Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 5:
Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Συνδιακύμανση - Ορισμός

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
- Αν $Cov[X, Y] = 0$, οι X, Y λέγονται ασυσχέτιστες.

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
- Αν $Cov[X,Y] = 0$, οι X, Y λέγονται ασυσχέτιστες.
- Αν $Cov[X,Y] > 0$, οι X, Y λέγονται θετικά συσχετισμένες.

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
- Αν $Cov[X, Y] = 0$, οι X, Y λέγονται ασυσχέτιστες.
- Αν $Cov[X, Y] > 0$, οι X, Y λέγονται θετικά συσχετισμένες.
- Αν $Cov[X, Y] < 0$, οι X, Y λέγονται αρνητικά συσχετισμένες.

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
- Αν $Cov[X, Y] = 0$, οι X, Y λέγονται ασυσχέτιστες.
- Αν $Cov[X, Y] > 0$, οι X, Y λέγονται θετικά συσχετισμένες.
- Αν $Cov[X, Y] < 0$, οι X, Y λέγονται αρνητικά συσχετισμένες.
- Το πρόσημο της $Cov[X, Y]$ δίνει κάποια σημαντική πληροφορία για την εξάρτηση των X, Y.

Συνδιακύμανση - Ορισμός

- (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνδιακύμανση (ή συνδιασπορά) των X, Y ορίζεται ως: $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.
- Αν $Cov[X, Y] = 0$, οι X, Y λέγονται ασυσχέτιστες.
- Αν $Cov[X, Y] > 0$, οι X, Y λέγονται θετικά συσχετισμένες.
- Αν $Cov[X, Y] < 0$, οι X, Y λέγονται αρνητικά συσχετισμένες.
- Το πρόσημο της $Cov[X, Y]$ δίνει κάποια σημαντική πληροφορία για την εξάρτηση των X, Y.
- Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού: $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.
- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.
- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$.
- $Cov[X, aY + b] = aCov[X, Y]$.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X,X] = Var[X]$.
- $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$.
- $Cov[X,aY+b] = aCov[X,Y]$.
- $Cov[X,Y+Z] = Cov[X,Y] + Cov[X,Z]$.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.
- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$.
- $Cov[X, aY + b] = aCov[X, Y]$.
- $Cov[X, Y + Z] = Cov[X, Y] + Cov[X, Z]$.
- X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ X, Y ασυσχέτιστες.

Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

- $Cov[X, X] = Var[X]$.
- $Cov[X, Y] = Cov[Y, X]$.
- $Cov[X, aY + b] = aCov[X, Y]$.
- $Cov[X, Y + Z] = Cov[X, Y] + Cov[X, Z]$.
- X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ X, Y ασυσχέτιστες.
- Προσοχή! Το αντίστροφο δεν ισχύει:
  X, Y ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ X, Y ανεξάρτητες.

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή με τιμές $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}$ η καθεμιά.

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή με τιμές $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}$ η καθεμιά.
- $Cov[X, Y] = 0$

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή με τιμές $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}$ η καθεμιά.
- $Cov[X, Y] = 0$
- X, Y όχι ανεξάρτητες.

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή με τιμές $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}$ η καθεμιά.
- $Cov[X, Y] = 0$
- X, Y όχι ανεξάρτητες.
- Είναι μια περίπτωση που $E[X|Y = y]$ ανεξάρτητη του y.

Παράδειγμα: Ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ Ανεξάρτητες.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή με τιμές $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$ με πιθανότητες $\frac{1}{4}$ η καθεμιά.
- $Cov[X, Y] = 0$
- X, Y όχι ανεξάρτητες.
- Είναι μια περίπτωση που $E[X|Y = y]$ ανεξάρτητη του y.
- Όμως $f_{X|Y}(x|y)$ όχι ανεξάρτητη του y.

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

- Έχουμε δει ότι:

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

- Έχουμε δει ότι:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

- Έχουμε δει ότι:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
  Όμως γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

- Έχουμε δει ότι:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
  Όμως γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Γενικά ισχύει ότι:

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y].$$

Διασπορά αθροίσματος τ.μ.

- Έχουμε δει ότι:
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
  Όμως γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Γενικά ισχύει ότι:
  $$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y].$$
- Για n τυχαίες μεταβλητές:
  $$Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov[X_i, X_j].$$

Συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης - Ορισμός

Συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης - Ορισμός

- Ο συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης δυο τ.μ. X, Y ορίζεται ως

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}.$$

Συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης - Ορισμός

- Ο συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης δυο τ.μ. X, Y ορίζεται ως
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}.$$
- Κανονικοποιημένη εκδοχή της $Cov[X,Y]$.

Συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης - Ορισμός

- Ο συντελεστής (γραμμικής) συσχέτισης δυο τ.μ. X, Y ορίζεται ως
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}.$$
- Κανονικοποιημένη εκδοχή της $Cov[X,Y]$.
- Ο $\rho(X,Y)$ είναι καθαρός αριθμός. Δεν εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης των X, Y.

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.
- $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c > 0$

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.
- $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c > 0$ (Οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες).

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.
- $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c > 0$ (Οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες).
- $\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c < 0$

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.
- $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c > 0$ (Οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες).
- $\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c < 0$ (Οι X, Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες).

Συντελεστής (γραμ.) συσχέτισης - Ιδιότητες

- $\rho(aX, bY) = (\text{πρόσημο του } ab) \cdot \rho(X, Y)$.
- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
- $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες.
- $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c > 0$ (Οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες).
- $\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow Y - E[Y] = c(X - E[X])$ με $c < 0$ (Οι X, Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες).
- Προσοχή! Ο $\rho(X, Y)$ δεν είναι γραμμικός τελεστής: Γενικά $\rho(X, Y + Z) \neq \rho(X, Y) + \rho(X, Z)$.

Μετασχηματισμοί - Ορισμός

Μετασχηματισμοί - Ορισμός

- Ο μετασχηματισμός (ροπογεννήτρια) μιας τ.μ. X ορίζεται ως η συνάρτηση της πραγματικής παραμέτρου s
$$M_X(s) = E[e^{sX}].$$

Μετασχηματισμοί - Ορισμός

- Ο μετασχηματισμός (ροπογεννήτρια) μιας τ.μ. X ορίζεται ως η συνάρτηση της πραγματικής παραμέτρου s
$$M_X(s) = E[e^{sX}].$$
- Για X διακριτή τ.μ με σμπ. $p_X(x)$ είναι:
$$M_X(s) = \sum_x e^{sx} p_X(x).$$

Μετασχηματισμοί - Ορισμός

- Ο μετασχηματισμός (ροπογεννήτρια) μιας τ.μ. X ορίζεται ως η συνάρτηση της πραγματικής παραμέτρου s
$$M_X(s) = E[e^{sX}].$$
- Για X διακριτή τ.μ με σμπ. $p_X(x)$ είναι:
$$M_X(s) = \sum_x e^{sx} p_X(x).$$
- Για X συνεχή τ.μ με σππ. $f_X(x)$ είναι:
$$M_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx.$$

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή.

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. $\Downarrow$

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $\Downarrow$
  $M_{S_n}(s) = M_{X_1}(s) M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$.

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $\Downarrow$
  $M_{S_n}(s) = M_{X_1}(s) M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$.
- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ., ισόνομες, $N \geq 0$, ακέρ., ανεξ. των X_i,
  $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $\Downarrow$
  $M_{S_n}(s) = M_{X_1}(s) M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$.
- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ., ισόνομες, $N \geq 0$, ακέρ., ανεξ. των X_i,
  $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.
  $\Downarrow$

Μετασχηματισμοί - Ιδιότητες

- $M_X(s) = M_Y(s)$ για $s \in [-a, a] \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή. (ο μετασχ. προσδιορ. μονοσήμ. την κατανομή μιας τ.μ.).
- $E[X^n] = \frac{d^n}{ds^n} M(s)\Big|_{s=0}$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες,
  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
  $\Downarrow$
  $M_{S_n}(s) = M_{X_1}(s) M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$.
- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ., ισόνομες, $N \geq 0$, ακέρ., ανεξ. των X_i,
  $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.
  $\Downarrow$
  $M_{S_N}(s) = M_N(\ln M_X(s))$.

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(2) = \frac{1}{2}, p_X(3) = \frac{1}{6}, p_X(5) = \frac{1}{3}.$$

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(2) = \frac{1}{2}, p_X(3) = \frac{1}{6}, p_X(5) = \frac{1}{3}.$$

- Μετασχηματισμός της X: ;

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(2) = \frac{1}{2}, p_X(3) = \frac{1}{6}, p_X(5) = \frac{1}{3}.$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ;

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(2) = \frac{1}{2}, p_X(3) = \frac{1}{6}, p_X(5) = \frac{1}{3}.$$
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

Παράδειγμα 1: Μετασχηματισμός διακριτής τ.μ

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(2) = \frac{1}{2}, p_X(3) = \frac{1}{6}, p_X(5) = \frac{1}{3}.$$
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;
$$M_X(s) = \frac{1}{2}e^{2s} + \frac{1}{6}e^{3s} + \frac{1}{3}e^{5s}.$$

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\ x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \ x = 0, 1, 2, \ldots .$$

- Μετασχηματισμός της X: ;

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},\ x = 0, 1, 2, \ldots.$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ;

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \ x = 0, 1, 2, \ldots .$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

Παράδειγμα 2: Μετασχηματισμός τ.μ. Poisson

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \ x = 0, 1, 2, \ldots.$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

$$M_X(s) = e^{\lambda(e^s-1)}.$$

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \;\; x = 1, 2, \ldots.$$

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \ x = 1, 2, \ldots .$$
- Μετασχηματισμός της X: ;

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \ x = 1, 2, \ldots.$$
- Μετασχηματισμός της X: ; ;

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \;\; x = 1, 2, \ldots .$$
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

Παράδειγμα 3: Μετασχηματισμός γεωμετρικής τ.μ.

- X διακριτή τ.μ. με σμπ.

$$p_X(x) = (1-p)^{x-1}p, \ x = 1, 2, \ldots .$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

$$M_X(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}.$$

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

- X συνεχής τ.μ. με σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

- X συνεχής τ.μ. με σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$
- Μετασχηματισμός της X: ;

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

- X συνεχής τ.μ. με σππ.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ;

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

- X συνεχής τ.μ. με σππ.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

Παράδειγμα 4: Μετασχηματισμός εκθετικής τ.μ

- X συνεχής τ.μ. με σππ.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0.$$

- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

$$M_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}.$$

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.
$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$
- Μετασχηματισμός της Y: ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.
$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$
- Μετασχηματισμός της Y: ; ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.
$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},\ y \in \mathbb{R}.$$
- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.
$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$
- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;
$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$
- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Μετασχηματισμός της X: ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Μετασχηματισμός της X: ; ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.
$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \ y \in \mathbb{R}.$$
- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;
$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$
- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.
$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \in \mathbb{R}.$$
- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;
$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$
- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;
$X = \sigma Y + \mu \Rightarrow$

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός κανονικής τ.μ

- Y τυποποιημένη κανονική τ.μ. με σππ.

$$\phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \ y \in \mathbb{R}.$$

- Μετασχηματισμός της Y: ; ; ;

$$M_Y(s) = e^{\frac{s^2}{2}}.$$

- X κανονική τ.μ. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Μετασχηματισμός της X: ; ; ;
  $X = \sigma Y + \mu \Rightarrow$

$$M_Y(s) = e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2} + \mu s}.$$

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(n,p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(m,p)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$

- $X \sim$ Διωνυμ. $\text{Bin}(n, p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\text{Bin}(m, p)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim$ Διωνυμική $\text{Bin}(n + m, p)$.

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(n,p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(m,p)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ $X + Y \sim$ Διωνυμική $\mathrm{Bin}(n+m,p)$.
- $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(n, p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\mathrm{Bin}(m, p)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ $X + Y \sim$ Διωνυμική $\mathrm{Bin}(n + m, p)$.
- $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ $X + Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda + \mu)$.

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. Bin(n, p) και $Y \sim$ Διωνυμ. Bin(m, p),
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim$ Διωνυμική Bin$(n + m, p)$.
- $X \sim$ Poisson(λ) και $Y \sim$ Poisson(μ),
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim$ Poisson$(\lambda + \mu)$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$,
  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$

Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

- $X \sim$ Διωνυμ. $\text{Bin}(n, p)$ και $Y \sim$ Διωνυμ. $\text{Bin}(m, p)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim$ Διωνυμική $\text{Bin}(n + m, p)$.
- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$
  $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- X= Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X=n) = P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = \frac{1}{n!}$.

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- X= Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] = 1$

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X=n)=P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$)=\frac{1}{n!}$.
- $P(X=0)=P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X]=1$
- $Var[X]=;$

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X=n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X=0) = P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] = 1$
- $Var[X] =$; ;

Άσκηση 1: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] = 1$
- $Var[X] = ;\ ;\ ;$

Άσκηση 2: Γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών

Άσκηση 2: Γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών

- Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παράμετρο λ και σππ.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

Άσκηση 2: Γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών

- Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παράμετρο λ και σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$
- Έστω N τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$, με γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, δηλαδή σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p,\ x = 1, 2, \ldots.$$

Άσκηση 2: Γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών

- Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παράμετρο λ και σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0.$$
- Έστω N τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$, με γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, δηλαδή σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p, \ x = 1, 2, \ldots.$$
- $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Άσκηση 2: Γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών

- Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. με παράμετρο λ και σππ.
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0.$$
- Έστω N τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$, με γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, δηλαδή σμπ.
$$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p, \ x = 1, 2, \ldots.$$
- $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.
- Τι κατανομή ακολουθεί η S_N ;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  4.2 Συνδιασπορά και συσχέτιση
  4.3 Δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά
  4.4 Μετασχηματισμοί

- Ασκήσεις:

  4.2 Προβλήματα 17, 18
  4.3 -
  4.4 Προβλήματα 29, 31, 36
  Οι ασκήσεις και τα παραδείγματα που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.