Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 4:
Τυχαίες τυχαίες μεταβλητές

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.
- Τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.
- Τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- $p_X(x) = P(X = x)$: Συνάρτ. πιθανότητας τ.μ.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.
- Τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- $p_X(x) = P(X = x)$: Συνάρτ. πιθανότητας τ.μ.
- $F_X(x) = P(X \leq x)$: Συνάρτ. κατανομής τ.μ.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.
- Τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- $p_X(x) = P(X = x)$: Συνάρτ. πιθανότητας τ.μ.
- $F_X(x) = P(X \leq x)$: Συνάρτ. κατανομής τ.μ.
- Συμβολισμός: Κεφαλαία γράμματα για τις τ.μ.

Ορισμός τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Τυχαία μεταβλητή = αριθμητικό χαρακτηριστικό πειράματος τύχης.
- Τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- $p_X(x) = P(X = x)$: Συνάρτ. πιθανότητας τ.μ.
- $F_X(x) = P(X \leq x)$: Συνάρτ. κατανομής τ.μ.
- Συμβολισμός: Κεφαλαία γράμματα για τις τ.μ. Μικρά γράμματα για τις τιμές των τ.μ.

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- $X =$ Απόσταση σημείου από το κέντρο.

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$

  $= \frac{0}{\pi} = 0.$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X \leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X\leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \Bigg\{$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X\leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ & \end{cases}$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- $X =$ Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$ $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X \leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$ $= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2, & 0 < x < 1, \\ \end{cases}$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X\leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $$= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- $X =$ Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X\leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $$= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$
- Στα πειράματα με συνεχή δειγματικό χώρο η συνάρτηση πιθανότητας δεν δίνει πληροφορία.

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \dfrac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X\leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $$= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$
- Στα πειράματα με συνεχή δειγματικό χώρο η συνάρτηση πιθανότητας δεν δίνει πληροφορία.
- Η συνάρτηση κατανομής δίνει πληροφορία πάντα.

Παράδειγμα: Ρίψη βέλους σε κυκλικό στόχο

- Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου στο μοναδιαίο δίσκο.
- X = Απόσταση σημείου από το κέντρο.
- $p_X(x) = P(X = x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X=x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \frac{0}{\pi} = 0.$
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{\text{Εμβαδόν ενδεχομένου } \{X\leq x\}}{\text{Εμβαδόν δειγματικού χώρου}}$
  $= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$
- Στα πειράματα με συνεχή δειγματικό χώρο η συνάρτηση πιθανότητας δεν δίνει πληροφορία.
- Η συνάρτηση κατανομής δίνει πληροφορία πάντα.
- Παρόλα αυτά προτιμάμε να σκεφτόμαστε με ενδεχόμενα του τύπου $X \simeq x$ παρά με $X \leq x$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:

$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:
$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$
- Είναι:

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:

$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

- Είναι:

$$f_X(x) = 0, \; x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1,$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:
$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$
- Είναι:
$$f_X(x) = 0,\ x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1,$$
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = 2x,\ 0 < x < 1.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:
$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$
- Είναι:
$$f_X(x) = 0,\ x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1,$$
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = 2x,\ 0 < x < 1.$$
- Η πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ περιέχει ίδια ποσότητα πληροφορίας για την X, όπως η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πυκνότητα πιθανότητας στο x:
$$f_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x)}{\delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$
- Είναι:
$$f_X(x) = 0,\ x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1,$$
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = 2x,\ 0 < x < 1.$$
- Η πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ περιέχει ίδια ποσότητα πληροφορίας για την X, όπως η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$.
- Πράγματι:
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$

- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Υπολογισμοί πιθανοτήτων:

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Υπολογισμοί πιθανοτήτων:
  1. $P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$.

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Υπολογισμοί πιθανοτήτων:
  1. $P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$.
  2. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$ $= P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$.

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

- X συνεχής τ.μ. αν υπάρχει μια $f_X(x) \geq 0$ (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας - σππ.) της X ώστε
$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx, \quad \text{για κάθε ενδεχόμενο } B.$$
- Ιδιότητες της σππ:
  1. $f_X(x) \geq 0$, για κάθε x (μη-αρνητικότητα).
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (κανονικοποίηση).
- Υπολογισμοί πιθανοτήτων:
  1. $P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$.
  2. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$
     $= P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$.
- $P(x < X \leq X + \delta x) \simeq f_X(x)\delta x$, για μικρά δx.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$.

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \stackrel{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.
- $Var[X] \stackrel{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:
  1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E[X])^2 f_X(x)dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:
  1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:

1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$
2. Μέση τιμή και διασπορά γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:
  1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$
  2. Μέση τιμή και διασπορά γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορσ}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορσ}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E[X])^2 f_X(x)dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:

1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx.$$
2. Μέση τιμή και διασπορά γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:
$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$
$$Var[aX + b] = a^2 Var[X].$$

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:
  1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$
  2. Μέση τιμή και διασπορά γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:
  $$E[aX + b] = aE[X] + b.$$
  $$Var[aX + b] = a^2 Var[X].$$
  3. Εναλλακτικός τύπος υπολογισμού διασποράς τ.μ.:

Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ.

- X συνεχής τ.μ. με σππ. $f_X(x)$.
- $E[X] \overset{\text{ορς}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.
- $Var[X] \overset{\text{ορς}}{=} E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx$.
- Ιδιότητες ανάλογες με τις διακριτές τ.μ.:

1. Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$
2. Μέση τιμή και διασπορά γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:
$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$
$$Var[aX + b] = a^2 Var[X].$$
3. Εναλλακτικός τύπος υπολογισμού διασποράς τ.μ.:
$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0, 1]$.

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0, 1]$.
- $X =$ Σημείο που επιλέχθηκε.

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0, 1]$.
- $X =$ Σημείο που επιλέχθηκε.
- Η X ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή $\mathrm{Uniform}([a, b])$.

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0, 1]$.
- X = Σημείο που επιλέχθηκε.
- Η X ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή $\text{Uniform}([a, b])$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\text{Uniform}([a, b])$.

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0,1]$.
- $X =$ Σημείο που επιλέχθηκε.
- Η X ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή $\mathrm{Uniform}([a,b])$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Uniform}([a,b])$.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & \text{αν } x \in [a,b], \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η συνεχής ομοιόμορφη τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[0, 1]$.
- X = Σημείο που επιλέχθηκε.
- Η X ακολουθεί τη συνεχή ομοιόμορφη κατανομή Uniform$([a, b])$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή Uniform$([a, b])$.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} c, & \text{αν } x \in [a, b], \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $c =$;, $F_X(x) =$;, $E[X] =$;, $Var[X] =$;

Η εκθετική κατανομή

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).
- Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).
- Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).
- Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).
- Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\text{Exp}(\lambda)$.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $F_X(x) = ;,\ E[X] = ;,\ Var[X] = ;$

Η εκθετική κατανομή

- Πείραμα τύχης: Παρακολούθ. μηχανήματος μέχρι βλάβη.
- X = Χρόνος ζωής (λειτουργίας).
- Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\text{Exp}(\lambda)$.
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή $\text{Exp}(\lambda)$.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $F_X(x) = ;, E[X] = ;, Var[X] = ;$
- Αμνήμονη ιδιότητα: $P(X > x + y | X > x) = P(X > y)$.

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $c =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$
- $c =$;
- $E[X] =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$
- $c =$;
- $E[X] =$;
- $Var[X] =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

- $c =$;
- $E[X] =$;
- $Var[X] =$;
- $P(X \geq 1 | X \in [-1, 2]) =$;

Άσκηση 1: Υπολογισμοί για συνεχείς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x), & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

- $c =$;
- $E[X] =$;
- $Var[X] =$;
- $P(X \geq 1 | X \in [-1, 2]) =$;
- $P(X \geq 1 | X \in [0, 4]) =$;

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $Y = X^2$, $Z = e^X$.

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$
- $Y = X^2$, $Z = e^X$.
- Συναρτήσεις κατανομής $F_Y(y)$, $F_Z(z)$;

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$
- $Y = X^2$, $Z = e^X$.
- Συναρτήσεις κατανομής $F_Y(y)$, $F_Z(z)$;
- Σππ $f_Y(y)$, $f_Z(z)$;

Άσκηση 2: Συναρτήσεις συνεχούς τ.μ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- $Y = X^2$, $Z = e^X$.
- Συναρτήσεις κατανομής $F_Y(y)$, $F_Z(z)$;
- Σππ $f_Y(y)$, $f_Z(z)$;
- $E[Y]$, $E[Z]$;

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σπп.

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- Συνάρτηση κατανομής $F_X(x) =$;

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- Συνάρτηση κατανομής $F_X(x) =$;
- $P(X > 1/2) =$;

Άσκηση 3: Μη-φραγμένη σππ.

- X: Συνεχής τ.μ.
- Σππ:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
- Συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = ;$
- $P(X > 1/2) = ;$
- $E[X] = ;, Var[X] = ;$

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:

  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
  4. X διακριτή $\Rightarrow$ $F_X(x)$ κατά τμήματα σταθερή.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
  4. X διακριτή $\Rightarrow F_X(x)$ κατά τμήματα σταθερή.
  5. X συνεχής $\Rightarrow F_X(x)$ συνεχής.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής.} \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
  4. X διακριτή $\Rightarrow F_X(x)$ κατά τμήματα σταθερή.
  5. X συνεχής $\Rightarrow F_X(x)$ συνεχής.
  6. X διακριτή $\Rightarrow p_X(x) = F_X(x) - F_X(x-)$.

Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

- X τ.μ.
- Η (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής (σκ.) της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k), & \text{αν η } X \text{ διακριτή}, \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, & \text{αν η } X \text{ συνεχής}. \end{cases}$$

- Ιδιότητες:
  1. $F_X(x)$ αύξουσα.
  2. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
  3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.
  4. X διακριτή $\Rightarrow F_X(x)$ κατά τμήματα σταθερή.
  5. X συνεχής $\Rightarrow F_X(x)$ συνεχής.
  6. X διακριτή $\Rightarrow p_X(x) = F_X(x) - F_X(x-)$.
  7. X συνεχής $\Rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$.

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:
  - 3.1 Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και σππ
  - 3.2 Αθροιστική συνάρτηση κατανομής
- Ασκήσεις:
  - 3.1 Προβλήματα 1, 2, 3.
  - 3.2 Προβλήματα 5, 8.

Τέλος Διαλέξεως

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.