Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 4:
Τυχαίες τυχαίες μεταβλητές

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Ορισμός κανονικής τ.μ.

Ορισμός κανονικής τ.μ.

- Μια συνεχής τ.μ. X λέγεται κανονική ή Γκαουσιανή με παραμέτρους μ, σ^2, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, αν έχει σππ.
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in (-\infty, \infty).$$

Ορισμός κανονικής τ.μ.

- Μια συνεχής τ.μ. X λέγεται κανονική ή Γκαουσιανή με παραμέτρους μ, σ^2, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, αν έχει σππ.
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in (-\infty, \infty).$$
- μ, σ^2: αριθμητικές παράμετροι με $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma \in (0, \infty)$.

Ορισμός κανονικής τ.μ.

- Μια συνεχής τ.μ. X λέγεται κανονική ή Γκαουσιανή με παραμέτρους μ, σ^2, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, αν έχει σππ.
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in (-\infty, \infty).$$
- μ, σ^2: αριθμητικές παράμετροι με $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma \in (0, \infty)$.
- Η $f_X(x)$ είναι πράγματι σππ:
$$f_X(x) \geq 0, \; x \in (-\infty, \infty),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

Ορισμός κανονικής τ.μ.

- Μια συνεχής τ.μ. X λέγεται κανονική ή Γκαουσιανή με παραμέτρους μ, σ^2, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, αν έχει σππ.
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in (-\infty, \infty).$$
- μ, σ^2: αριθμητικές παράμετροι με $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma \in (0, \infty)$.
- Η $f_X(x)$ είναι πράγματι σππ:
$$f_X(x) \geq 0, \; x \in (-\infty, \infty),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$$
- $E[X] = \mu$ και $Var[X] = \sigma^2$.

Σημασία των κανονικών τ.μ.

Σημασία των κανονικών τ.μ.

- Οι κανονικές τ.μ. μοντελοποιούν καλά ποσότητες που προκύπτουν από το αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών ανεξάρτητων παραγόντων.

Σημασία των κανονικών τ.μ.

- Οι κανονικές τ.μ. μοντελοποιούν καλά ποσότητες που προκύπτουν από το αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών ανεξάρτητων παραγόντων.
- Έτσι μοντελοποιούν καλά μεγέθη όπως σφάλματα μετρήσεων, αποδόσεις σε εξετάσεις, σωματομετρικά δεδομένα (ύψος, βάρος κλπ.), οικονομικά δεδομένα.

Σημασία των κανονικών τ.μ.

- Οι κανονικές τ.μ. μοντελοποιούν καλά ποσότητες που προκύπτουν από το αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών ανεξάρτητων παραγόντων.
- Έτσι μοντελοποιούν καλά μεγέθη όπως σφάλματα μετρήσεων, αποδόσεις σε εξετάσεις, σωματομετρικά δεδομένα (ύψος, βάρος κλπ.), οικονομικά δεδομένα.
- Η σημασία τους έγκειται στο περίφημο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα: Το άθροισμα μεγάλου πλήθους ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. ακολουθεί προσεγγιστικά κανονική κατανομή, όποιες και να είναι οι τ.μ.- προσθεταίοι.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

- Η γραμμική συνάρτηση μιας κανονικής τ.μ. είναι κανονική τ.μ.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

- Η γραμμική συνάρτηση μιας κανονικής τ.μ. είναι κανονική τ.μ.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

- Η γραμμική συνάρτηση μιας κανονικής τ.μ. είναι κανονική τ.μ.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Ειδικότερα:

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

- Η γραμμική συνάρτηση μιας κανονικής τ.μ. είναι κανονική τ.μ.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Ειδικότερα:
  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}} = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

- Η γραμμική συνάρτηση μιας κανονικής τ.μ. είναι κανονική τ.μ.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Ειδικότερα:
  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}} = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Δοθείσης μιας κανονικής τ.μ. X, η $\frac{X-E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$ αναφέρεται ως η αντίστοιχη τυποποιημένη της X.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

- Η γραμμική συνάρτηση μιας κανονικής τ.μ. είναι κανονική τ.μ.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Ειδικότερα:
  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}} = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Δοθείσης μιας κανονικής τ.μ. X, η $\frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$ αναφέρεται ως η αντίστοιχη τυποποιημένη της X.
- Όλοι οι υπολογισμοί πιθανοτήτων που αφορούν μια κανονική τ.μ. μπορούν αν γίνουν μέσω της $\mathcal{N}(0, 1)$.

Τυποποιημένη κανονική

Τυποποιημένη κανονική

- Μια τ.μ. $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ λέγεται τυποποιημένη κανονική.

Τυποποιημένη κανονική

- Μια τ.μ. $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ λέγεται τυποποιημένη κανονική.
- Η συνάρτηση κατανομής της συμβολίζεται με $\Phi(y)$:

$$\Phi(y) = P(Y \leq y) = P(Y < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Τυποποιημένη κανονική

- Μια τ.μ. $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ λέγεται τυποποιημένη κανονική.
- Η συνάρτηση κατανομής της συμβολίζεται με $\Phi(y)$:

$$\Phi(y) = P(Y \leq y) = P(Y < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- Η $\Phi(y)$ δεν υπολογίζεται σε κλειστή αναλυτική μορφή.

Τυποποιημένη κανονική

- Μια τ.μ. $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ λέγεται τυποποιημένη κανονική.
- Η συνάρτηση κατανομής της συμβολίζεται με $\Phi(y)$:

$$\Phi(y) = P(Y \leq y) = P(Y < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- Η $\Phi(y)$ δεν υπολογίζεται σε κλειστή αναλυτική μορφή.
- Τα βιβλία Πιθανοτήτων-Στατιστικής περιέχουν πίνακες της $\Phi(y)$ για $0 \leq y \leq 3$ με βήμα 0.01.

Τυποποιημένη κανονική

- Μια τ.μ. $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ λέγεται τυποποιημένη κανονική.
- Η συνάρτηση κατανομής της συμβολίζεται με $\Phi(y)$:

$$\Phi(y) = P(Y \leq y) = P(Y < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- Η $\Phi(y)$ δεν υπολογίζεται σε κλειστή αναλυτική μορφή.
- Τα βιβλία Πιθανοτήτων-Στατιστικής περιέχουν πίνακες της $\Phi(y)$ για $0 \leq y \leq 3$ με βήμα 0.01.
- Συμμετρία της σππ. $\Rightarrow \Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$.

Τυποποιημένη κανονική

- Μια τ.μ. $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ λέγεται τυποποιημένη κανονική.
- Η συνάρτηση κατανομής της συμβολίζεται με $\Phi(y)$:

$$\Phi(y) = P(Y \leq y) = P(Y < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- Η $\Phi(y)$ δεν υπολογίζεται σε κλειστή αναλυτική μορφή.
- Τα βιβλία Πιθανοτήτων-Στατιστικής περιέχουν πίνακες της $\Phi(y)$ για $0 \leq y \leq 3$ με βήμα 0.01.
- Συμμετρία της σππ. $\Rightarrow \Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$.
- $\Phi(3) > 0.999 \Rightarrow \Phi(y) \simeq 1$ για $y > 3$.

Πίνακας τιμών κανονικής κατανομής

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

Πίνακας τιμών κανονικής κατανομής (συνέχεια)

2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια πιθανότητα που αφορά μια κανονική τ.μ. X, τότε

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια πιθανότητα που αφορά μια κανονική τ.μ. X, τότε
  1. Μεταφράζουμε το αντίστοιχο ενδεχόμενο ως προς την αντίστοιχη τυποποιημένη $Y = \frac{X-E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$.

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια πιθανότητα που αφορά μια κανονική τ.μ. X, τότε
  1. Μεταφράζουμε το αντίστοιχο ενδεχόμενο ως προς την αντίστοιχη τυποποιημένη $Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$.
  2. Υπολογίζουμε την πιθανότητα μέσω της $\Phi(y)$.

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια πιθανότητα που αφορά μια κανονική τ.μ. X, τότε
  1. Μεταφράζουμε το αντίστοιχο ενδεχόμενο ως προς την αντίστοιχη τυποποιημένη $Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$.
  2. Υπολογίζουμε την πιθανότητα μέσω της $\Phi(y)$.
- Π.χ. Έστω ότι $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια πιθανότητα που αφορά μια κανονική τ.μ. X, τότε
  1. Μεταφράζουμε το αντίστοιχο ενδεχόμενο ως προς την αντίστοιχη τυποποιημένη $Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$.
  2. Υπολογίζουμε την πιθανότητα μέσω της $\Phi(y)$.
- Π.χ. Έστω ότι $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  $P(a \leq X \leq b) = ;$

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια πιθανότητα που αφορά μια κανονική τ.μ. X, τότε
  1. Μεταφράζουμε το αντίστοιχο ενδεχόμενο ως προς την αντίστοιχη τυποποιημένη $Y = \frac{X-E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$.
  2. Υπολογίζουμε την πιθανότητα μέσω της $\Phi(y)$.
- Π.χ. Έστω ότι $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  $P(a \leq X \leq b) =$; ;

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια πιθανότητα που αφορά μια κανονική τ.μ. X, τότε
  1. Μεταφράζουμε το αντίστοιχο ενδεχόμενο ως προς την αντίστοιχη τυποποιημένη $Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$.
  2. Υπολογίζουμε την πιθανότητα μέσω της $\Phi(y)$.
- Π.χ. Έστω ότι $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  $P(a \leq X \leq b) = ;\ ;\ ;$

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια πιθανότητα που αφορά μια κανονική τ.μ. X, τότε
  1. Μεταφράζουμε το αντίστοιχο ενδεχόμενο ως προς την αντίστοιχη τυποποιημένη $Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$.
  2. Υπολογίζουμε την πιθανότητα μέσω της $\Phi(y)$.
- Π.χ. Έστω ότι $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  $P(a \leq X \leq b) =$; ; ;
  $P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma})$

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια πιθανότητα που αφορά μια κανονική τ.μ. X, τότε
  1. Μεταφράζουμε το αντίστοιχο ενδεχόμενο ως προς την αντίστοιχη τυποποιημένη $Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$.
  2. Υπολογίζουμε την πιθανότητα μέσω της $\Phi(y)$.
- Π.χ. Έστω ότι $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  $P(a \leq X \leq b) = ;\ ;\ ;$
  $P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma})$
  $= P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-\mu}{\sigma}),\ Y \simeq \mathcal{N}(0,1)$

Διαδικασία υπολογισμών για κανονικές τ.μ.

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε μια πιθανότητα που αφορά μια κανονική τ.μ. X, τότε
  1. Μεταφράζουμε το αντίστοιχο ενδεχόμενο ως προς την αντίστοιχη τυποποιημένη $Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$.
  2. Υπολογίζουμε την πιθανότητα μέσω της $\Phi(y)$.
- Π.χ. Έστω ότι $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  $P(a \le X \le b) = ;\ ;\ ;$
  $P(a \le X \le b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma})$
  $= P(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}),\ Y \simeq \mathcal{N}(0,1)$
  $= \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$.

Παράδειγμα 1: Ύψος χιονόπτωσης

Παράδειγμα 1: Ύψος χιονόπτωσης

- Η ετήσια χιονόπτωση σε μια περιοχή μοντελοποιείται μέσω μιας κανονικής τ.μ . με μέση τιμη 60 εκατοστά και τυπική απόκλιση 20.

Παράδειγμα 1: Ύψος χιονόπτωσης

- Η ετήσια χιονόπτωση σε μια περιοχή μοντελοποιείται μέσω μιας κανονικής τ.μ . με μέση τιμη 60 εκατοστά και τυπική απόκλιση 20.
- Ποιά η πιθανότητα η φετεινή χιονόπτωση να είναι τουλάχιστον 80 εκατοστά;

Παράδειγμα 1: Ύψος χιονόπτωσης

- Η ετήσια χιονόπτωση σε μια περιοχή μοντελοποιείται μέσω μιας κανονικής τ.μ . με μέση τιμη 60 εκατοστά και τυπική απόκλιση 20.
- Ποιά η πιθανότητα η φετεινή χιονόπτωση να είναι τουλάχιστον 80 εκατοστά;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $E[X] =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $c =$;
- $E[X] =$;
- $Var[X] =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- $c =$;
- $E[X] =$;
- $Var[X] =$;
- $P(X \geq 1 | X \in [-1, 2]) =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $c =$;
- $E[X] =$;
- $Var[X] =$;
- $P(X \geq 1 | X \in [-1, 2]) =$;
- $P(X \geq 1 | X \in [0, 4]) =$;

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$
- $Y = X^2$, $Z = e^X$.

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $Y = X^2$, $Z = e^X$.
- Συναρτήσεις κατανομής $F_Y(y)$, $F_Z(z)$;

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

- $Y = X^2$, $Z = e^X$.
- Συναρτήσεις κατανομής $F_Y(y)$, $F_Z(z)$;
- Σππ $f_Y(y)$, $f_Z(z)$;

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $Y = X^2$, $Z = e^X$.
- Συναρτήσεις κατανομής $F_Y(y)$, $F_Z(z)$;
- Σππ $f_Y(y)$, $f_Z(z)$;
- $E[Y]$, $E[Z]$;

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σπτ.

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$
- Συνάρτηση κατανομής $F_X(x) =$;

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- Συνάρτηση κατανομής $F_X(x) =$;
- $P(X > 1/2) =$;

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- Συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = ;$
- $P(X > 1/2) = ;$
- $E[X] = ;, Var[X] = ;$

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  3.3 Κανονικές Τυχαίες Μεταβλητές

- Ασκήσεις:

  3.3 Προβλήματα 11, 12
  Οι ασκήσεις που περιέχονται στις παρούσες διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.