Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 3:
Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.

Ανεξαρτησία τ.μ. και γεγονότος

Ανεξαρτησία τ.μ. και γεγονότος

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.

Ανεξαρτησία τ.μ. και γεγονότος

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).

Ανεξαρτησία τ.μ. και γεγονότος

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- X ανεξάρτητη από το A όταν
  $$P(X = x, A) = P(X = x)P(A) = p_X(x)P(A), \quad \text{για κάθε } x.$$

Ανεξαρτησία τ.μ. και γεγονότος

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- X ανεξάρτητη από το A όταν
  $$P(X = x, A) = P(X = x)P(A) = p_X(x)P(A), \quad \text{για κάθε } x.$$
- Ισοδύναμα: X ανεξάρτητη από το A με $P(A) > 0$ όταν
  $$p_{X|A}(x) = p_X(x), \quad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X: Πλήθος κορώνων που εμφανίστηκαν.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X: Πλήθος κορώνων που εμφανίστηκαν.
- Y: Πλήθος γραμμάτων στην 1η ρίψη.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X: Πλήθος κορώνων που εμφανίστηκαν.
- Y: Πλήθος γραμμάτων στην 1η ρίψη.
- A: Άρτιο πλήθος κορώνων.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X: Πλήθος κορώνων που εμφανίστηκαν.
- Y: Πλήθος γραμμάτων στην 1η ρίψη.
- A: Άρτιο πλήθος κορώνων.
- X, A ανεξάρτητα ;

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 2 ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X: Πλήθος κορώνων που εμφανίστηκαν.
- Y: Πλήθος γραμμάτων στην 1η ρίψη.
- A: Άρτιο πλήθος κορώνων.
- X, A ανεξάρτητα ;
- Y, A ανεξάρτητα ;

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$
- Όμοια:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y=y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X=x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y=y|X=x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}.$$
- Όμοια: $p_{Y|X}(y|x) \geq 0$, $\sum_y p_{Y|X}(y|x) = 1$.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν

$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_Y(y) > 0.$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν
$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$
- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν
$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_Y(y) > 0.$$

ή

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν
$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$
- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν
$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_Y(y) > 0.$$
ή
$$p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_X(x) > 0.$$

Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- $p_{X|Y}(x|y)$, $p_{Y|X}(y|x)$ οι δεσμευμένες σμπ.
- X, Y ανεξάρτητες όταν

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y.$$

- Ισοδύναμα: X, Y ανεξάρτητες όταν

$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_Y(y) > 0.$$

ή

$$p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y), \text{ για κάθε } x, y \text{ και } p_X(x) > 0.$$

- Διαισθητικά: X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow$ Η γνώση της τιμής της μιας δεν αλλάζει τις πιθανότητες των τιμών της άλλης.

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Παράδειγμα:

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Παράδειγμα:
  (X, Y) με $p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2}$, $p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{2}$.

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \nRightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Παράδειγμα:
  (X, Y) με $p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2}$, $p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{2}$.
  $f(x) = 1$, $g(y) = y$.

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες.}$$

- Παράδειγμα:
  (X, Y) με $p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2}$, $p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{2}$.
  $f(x) = 1$, $g(y) = y$.
  X, Y ανεξάρτητες ;

Ανεξαρτησία και συναρτήσεις τ.μ.

- $f(x)$ και $g(y)$ συναρτήσεις.
- Τότε:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες}.$$

- Αλλά, προσοχή!:

$$f(X), g(Y) \text{ ανεξάρτητες} \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες}.$$

- Παράδειγμα:
  (X, Y) με $p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{2}$, $p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{2}$.
  $f(x) = 1$, $g(y) = y$.
  X, Y ανεξάρτητες ;
  $f(X), g(Y)$ ανεξάρτητες ;

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY]\neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

- Προσοχή!:

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

- Προσοχή!:

$$E[XY] = E[X]E[Y] \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες}.$$

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

- Προσοχή!:

$$E[XY] = E[X]E[Y] \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες}.$$

- Παράδειγμα:

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$
- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$
$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$
- Προσοχή!:
$$E[XY] = E[X]E[Y] \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες}.$$
- Παράδειγμα:
X με $p_X(-1) = p(0) = p_X(1) = \frac{1}{3}$. $Y = X^2$.

Ανεξαρτησία και μέση τιμή

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Όμως γενικά: $E[XY] \neq E[X]E[Y]$.
- Αλλά:

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

$$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

- Προσοχή!:

$$E[XY] = E[X]E[Y] \not\Rightarrow X, Y \text{ ανεξάρτητες}.$$

- Παράδειγμα:
  X με $p_X(-1) = p(0) = p_X(1) = \frac{1}{3}$. $Y = X^2$.
  Ισχύει $E[XY] = E[X]E[Y]$; X, Y ανεξάρτητες ;

Ανεξαρτησία και διασπορά

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.
- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

  $$X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y].$$

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$
  X, Y ανεξ. $\Rightarrow Var[f(X)+g(Y)] = Var[f(X)]+Var[g(Y)]$.

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

  X, Y ανεξ. $\Rightarrow Var[f(X)+g(Y)] = Var[f(X)]+Var[g(Y)]$.

- Προσοχή!:

Ανεξαρτησία και διασπορά

- Ισχύει πάντα: $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- Γενικά: $Var[X+Y] \neq Var[X] + Var[Y]$.
- Αλλά:

  X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

- Γενικότερα, για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f(x)$, $g(y)$

  X, Y ανεξ. $\Rightarrow Var[f(X)+g(Y)] = Var[f(X)]+Var[g(Y)]$.

- Προσοχή!:

  $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] \not\Rightarrow X, Y$ ανεξάρτητες.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n).$
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n).$
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n).$
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
  - $Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
    $Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]$.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν

  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n).$

  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
  - $Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
    $Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]$.
- Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
  - $Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
    $Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]$.
- Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.
- Επιπλέον: Αν X, Y, Z ανεξάρτητες τότε

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1 X_2 \cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
  - $Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
    $Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]$.
- Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.
- Επιπλέον: Αν X, Y, Z ανεξάρτητες τότε
  $f(X, Y), g(Z)$ ανεξάρτητες,

Ανεξαρτησία πολλών τ.μ.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, όταν
  $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$.
  για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, τότε
  - $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ ανεξάρτητες.
  - $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
  - $Var[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] =$
    $Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]$.
- Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.
- Επιπλέον: Αν X, Y, Z ανεξάρτητες τότε
  $f(X, Y), g(Z)$ ανεξάρτητες,
  $q(X), r(Y, Z)$ ανεξάρτητες κ.λ.π.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n, p)$.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\text{Bin}(n, p)$.

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\text{Bin}(n, p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Εφαρμογή 1: Η διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n,p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Bin}(n,p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- $E[X] = \,;\; Var[X] = \,;$

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.
- X = Πλήθος επιτυχιών.

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.
- X = Πλήθος επιτυχιών.
- Η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ).

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.
- $X =$ Πλήθος επιτυχιών.
- Η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ).
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή Poisson(λ).

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.
- X = Πλήθος επιτυχιών.
- Η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ).
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή Poisson(λ).
- Σμπ:

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Εφαρμογή 2: Η τ.μ. Poisson

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- Μεγάλο n, μικρή p, έτσι ώστε $\lambda = np$.
- X = Πλήθος επιτυχιών.
- Η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ).
- Η X είναι τυχαία μεταβλητή Poisson(λ).
- Σμπ:

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

- $E[X] =$; $Var[X] =$;

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- $X =$ Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.
- $X \sim$ αρνητική διωνυμική κατανομή, την $\mathrm{NegBin}(n, p)$.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.
- $X \sim$ αρνητική διωνυμική κατανομή, την $\mathrm{NegBin}(n, p)$.
- Η X είναι η αρνητική διωνυμική τ.μ. $\mathrm{NegBin}(n, p)$.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.
- $X \sim$ αρνητική διωνυμική κατανομή, την $\mathrm{NegBin}(n, p)$.
- Η X είναι η αρνητική διωνυμική τ.μ. $\mathrm{NegBin}(n, p)$.
- Για $n = 1$ έχουμε τη γεωμετρική τ.μ.

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.
- $X \sim$ αρνητική διωνυμική κατανομή, την $\mathrm{NegBin}(n, p)$.
- Η X είναι η αρνητική διωνυμική τ.μ. $\mathrm{NegBin}(n, p)$.
- Για $n = 1$ έχουμε τη γεωμετρική τ.μ.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n-1}{k-1}(1-p)^{k-n}p^n, \; k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Εφαρμογή 3: Η αρνητική διωνυμική τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.
- $X \sim$ αρνητική διωνυμική κατανομή, την $\text{NegBin}(n, p)$.
- Η X είναι η αρνητική διωνυμική τ.μ. $\text{NegBin}(n, p)$.
- Για $n = 1$ έχουμε τη γεωμετρική τ.μ.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n-1}{k-1}(1-p)^{k-n}p^n, \; k = 1, 2, 3, \ldots.$$

- $E[X] = \,;\; Var[X] = \,;$

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

- Στη στατιστική για να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιο μέγεθος, θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις του (δηλαδή τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με ίδια κατανομή, π.χ. ίδια σμπ. για διακριτές).

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

- Στη στατιστική για να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιο μέγεθος, θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις του (δηλαδή τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με ίδια κατανομή, π.χ. ίδια σμπ. για διακριτές).
- Έστω ότι το μέγεθος X έχει σμπ. $p_X(x)$, μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2.

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

- Στη στατιστική για να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιο μέγεθος, θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις του (δηλαδή τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με ίδια κατανομή, π.χ. ίδια σμπ. για διακριτές).
- Έστω ότι το μέγεθος X έχει σμπ. $p_X(x)$, μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2.
- Λέμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από την $p_X(x)$.

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

- Στη στατιστική για να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιο μέγεθος, θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις του (δηλαδή τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με ίδια κατανομή, π.χ. ίδια σμπ. για διακριτές).
- Έστω ότι το μέγεθος X έχει σμπ. $p_X(x)$, μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2.
- Λέμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από την $p_X(x)$.
- Ως εκτίμηση του μεγέθους παίρνουμε το δειγματικό μέσο (δειγματική μέση τιμή).

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Εφαρμογή 4: Ο Δειγματικός μέσος

- Στη στατιστική για να βγάλουμε συμπέρασμα για κάποιο μέγεθος, θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις του (δηλαδή τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με ίδια κατανομή, π.χ. ίδια σμπ. για διακριτές).
- Έστω ότι το μέγεθος X έχει σμπ. $p_X(x)$, μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2.
- Λέμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από την $p_X(x)$.
- Ως εκτίμηση του μεγέθους παίρνουμε το δειγματικό μέσο (δειγματική μέση τιμή).

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

- $E[\bar{X}_n] =$; $Var[\bar{X}_n] =$;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  2.7 Ανεξαρτησία

- Ασκήσεις:

  Τα παραδείγματα που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Διακριτές τυχαίες μεταβλητές». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.