l + 1\}$, $\{k \leq S_n < l + \frac{1}{2}\}$ κλπ. ταυτίζονται και επομένως έχουν ίδιες πιθανότ.
- Εφαρμόζοντας το ΚΟΘ παίρνουμε διαφορετ. προσεγγ.

Διόρθωση συνέχειας - Ποιότητα προσέγγισης

- Αφού η διωνυμική S_n παίρνει τιμές $0, 1, 2, \ldots, n$, για οποιαδήποτε k, l τα ενδεχόμενα $\{k \leq S_n \leq l\}$, $\{k - 1 < S_n < l + 1\}$, $\{k \leq S_n < l + \frac{1}{2}\}$ κλπ. ταυτίζονται και επομένως έχουν ίδιες πιθανότ.
- Εφαρμόζοντας το ΚΟΘ παίρνουμε διαφορετ. προσεγγ.
- Πιο ακριβής είναι η (διόρθωση συνεχείας):

$$\begin{aligned} P(k \leq S_n \leq l) &= P(k - \frac{1}{2} \leq S_n \leq l + \frac{1}{2}) \\ &= P(\frac{k - 1/2 - np}{\sqrt{npq}} \leq Z_n \leq \frac{l + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}) \end{aligned}$$

Διόρθωση συνέχειας - Ποιότητα προσέγγισης

- Αφού η διωνυμική S_n παίρνει τιμές $0, 1, 2, \ldots, n$, για οποιαδήποτε k, l τα ενδεχόμενα $\{k \leq S_n \leq l\}$, $\{k - 1 < S_n < l + 1\}$, $\{k \leq S_n < l + \frac{1}{2}\}$ κλπ. ταυτίζονται και επομένως έχουν ίδιες πιθανότ.
- Εφαρμόζοντας το ΚΟΘ παίρνουμε διαφορετ. προσεγγ.
- Πιο ακριβής είναι η (διόρθωση συνεχείας):

$$\begin{aligned}
P(k \leq S_n \leq l) &= P(k - \frac{1}{2} \leq S_n \leq l + \frac{1}{2}) \\
&= P(\frac{k - 1/2 - np}{\sqrt{npq}} \leq Z_n \leq \frac{l + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}) \\
&\simeq \Phi(\frac{l + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k - 1/2 - np}{\sqrt{npq}}).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1: Σύγκριση προσεγγίσεων

Παράδειγμα 1: Σύγκριση προσεγγίσεων

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).

Παράδειγμα 1: Σύγκριση προσεγγίσεων

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n \leq 21) =$;

Παράδειγμα 1: Σύγκριση προσεγγίσεων

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n \leq 21) =;$
- Ακριβής υπολογισμός:

Παράδειγμα 1: Σύγκριση προσεγγίσεων

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n \leq 21) =;$
- Ακριβής υπολογισμός:

$$P(S_n \leq 21) = \sum_{k=0}^{21} \binom{36}{k} (0.5)^{36} = 0.8785.$$

Παράδειγμα 1: Σύγκριση προσεγγίσεων

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n \leq 21) =$;
- Ακριβής υπολογισμός:

$$P(S_n \leq 21) = \sum_{k=0}^{21} \binom{36}{k} (0.5)^{36} = 0.8785.$$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός ΚΟΘ:

Παράδειγμα 1: Σύγκριση προσεγγίσεων

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n \leq 21) =$;
- Ακριβής υπολογισμός:

$$P(S_n \leq 21) = \sum_{k=0}^{21} \binom{36}{k} (0.5)^{36} = 0.8785.$$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός ΚΟΘ:

$$P(S_n \leq 21) \simeq \Phi\left(\frac{21 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi(1) = 0.8413.$$

Παράδειγμα 1: Σύγκριση προσεγγίσεων

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n \leq 21) =;$
- Ακριβής υπολογισμός:

$$P(S_n \leq 21) = \sum_{k=0}^{21} \binom{36}{k} (0.5)^{36} = 0.8785.$$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός ΚΟΘ:

$$P(S_n \leq 21) \simeq \Phi\left(\frac{21 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi(1) = 0.8413.$$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός ΚΟΘ με διόρθωση συνεχ.:

Παράδειγμα 1: Σύγκριση προσεγγίσεων

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n \leq 21) =;$
- Ακριβής υπολογισμός:

$$P(S_n \leq 21) = \sum_{k=0}^{21} \binom{36}{k} (0.5)^{36} = 0.8785.$$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός ΚΟΘ:

$$P(S_n \leq 21) \simeq \Phi(\frac{21 - np}{\sqrt{np(1-p)}}) = \Phi(1) = 0.8413.$$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός ΚΟΘ με διόρθωση συνεχ.:

$$P(S_n \leq 21) \simeq \Phi(\frac{21.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}) = \Phi(1.17) = 0.8790.$$

Παράδειγμα 2: Προσεγγιστικός υπολογισμός σημειακής διωνυμικής πιθανότητας

Παράδειγμα 2: Προσεγγιστικός υπολογισμός σημειακής διωνυμικής πιθανότητας

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).

Παράδειγμα 2: Προσεγγιστικός υπολογισμός σημειακής διωνυμικής πιθανότητας

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n = 19) =$;

Παράδειγμα 2: Προσεγγιστικός υπολογισμός σημειακής διωνυμικής πιθανότητας

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n = 19) =$;
- Ακριβής υπολογισμός:

Παράδειγμα 2: Προσεγγιστικός υπολογισμός σημειακής διωνυμικής πιθανότητας

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n = 19) =;$
- Ακριβής υπολογισμός:

$$P(S_n = 19) = \binom{36}{19}(0.5)^{36} = 0.1251.$$

Παράδειγμα 2: Προσεγγιστικός υπολογισμός σημειακής διωνυμικής πιθανότητας

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n = 19) =;$
- Ακριβής υπολογισμός:

$$P(S_n = 19) = \binom{36}{19}(0.5)^{36} = 0.1251.$$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός ΚΟΘ με διόρθωση συνεχ.:

Παράδειγμα 2: Προσεγγιστικός υπολογισμός σημειακής διωνυμικής πιθανότητας

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n = 19) =;$
- Ακριβής υπολογισμός:

$$P(S_n = 19) = \binom{36}{19}(0.5)^{36} = 0.1251.$$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός ΚΟΘ με διόρθωση συνεχ.:

$$P(S_n = 19) \quad = \quad P(18.5 \leq S_n \leq 19.5)$$

Παράδειγμα 2: Προσεγγιστικός υπολογισμός σημειακής διωνυμικής πιθανότητας

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n = 19) =;$
- Ακριβής υπολογισμός:

$$P(S_n = 19) = \binom{36}{19}(0.5)^{36} = 0.1251.$$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός ΚΟΘ με διόρθωση συνεχ.:

$$\begin{aligned} P(S_n = 19) &= P(18.5 \leq S_n \leq 19.5) \\ &= P(\frac{18.5 - np}{\sqrt{npq}} \leq Z_n \leq \frac{19.5 - np}{\sqrt{npq}}) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Προσεγγιστικός υπολογισμός σημειακής διωνυμικής πιθανότητας

- S_n διωνυμική κατανομή Bin(36,0.5).
- $P(S_n = 19) =;$
- Ακριβής υπολογισμός:

$$P(S_n = 19) = \binom{36}{19}(0.5)^{36} = 0.1251.$$

- Προσεγγιστικός υπολογισμός ΚΟΘ με διόρθωση συνεχ.:

$$\begin{aligned} P(S_n = 19) &= P(18.5 \le S_n \le 19.5) \\ &= P(\frac{18.5 - np}{\sqrt{npq}} \le Z_n \le \frac{19.5 - np}{\sqrt{npq}}) \\ &\simeq \Phi(\frac{19.5 - 18}{3}) - \Phi(\frac{18.5 - 18}{3}) = 0.1240. \end{aligned}$$

Άσκηση 1: Συνολικό κέρδος από ρίψεις ζαριού

Άσκηση 1: Συνολικό κέρδος από ρίψεις ζαριού

- Παίκτης ρίχνει δίκαιο ζάρι.

Άσκηση 1: Συνολικό κέρδος από ρίψεις ζαριού

- Παίκτης ρίχνει δίκαιο ζάρι.
- Ο παίκτης χάνει i όταν φέρνει i, για $i = 1, 2, 3$.

Άσκηση 1: Συνολικό κέρδος από ρίψεις ζαριού

- Παίκτης ρίχνει δίκαιο ζάρι.
- Ο παίκτης χάνει i όταν φέρνει i, για $i = 1, 2, 3$.
- Ο παίκτης κερδίζει $7 - i$ όταν φέρνει i, για $i = 4, 5, 6$.

Άσκηση 1: Συνολικό κέρδος από ρίψεις ζαριού

- Παίκτης ρίχνει δίκαιο ζάρι.
- Ο παίκτης χάνει i όταν φέρνει i, για $i = 1, 2, 3$.
- Ο παίκτης κερδίζει $7 - i$ όταν φέρνει i, για $i = 4, 5, 6$.
- Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα σε 42 ρίψεις να έχει συνολικό κέρδος τουλάχιστον 7.

Άσκηση 2: Προσδιορισμός ελάχ. αριθμού κλινών

Άσκηση 2: Προσδιορισμός ελάχ. αριθμού κλινών

- Πόλη 4000 κατοίκων.

Άσκηση 2: Προσδιορισμός ελάχ. αριθμού κλινών

- Πόλη 4000 κατοίκων.
- Κατά μέσο όρο 10 άτομα χρειάζονται νοσηλεία κάθε μέρα.

Άσκηση 2: Προσδιορισμός ελάχ. αριθμού κλινών

- Πόλη 4000 κατοίκων.
- Κατά μέσο όρο 10 άτομα χρειάζονται νοσηλεία κάθε μέρα.
- Να υπολογιστεί προσεγγιστικά ο ελάχιστος αριθμός κλινών έτσι ώστε η πόλη να εξυπηρετείται χωρίς διακομιδές ασθενών αλλού με πιθανότητα 95%.

Άσκηση 3: Εισόδημα χαρτοπαίκτη

Άσκηση 3: Εισόδημα χαρτοπαίκτη

- Το ημερήσιο εισόδημα χαρτοπαίκτη έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-5, 5]$ (σε χιλιάδες ευρώ).

Άσκηση 3: Εισόδημα χαρτοπαίκτη

- Το ημερήσιο εισόδημα χαρτοπαίκτη έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-5, 5]$ (σε χιλιάδες ευρώ).
- Να υπολογιστούν προσεγγιστικά:

Άσκηση 3: Εισόδημα χαρτοπαίκτη

- Το ημερήσιο εισόδημα χαρτοπαίκτη έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-5, 5]$ (σε χιλιάδες ευρώ).
- Να υπολογιστούν προσεγγιστικά:
    1. η πιθανότητα σε 48 ημέρες να κερδίσει τουλάχιστον 30,

Άσκηση 3: Εισόδημα χαρτοπαίκτη

- Το ημερήσιο εισόδημα χαρτοπαίκτη έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-5, 5]$ (σε χιλιάδες ευρώ).
- Να υπολογιστούν προσεγγιστικά:

  1. η πιθανότητα σε 48 ημέρες να κερδίσει τουλάχιστον 30,
  2. το ποσό s ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 95% κατ΄ απόλυτη τιμή το εισόδημά του σε 48 ημέρες να είναι $\leq s$,

Άσκηση 3: Εισόδημα χαρτοπαίκτη

- Το ημερήσιο εισόδημα χαρτοπαίκτη έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-5, 5]$ (σε χιλιάδες ευρώ).
- Να υπολογιστούν προσεγγιστικά:

  1. η πιθανότητα σε 48 ημέρες να κερδίσει τουλάχιστον 30,
  2. το ποσό s ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 95% κατ΄ απόλυτη τιμή το εισόδημά του σε 48 ημέρες να είναι $\leq s$,
  3. το πλήθος των ημερών που πρέπει να παίξει ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 95% το εισόδημά του να είναι μεταξύ του -50 και του 50.

Άσκηση 4: Δείγμα από λαμπτήρες

Άσκηση 4: Δείγμα από λαμπτήρες

- Δείγμα από $n = 49$ λαμπτήρες.

Άσκηση 4: Δείγμα από λαμπτήρες

- Δείγμα από $n = 49$ λαμπτήρες.
- Ο χρόνος ζωής κάθε λαμπτήρα είναι εκθετικός με μέση ζωή 200 ώρες.

Άσκηση 4: Δείγμα από λαμπτήρες

- Δείγμα από $n = 49$ λαμπτήρες.
- Ο χρόνος ζωής κάθε λαμπτήρα είναι εκθετικός με μέση ζωή 200 ώρες.
- Να υπολογιστούν προσεγγιστικά:

Άσκηση 4: Δείγμα από λαμπτήρες

- Δείγμα από $n = 49$ λαμπτήρες.
- Ο χρόνος ζωής κάθε λαμπτήρα είναι εκθετικός με μέση ζωή 200 ώρες.
- Να υπολογιστούν προσεγγιστικά:

  1. η πιθανότητα ο συνολικός χρόνος ζωής και των 49 λαμπτήρων να υπερβαίνει τις 10000 ώρες,

Άσκηση 4: Δείγμα από λαμπτήρες

- Δείγμα από $n = 49$ λαμπτήρες.
- Ο χρόνος ζωής κάθε λαμπτήρα είναι εκθετικός με μέση ζωή 200 ώρες.
- Να υπολογιστούν προσεγγιστικά:
  1. η πιθανότητα ο συνολικός χρόνος ζωής και των 49 λαμπτήρων να υπερβαίνει τις 10000 ώρες,
  2. η πιθανότητα το πολύ 14 από αυτούς να ζήσουν λιγότερο από 140 ώρες.

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση

- 100 άνθρωποι συμμετέχουν σε δημοσκόπηση.

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση

- 100 άνθρωποι συμμετέχουν σε δημοσκόπηση.
- Καθένας είναι υπέρ του υποψηφίου πρωθυπουργού Α με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους.

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση

- 100 άνθρωποι συμμετέχουν σε δημοσκόπηση.
- Καθένας είναι υπέρ του υποψηφίου πρωθυπουργού A με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους.
  (δηλαδή p είναι το ποσοστό των ψηφοφόρων που είναι υπέρ του A στο συνολικό πληθυσμό των εκλογέων).

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση

- 100 άνθρωποι συμμετέχουν σε δημοσκόπηση.
- Καθένας είναι υπέρ του υποψηφίου πρωθυπουργού A με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους.
(δηλαδή p είναι το ποσοστό των ψηφοφόρων που είναι υπέρ του A στο συνολικό πληθυσμό των εκλογέων).
- Βρείτε ένα προσεγγιστικό φράγμα της πιθανότητας το σφάλμα της εκτίμησης του p από το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων που είναι υπέρ του A να είναι μεγαλύτερο του 0.1.

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση

- 100 άνθρωποι συμμετέχουν σε δημοσκόπηση.
- Καθένας είναι υπέρ του υποψηφίου πρωθυπουργού A με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους.
  (δηλαδή p είναι το ποσοστό των ψηφοφόρων που είναι υπέρ του A στο συνολικό πληθυσμό των εκλογέων).
- Βρείτε ένα προσεγγιστικό φράγμα της πιθανότητας το σφάλμα της εκτίμησης του p από το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων που είναι υπέρ του A να είναι μεγαλύτερο του 0.1.
- Πόσοι τουλάχιστον πρέπει να ερωτηθούν ώστε η πιθανότητα το σφάλμα της εκτίμησης του p από το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων που είναι υπέρ του A να είναι μικρότερο του 0.01 να είναι πάνω από 0.95;

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση (συνέχεια)

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση (συνέχεια)

- Έστω M_n το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων.

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση (συνέχεια)

- Έστω M_n το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων.
- M_n έχει μέση τιμή p και διασπορά $\frac{p(1-p)}{n}$ ως δειγματικός μέσος n ανεξ. δοκιμών Bernoulli.

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση (συνέχεια)

- Έστω M_n το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων.
- M_n έχει μέση τιμή p και διασπορά $\frac{p(1-p)}{n}$ ως δειγματικός μέσος n ανεξ. δοκιμών Bernoulli.
- $P(|M_{100} - p| \geq 0.1) =$;

Άσκηση 5: Δημοσκόπηση (συνέχεια)

- Έστω M_n το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων.
- M_n έχει μέση τιμή p και διασπορά $\frac{p(1-p)}{n}$ ως δειγματικός μέσος n ανεξ. δοκιμών Bernoulli.
- $P(|M_{100} - p| \geq 0.1) = \,;$
- $n = \,;$ ώστε $P(|M_n - p| \leq 0.01) \geq 0.95$.

Πίνακας τιμών κανονικής κατανομής

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

Πίνακας τιμών κανονικής κατανομής (συνέχεια)

2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  5.4 Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
  5.6 Σύνοψη και Συζήτηση.

- Ασκήσεις:

  5.4 Προβλήματα 8, 9 10, 11
  5.6 -

  Οι ασκήσεις και τα παραδείγματα που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.