Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 6:
Οριακά θεωρήματα στη Θεωρία Πιθανοτήτων

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Πολλές φορές δεν ενδιαφέρει η ακριβής πιθανότητα ενός ενδεχομένου, αλλά το να είναι πολύ μικρή / πολύ μεγάλη.

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Πολλές φορές δεν ενδιαφέρει η ακριβής πιθανότητα ενός ενδεχομένου, αλλά το να είναι πολύ μικρή / πολύ μεγάλη.
- Π.χ. στο σχεδιασμό ενός προϊόντος θέλουμε η πιθανότητα να χαλάσει στον 1ο χρόνο να είναι $\leq 2\%$.

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Πολλές φορές δεν ενδιαφέρει η ακριβής πιθανότητα ενός ενδεχομένου, αλλά το να είναι πολύ μικρή / πολύ μεγάλη.
- Π.χ. στο σχεδιασμό ενός προϊόντος θέλουμε η πιθανότητα να χαλάσει στον 1ο χρόνο να είναι $\leq 2\%$.
- Π.χ. στο σχεδιασμό ενός εργοστασίου η πιθανότητα σοβαρού ατυχήματος να είναι κάτω από 1:1000000.

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Πολλές φορές δεν ενδιαφέρει η ακριβής πιθανότητα ενός ενδεχομένου, αλλά το να είναι πολύ μικρή / πολύ μεγάλη.
- Π.χ. στο σχεδιασμό ενός προϊόντος θέλουμε η πιθανότητα να χαλάσει στον 1ο χρόνο να είναι $\leq 2\%$.
- Π.χ. στο σχεδιασμό ενός εργοστασίου η πιθανότητα σοβαρού ατυχήματος να είναι κάτω από 1:1000000.
- Επομένως χρειαζόμαστε φράγματα για τις πιθανότητες που να είναι εύκολα υπολογίσιμα.

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Πολλές φορές δεν ενδιαφέρει η ακριβής πιθανότητα ενός ενδεχομένου, αλλά το να είναι πολύ μικρή / πολύ μεγάλη.
- Π.χ. στο σχεδιασμό ενός προϊόντος θέλουμε η πιθανότητα να χαλάσει στον 1ο χρόνο να είναι $\leq 2\%$.
- Π.χ. στο σχεδιασμό ενός εργοστασίου η πιθανότητα σοβαρού ατυχήματος να είναι κάτω από 1:1000000.
- Επομένως χρειαζόμαστε φράγματα για τις πιθανότητες που να είναι εύκολα υπολογίσιμα.
- Πολλές φορές για κάποιο χαρακτηριστικό X (=τ.μ.) ενός πειράματος τύχης έχουμε πληροφορία μόνο για την $E[X]$ και την $Var[X]$.

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Πολλές φορές δεν ενδιαφέρει η ακριβής πιθανότητα ενός ενδεχομένου, αλλά το να είναι πολύ μικρή / πολύ μεγάλη.
- Π.χ. στο σχεδιασμό ενός προϊόντος θέλουμε η πιθανότητα να χαλάσει στον 1ο χρόνο να είναι $\leq 2\%$.
- Π.χ. στο σχεδιασμό ενός εργοστασίου η πιθανότητα σοβαρού ατυχήματος να είναι κάτω από 1:1000000.
- Επομένως χρειαζόμαστε φράγματα για τις πιθανότητες που να είναι εύκολα υπολογίσιμα.
- Πολλές φορές για κάποιο χαρακτηριστικό X (=τ.μ.) ενός πειράματος τύχης έχουμε πληροφορία μόνο για την $E[X]$ και την $Var[X]$.
- Θέλουμε εκτιμήσεις πιθανοτήτων για την X που να βασίζονται μόνο σε αυτές τις περιορισμένες πληροφορίες.

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Οι ανισότητες δίνουν φράγματα για πιθανότητες που είναι εύκολα υπολογίσιμα.

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Οι ανισότητες δίνουν φράγματα για πιθανότητες που είναι εύκολα υπολογίσιμα.
- Τα οριακά θεωρήματα δίνουν προσεγγιστικούς υπολογισμούς πιθανοτήτων υπό περιορισμένες πληροφορίες, όταν ενδιαφερόμαστε για αθροίσματα ή μέσους όρους (δειγματικούς μέσους) τ.μ.

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Οι ανισότητες δίνουν φράγματα για πιθανότητες που είναι εύκολα υπολογίσιμα.
- Τα οριακά θεωρήματα δίνουν προσεγγιστικούς υπολογισμούς πιθανοτήτων υπό περιορισμένες πληροφορίες, όταν ενδιαφερόμαστε για αθροίσματα ή μέσους όρους (δειγματικούς μέσους) τ.μ.
- Πιο συγκεκριμένα τα οριακά θεωρήματα δίνουν εύκολα πληροφορίες για το άθροισμα και το μέσο όρο πολλών παρατηρήσεων του ίδιου μεγέθους:

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Οι ανισότητες δίνουν φράγματα για πιθανότητες που είναι εύκολα υπολογίσιμα.
- Τα οριακά θεωρήματα δίνουν προσεγγιστικούς υπολογισμούς πιθανοτήτων υπό περιορισμένες πληροφορίες, όταν ενδιαφερόμαστε για αθροίσματα ή μέσους όρους (δειγματικούς μέσους) τ.μ.
- Πιο συγκεκριμένα τα οριακά θεωρήματα δίνουν εύκολα πληροφορίες για το άθροισμα και το μέσο όρο πολλών παρατηρήσεων του ίδιου μεγέθους:
  $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες (ίδια κατανομή).

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Οι ανισότητες δίνουν φράγματα για πιθανότητες που είναι εύκολα υπολογίσιμα.
- Τα οριακά θεωρήματα δίνουν προσεγγιστικούς υπολογισμούς πιθανοτήτων υπό περιορισμένες πληροφορίες, όταν ενδιαφερόμαστε για αθροίσματα ή μέσους όρους (δειγματικούς μέσους) τ.μ.
- Πιο συγκεκριμένα τα οριακά θεωρήματα δίνουν εύκολα πληροφορίες για το άθροισμα και το μέσο όρο πολλών παρατηρήσεων του ίδιου μεγέθους:
  $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες (ίδια κατανομή).
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Οι ανισότητες δίνουν φράγματα για πιθανότητες που είναι εύκολα υπολογίσιμα.
- Τα οριακά θεωρήματα δίνουν προσεγγιστικούς υπολογισμούς πιθανοτήτων υπό περιορισμένες πληροφορίες, όταν ενδιαφερόμαστε για αθροίσματα ή μέσους όρους (δειγματικούς μέσους) τ.μ.
- Πιο συγκεκριμένα τα οριακά θεωρήματα δίνουν εύκολα πληροφορίες για το άθροισμα και το μέσο όρο πολλών παρατηρήσεων του ίδιου μεγέθους:
  $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες (ίδια κατανομή).
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $M_n = \frac{S_n}{n}$.

Χρησιμότητα ανισοτήτων - οριακών θεωρημάτων

- Οι ανισότητες δίνουν φράγματα για πιθανότητες που είναι εύκολα υπολογίσιμα.
- Τα οριακά θεωρήματα δίνουν προσεγγιστικούς υπολογισμούς πιθανοτήτων υπό περιορισμένες πληροφορίες, όταν ενδιαφερόμαστε για αθροίσματα ή μέσους όρους (δειγματικούς μέσους) τ.μ.
- Πιο συγκεκριμένα τα οριακά θεωρήματα δίνουν εύκολα πληροφορίες για το άθροισμα και το μέσο όρο πολλών παρατηρήσεων του ίδιου μεγέθους:
  $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες (ίδια κατανομή).
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $M_n = \frac{S_n}{n}$.
  Πως συμπεριφέρονται οι S_n και M_n για μεγάλα n;

Ανισότητα Markov

Ανισότητα Markov

- Αν μια τ.μ. X παίρνει μόνο μη-αρνητικές τιμές, τότε

Ανισότητα Markov

- Αν μια τ.μ. X παίρνει μόνο μη-αρνητικές τιμές, τότε

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}, \; a > 0.$$

Ανισότητα Chebyshev

Ανισότητα Chebyshev

- Αν μια τ.μ. X έχει μέση τιμή $E[X]$ και διασπορά $Var[X]$, τότε

Ανισότητα Chebyshev

- Αν μια τ.μ. X έχει μέση τιμή $E[X]$ και διασπορά $Var[X]$, τότε

$$P(|X - E[X]| \geq c) \leq \frac{Var[X]}{c^2}, \; c > 0.$$

Ανισότητα Chernoff

Ανισότητα Chernoff

- Αν μια τ.μ. X έχει μετασχηματισμό (ροπογεννήτρια) $M_X(s)$, τότε

Ανισότητα Chernoff

- Αν μια τ.μ. X έχει μετασχηματισμό (ροπογεννήτρια) $M_X(s)$, τότε

$$P(X \geq a) \leq \inf_{s>0} e^{-sa} M_X(s), \ a \in \mathbb{R}.$$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

- Για δυο τ.μ. X και Y ισχύουν:

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

- Για δυο τ.μ. X και Y ισχύουν:

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2],$$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

- Για δυο τ.μ. X και Y ισχύουν:

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2],$$

$$(Cov[X,Y])^2 \leq Var[X]Var[Y].$$

Ανισότητα Jensen

Ανισότητα Jensen

- Αν X τ.μ. και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή, τότε:

Ανισότητα Jensen

- Αν X τ.μ. και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή, τότε:

$$f(E[X]) \leq E[f(X)].$$

Τι συμβαίνει όταν $Var[X] = 0$;

Τι συμβαίνει όταν $Var[X] = 0$;

- Αν $Var[X] = 0$ τότε

Τι συμβαίνει όταν $Var[X] = 0$;

- Αν $Var[X] = 0$ τότε

$$X = E[X] \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \ n \geq 1,$$

ο δειγματικός μέσος τους. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε

Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \ n \geq 1,$$

ο δειγματικός μέσος τους. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \; n \geq 1,$$

ο δειγματικός μέσος τους. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

($M_n \to \mu$ κατά πιθανότητα).

Ασθενής Νόμος Μεγάλων Αριθμών

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \ n \geq 1,$$

ο δειγματικός μέσος τους. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) = 0.$$

($M_n \to \mu$ κατά πιθανότητα).

- Ο ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (ΝΜΑ) δικαιώνει την ερμηνεία της πιθανότητας ως οριακής σχετικής συχνότητας.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (1η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \ n \geq 1,$$

το άθροισμα των πρώτων n από αυτές και

$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \ n \geq 1,$$

η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (1η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \; n \geq 1,$$

το άθροισμα των πρώτων n από αυτές και

$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \; n \geq 1,$$

η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.

Τότε η συνάρτηση κατανομής της Z_n συγκλίνει στη συνάρτηση κατανομής $\Phi(z)$ της τυποποιημένης κανονικής:

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (1η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \; n \geq 1,$$
το άθροισμα των πρώτων n από αυτές και
$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \; n \geq 1,$$
η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.
Τότε η συνάρτηση κατανομής της Z_n συγκλίνει στη συνάρτηση κατανομής $\Phi(z)$ της τυποποιημένης κανονικής:
$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (2η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \; n \geq 1,$$
ο δειγματικός μέσος των πρώτων n από αυτές και
$$Z_n = \frac{M_n - E[M_n]}{\sqrt{Var[M_n]}} = \frac{\sqrt{n}(M_n - \mu)}{\sigma}, \; n \geq 1,$$
η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (2η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \ n \geq 1,$$

ο δειγματικός μέσος των πρώτων n από αυτές και

$$Z_n = \frac{M_n - E[M_n]}{\sqrt{Var[M_n]}} = \frac{\sqrt{n}(M_n - \mu)}{\sigma}, \ n \geq 1,$$

η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.
Τότε η συνάρτηση κατανομής της Z_n συγκλίνει στη συνάρτηση κατανομής $\Phi(z)$ της τυποποιημένης κανονικής:

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (2η μορφή)

- Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2,
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \ n \geq 1,$$
ο δειγματικός μέσος των πρώτων n από αυτές και
$$Z_n = \frac{M_n - E[M_n]}{\sqrt{Var[M_n]}} = \frac{\sqrt{n}(M_n - \mu)}{\sigma}, \ n \geq 1,$$
η αντίστοιχη τυποποιημένη τ.μ.
Τότε η συνάρτηση κατανομής της Z_n συγκλίνει στη συνάρτηση κατανομής $\Phi(z)$ της τυποποιημένης κανονικής:
$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Ερμηνεία του ΚΟΘ

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Τότε, για μεγάλα n

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Τότε, για μεγάλα n
  Η S_n προσεγγίζεται από μια κανονική $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Τότε, για μεγάλα n
  Η S_n προσεγγίζεται από μια κανονική $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.
  Η M_n προσεγγίζεται από μια κανονική $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Ερμηνεία του ΚΟΘ

- $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- Τότε, για μεγάλα n
  Η S_n προσεγγίζεται από μια κανονική $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.
  Η M_n προσεγγίζεται από μια κανονική $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
- Υπολογισμοί που αφορούν αθροίσματα και δειγματικούς μέσους (μέσους όρους) για μεγάλα δείγματα δεδομένων, γίνονται 'ξεχνώντας ' την κατανομή των δεδομένων και χρησιμοποιώντας την κανονική.

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- n μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιώ το ΚΟΘ για $n \geq 30$.

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- n μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιώ το ΚΟΘ για $n \geq 30$.
- $P(a \leq S_n \leq b) =;$

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- n μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιώ το ΚΟΘ για $n \geq 30$.
- $P(a \leq S_n \leq b) =$;
- Έχουμε:

$$P(a \leq S_n \leq b) \quad = \quad P(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}})$$

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- n μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιώ το ΚΟΘ για $n \geq 30$.
- $P(a \leq S_n \leq b) =;$
- Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
P(a \leq S_n \leq b) &= P(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) \\
&= P(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq Z_n \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}})
\end{aligned}
$$

ΚΟΘ - Τρόπος εργασίας

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- n μεγάλο. Πρακτικά χρησιμοποιώ το ΚΟΘ για $n \geq 30$.
- $P(a \leq S_n \leq b) =;$
- Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(a \leq S_n \leq b) &= P(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) \\ &= P(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq Z_n \leq \frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) \\ &\simeq \Phi(\frac{b - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) - \Phi(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}). \end{aligned}$$

Άσκηση 1: Συνολικό φορτίο αεροπλάνου

Άσκηση 1: Συνολικό φορτίο αεροπλάνου

- 100 πακέτα φορτώνονται σε ένα αεροπλάνο.

Άσκηση 1: Συνολικό φορτίο αεροπλάνου

- 100 πακέτα φορτώνονται σε ένα αεροπλάνο.
- Τα βάρη των πακέτων είναι ανεξ. ισον. τ.μ.

Άσκηση 1: Συνολικό φορτίο αεροπλάνου

- 100 πακέτα φορτώνονται σε ένα αεροπλάνο.
- Τα βάρη των πακέτων είναι ανεξ. ισον. τ.μ.
- Το βάρος ενός πακέτου έχει την ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 5 και 50 κιλών.

Άσκηση 1: Συνολικό φορτίο αεροπλάνου

- 100 πακέτα φορτώνονται σε ένα αεροπλάνο.
- Τα βάρη των πακέτων είναι ανεξ. ισον. τ.μ.
- Το βάρος ενός πακέτου έχει την ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 5 και 50 κιλών.
- Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το συνολικό φορτίο των 100 πακέτων να ξεπερνά σε βάρος τους 3 τόνους.

Άσκηση 1: Συνολικό φορτίο αεροπλάνου

- 100 πακέτα φορτώνονται σε ένα αεροπλάνο.
- Τα βάρη των πακέτων είναι ανεξ. ισον. τ.μ.
- Το βάρος ενός πακέτου έχει την ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 5 και 50 κιλών.
- Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το συνολικό φορτίο των 100 πακέτων να ξεπερνά σε βάρος τους 3 τόνους.
- $\mu = 27.5$, $\sigma^2 = \frac{(50-5)^2}{12} = 168.75$,
  $z = \frac{3000-100\cdot 27.5}{\sqrt{168.75\cdot 100}} = 1.92$, $\Phi(1.92) = 0.9726$.

Άσκηση 2: Συνολική παραγωγή σε καθορ. χρόνο

- Μηχανή επεξεργάζεται εξαρτήματα σειριακά.

Άσκηση 2: Συνολική παραγωγή σε καθορ. χρόνο

- Μηχανή επεξεργάζεται εξαρτήματα σειριακά.
- Οι χρονοι επεξεργ. των εξαρτημάτων ανεξ. ισον. τ.μ.

Άσκηση 2: Συνολική παραγωγή σε καθορ. χρόνο

- Μηχανή επεξεργάζεται εξαρτήματα σειριακά.
- Οι χρονοι επεξεργ. των εξαρτημάτων ανεξ. ισον. τ.μ.
- Ο χρόνος επεξεργασίας ενός εξαρτήματος έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $[1, 5]$.

Άσκηση 2: Συνολική παραγωγή σε καθορ. χρόνο

- Μηχανή επεξεργάζεται εξαρτήματα σειριακά.
- Οι χρονοι επεξεργ. των εξαρτημάτων ανεξ. ισον. τ.μ.
- Ο χρόνος επεξεργασίας ενός εξαρτήματος έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $[1, 5]$.
- Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα ο αριθμός των εξαρτημάτων που παράγεται σε 320 χρονικές μονάδες να είναι τουλάχιστον 100.

Άσκηση 2: Συνολική παραγωγή σε καθορ. χρόνο

- Μηχανή επεξεργάζεται εξαρτήματα σειριακά.
- Οι χρονοι επεξεργ. των εξαρτημάτων ανεξ. ισον. τ.μ.
- Ο χρόνος επεξεργασίας ενός εξαρτήματος έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $[1, 5]$.
- Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα ο αριθμός των εξαρτημάτων που παράγεται σε 320 χρονικές μονάδες να είναι τουλάχιστον 100.
- $\mu = 3$, $\sigma^2 = \frac{(5-1)^2}{12} = \frac{4}{3}$, $z = \frac{320-300}{\sqrt{100 \cdot 4/3}} = 1.73$, $\Phi(1.73) = 0.9582$.

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση

- 100 άνθρωποι συμμετέχουν σε δημοσκόπηση.

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση

- 100 άνθρωποι συμμετέχουν σε δημοσκόπηση.
- Καθένας είναι υπέρ του υποψηφίου πρωθυπουργού Α με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους.

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση

- 100 άνθρωποι συμμετέχουν σε δημοσκόπηση.
- Καθένας είναι υπέρ του υποψηφίου πρωθυπουργού Α με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους.
  (δηλαδή p είναι το ποσοστό των ψηφοφόρων που είναι υπέρ του Α στο συνολικό πληθυσμό των εκλογέων).

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση

- 100 άνθρωποι συμμετέχουν σε δημοσκόπηση.
- Καθένας είναι υπέρ του υποψηφίου πρωθυπουργού Α με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους.
  (δηλαδή p είναι το ποσοστό των ψηφοφόρων που είναι υπέρ του Α στο συνολικό πληθυσμό των εκλογέων).
- Βρείτε ένα προσεγγιστικό φράγμα της πιθανότητας το σφάλμα της εκτίμησης του p από το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων που είναι υπέρ του Α να είναι μεγαλύτερο του 0.1.

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση

- 100 άνθρωποι συμμετέχουν σε δημοσκόπηση.
- Καθένας είναι υπέρ του υποψηφίου πρωθυπουργού A με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους άλλους.
  (δηλαδή p είναι το ποσοστό των ψηφοφόρων που είναι υπέρ του A στο συνολικό πληθυσμό των εκλογέων).
- Βρείτε ένα προσεγγιστικό φράγμα της πιθανότητας το σφάλμα της εκτίμησης του p από το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων που είναι υπέρ του A να είναι μεγαλύτερο του 0.1.
- Πόσοι τουλάχιστον πρέπει να ερωτηθούν ώστε η πιθανότητα το σφάλμα της εκτίμησης του p από το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων που είναι υπέρ του A να είναι μικρότερο του 0.01 να είναι πάνω από 0.95;

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση (συνέχεια)

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση (συνέχεια)

- Έστω M_n το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων.

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση (συνέχεια)

- Έστω M_n το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων.
- M_n έχει μέση τιμή p και διασπορά $\frac{p(1-p)}{n}$ ως δειγματικός μέσος n ανεξ. δοκιμών Bernoulli.

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση (συνέχεια)

- Έστω M_n το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων.
- M_n έχει μέση τιμή p και διασπορά $\frac{p(1-p)}{n}$ ως δειγματικός μέσος n ανεξ. δοκιμών Bernoulli.
- $P(|M_{100} - p| \geq 0.1) =$;

Άσκηση 3: Δημοσκόπηση (συνέχεια)

- Έστω M_n το δειγματικό ποσοστό των υποψηφίων.
- M_n έχει μέση τιμή p και διασπορά $\frac{p(1-p)}{n}$ ως δειγματικός μέσος n ανεξ. δοκιμών Bernoulli.
- $P(|M_{100} - p| \geq 0.1) = ;$
- $n = ;$ ώστε $P(|M_n - p| \leq 0.01) \geq 0.95$.

Πίνακας τιμών κανονικής κατανομής

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

Πίνακας τιμών κανονικής κατανομής (συνέχεια)

2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:
  - 5.1 Ανισότητες Markov και Chebyshev
  - 5.2 Ο Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών
  - 5.4 Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
  - 5.6 Σύνοψη και Συζήτηση.
- Ασκήσεις:
  - 5.1 -
  - 5.2 -
  - 5.4 Προβλήματα 9, 10, 11
  - 5.6 -

Τέλος Διαλέξεως

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.