Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 5:
Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x, y)$, αν

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x, y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$,

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int \int_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int \int_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y) dx dy$,
     για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Η $f_{X,Y}(x,y)$ είναι πυκνότητα: Για μικρά $\delta x, \delta y$ είναι $P(x \leq X \leq x + \delta x, y \leq Y \leq y + \delta y) \simeq f_{X,Y}(x,y) \delta x \delta y$.

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int \int_{(x,y) \in B} f_{X,Y}(x,y) dx dy$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Η $f_{X,Y}(x,y)$ είναι πυκνότητα: Για μικρά $\delta x, \delta y$ είναι $P(x \leq X \leq x + \delta x, y \leq Y \leq y + \delta y) \simeq f_{X,Y}(x,y) \delta x \delta y$.
- Ιδιότητες:

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
    1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
    2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$,
    3. $P((X,Y) \in B) = \int\int_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y) dx dy$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Η $f_{X,Y}(x,y)$ είναι πυκνότητα: Για μικρά $\delta x, \delta y$ είναι $P(x \leq X \leq x + \delta x, y \leq Y \leq y + \delta y) \simeq f_{X,Y}(x,y)\delta x \delta y$.
- Ιδιότητες:
    1. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y) dx dy$

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int\int_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$, για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Η $f_{X,Y}(x,y)$ είναι πυκνότητα: Για μικρά $\delta x, \delta y$ είναι $P(x \leq X \leq x+\delta x, y \leq Y \leq y+\delta y) \simeq f_{X,Y}(x,y)\delta x \delta y$.
- Ιδιότητες:
  1. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)dxdy$
  2. $P(X \in A) = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx$.

Διδιάστατη συνεχής τ.μ.

- Μια διδιάστατη τυχαία μεταβλητή λέγεται συνεχής με από κοινού σππ. $f_{X,Y}(x,y)$, αν
  1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ για κάθε x, y,
  2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$,
  3. $P((X,Y) \in B) = \int\int_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$,
     για κάθε ενδεχόμενο $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Η $f_{X,Y}(x,y)$ είναι πυκνότητα: Για μικρά $\delta x, \delta y$ είναι $P(x \leq X \leq x+\delta x, y \leq Y \leq y+\delta y) \simeq f_{X,Y}(x,y)\delta x\delta y$.
- Ιδιότητες:
  1. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)dxdy$
  2. $P(X \in A) = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx$.
  3. $P(Y \in A) = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy$.

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$:

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$: Περιθώρια σππ. της X.

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$:
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$: Περιθώρια σππ. της X.
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$: Περιθώρια σππ. της Y.

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σπп. $f_{X,Y}(x, y)$:
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$: Περιθώρια σππ. της X.
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$: Περιθώρια σππ. της Y.
- Τότε:

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$:
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$: Περιθώρια σππ. της X.
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$: Περιθώρια σππ. της Y.
- Τότε:
  $P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$.

Περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας

- Δοθείσης μιας διδιάστ. τ.μ. (X, Y) με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$:
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$: Περιθώρια σππ. της X.
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$: Περιθώρια σππ. της Y.
- Τότε:
  $P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$.
  $P(Y \in A) = \int_A f_Y(y)dy$.

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ.

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ.
- Από κοινού σκ.: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ.
- Από κοινού σκ.: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.
- Σχέση σκ. και σππ:

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ.
- Από κοινού σκ.: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.
- Σχέση σκ. και σππ:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, t) dt ds.$$

Από κοινού συναρτήσεις κατανομής

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ.
- Από κοινού σκ.: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.
- Σχέση σκ. και σππ:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, t) dt ds.$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Μέση τιμή

Μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.

Μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $g(x, y)$ συνάρτηση.

Μέση τιμή

- (X,Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x,y)$.
- $g(x,y)$ συνάρτηση.
- Ισχύει ο ανάλογος τύπος με τις διακριτές:
  $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy$.

Μέση τιμή

- (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y}(x, y)$.
- $g(x, y)$ συνάρτηση.
- Ισχύει ο ανάλογος τύπος με τις διακριτές:
  $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dxdy$.
- Ισχύει η γραμμικότητα:
  $E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$.

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν
$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν
$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$
- Ορίζονται ανάλογα οι περιθώριες. Π.χ.
$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dz.$$

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν
$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$
- Ορίζονται ανάλογα οι περιθώριες. Π.χ.
$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dz.$$
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dydz.$$

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν

$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$

- Ορίζονται ανάλογα οι περιθώριες. Π.χ.

$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dz.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dydz.$$

- Ανάλογες ιδιότητες για τη μέση τιμή. Π.χ.

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν
$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$
- Ορίζονται ανάλογα οι περιθώριες. Π.χ.
$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dz.$$
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dydz.$$
- Ανάλογες ιδιότητες για τη μέση τιμή. Π.χ.
$E[g(X, Y, Z)]$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z)f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$

Γενίκευση: Περισσότερες από δύο τ.μ.

- Η (X, Y, Z) είναι συνεχής τ.μ. με σππ. $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ αν
$$P((X, Y, Z) \in B) = \int\int\int_{(x,y,z)\in B} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$$
- Ορίζονται ανάλογα οι περιθώριες. Π.χ.
$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dz.$$
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z)dydz.$$
- Ανάλογες ιδιότητες για τη μέση τιμή. Π.χ.
$E[g(X, Y, Z)]$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, z)f_{X,Y,Z}(x, y, z)dxdydz.$
$E[aX + bY + cZ + d] = aE[X] + bE[Y] + cE[Z] + d.$

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c = \,;$

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X,Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}) =$;

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c = ;$
- $f_X(x) = ;$
- $f_Y(x) = ;$
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}) = ;$
- $E[XY] = ;$

Άσκηση 1: Σππ. σε ορθογώνιο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}) =$;
- $E[XY] =$;
- $F_{X,Y}(x,y) =$;

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \le x \le y \le 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X,Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c = ;$
- $f_X(x) = ;$
- $f_Y(x) = ;$
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}) = ;$

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $f_X(x) =$;
- $f_Y(x) =$;
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}) =$;
- $E[XY] =$;

Άσκηση 2: Σππ. σε τρίγωνο.

- Δίνεται η συνεχής τ.μ. (X, Y) με σππ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & \text{αν } 0 \le x \le y \le 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c = ;$
- $f_X(x) = ;$
- $f_Y(x) = ;$
- $P(X > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \le Y \le \frac{2}{3}) = ;$
- $E[XY] = ;$
- $F_{X,Y}(x,y) = ;$

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Ειδική περίπτωση:

Δέσμευση σε ενδεχόμενο

- Η δεσμευμένη σππ μια συνεχούς τ.μ. X δεδομένου ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως μια $f_{X|A}(x)$ με $f_X(x) \geq 0$ ώστε
$$P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx.$$
- Ιδιότητες:
  1. $f_{X|A}(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Ειδική περίπτωση:
$$f_{X|\{X\in A\}}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X\in A)}, & \text{αν } x \in A, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**
  X συνεχής τ.μ. και
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**
  X συνεχής τ.μ. και
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) f_{X|A_i}(x).$$

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) =$;

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}, \; t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) =$; ;

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}, \; t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) = \; ; \; ; \; ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$
(Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) = ;\ ;\ ; = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.
- $f_{X|A}(x) = f_T(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.

Παράδειγμα 1: Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής

- T εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ.
- Π.χ. T μοντελοποιεί το χρόνο ζωής λαμπτήρα.
- Σππ: $f_T(x) = \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0$.
- Σ.κ: $F_T(x) = P(T \leq x) = 1 - e^{-\lambda t},\ t > 0$.
- Έστω ότι έχει πραγματοπ. το γεγονός $A = \{T > t\}$ (Ο λαμπτήρας λειτουργεί τη στιγμή t).
- $X = T - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του λαμπτήρα.
- $P(X > x | T > t) =\ ;\ ;\ ;\ = e^{-\lambda x} = P(T > x)$.
- $f_{X|A}(x) = f_T(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.
- Αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής: Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι ανεξάρτητος από την ηλικία.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τέταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τεταρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)$= ; ;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$; ; ;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$; ; ;
- $P(Y\leq 10)=$;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10 - 7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$; ;

Παράδειγμα 2: Χρόνος στη στάση

- Τα τρένα του μετρό περνάνε σε ένα σταθμό κάθε τετάρτο, αρχίζοντας από τις $6:00$.
- Ένας επιβάτης φθάνει σε χρόνο χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $7:10-7:30$.
- Έστω Y ο χρόνος αναμονής του ως το επόμενο τρένο.
- Σππ. $f_Y(y)=$; ; ;
- $P(Y \leq 10) =$; ; ;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:
  - 3.4 Από κοινού σπп πολλαπλών τυχαίων μεταβλητών
  - 3.5 Δέσμευση
- Ασκήσεις:
  - 3.4 Πρόβλημα 15
  - 3.5 Πρόβλημα 18

  Οι ασκήσεις και τα παραδείγματα που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.

Τέλος Διαλέξεως

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.