# Πιθανότητες και Στατιστική

## Ενότητα 3:
## Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- $A$ ενδεχόμενο (γεγονός).

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- $A$ ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος του $A$:

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- $A$ ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος του $A$:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- $A$ ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος του $A$:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- $A$ ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος του $A$:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- $A$ ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος του $A$:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- $A$ ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος του $A$:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  $X$: ένδειξη.

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- $A$ ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος του $A$:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  $X$: ένδειξη.
  $A$: Ήρθε άρτιος.

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- $A$ ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος του $A$:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  $X$: ένδειξη.
  $A$: Ήρθε άρτιος.
  $p_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.

# Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- $X$ διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- $A$ ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος του $A$:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  $X$: ένδειξη.
  $A$: Ήρθε άρτιος.
  $p_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.
  $p_{X|A}(x) = \frac{1}{3}$, $x = 2, 4, 6$.

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A \cap \{X = x\}) \quad = \quad P(A)p_{X|A}(x).$$

## Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A \cap \{X = x\}) \;=\; P(A)p_{X|A}(x).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A \cap \{X = x\}) \quad = \quad P(A) p_{X|A}(x).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
$A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) *και* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) p_{X|A_i}(x).$$

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A \cap \{X = x\}) \;=\; P(A) p_{X|A}(x).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
$A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) p_{X|A_i}(x).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A \cap \{X = x\}) \;=\; P(A)p_{X|A}(x).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
$A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$p_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)p_{X|A_i}(x).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

$$P(A|X = x) = \frac{P(A)p_{X|A}(x)}{p_X(x)}.$$

# Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

# Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.

# Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p$, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.

# Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p$, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- $X$: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.

# Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p$, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- $X$: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- $A$: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε $n$ φορές.

# Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p$, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- $X$: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- $A$: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε $n$ φορές.
- $p_{X|A}(x) =$ ;

# Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p$, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- $X$: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- $A$: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε $n$ φορές.
- $p_{X|A}(x) = ;\ ;$

# Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p$, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- $X$: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- $A$: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε $n$ φορές.
- $p_{X|A}(x) = ;\ ;\ ;$

## Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p$, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- $X$: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- $A$: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε $n$ φορές.
- $p_{X|A}(x) =$ ; ; ; $p_{X|A^c} =$ ;

# Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p$, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- $X$: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- $A$: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε $n$ φορές.
- $p_{X|A}(x) = \ ; \ ; \ ; \ p_{X|A^c} = \ ; \ ;$

# Παράδειγμα: Αριθμός διαγων. μέχρι επιτυχία

- Φοιτητής δίνει επανειλημμένα ένα μάθημα μέχρι να το περάσει.
- Σε κάθε διαγώνισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p$, ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματά του.
- $X$: Αριθμός διαγωνισμάτων μέχρι να το περάσει.
- $A$: Ο φοιτητής περνάει το μάθημα μέσα σε $n$ φορές.
- $p_{X|A}(x) = ;\ ;\ ;\ p_{X|A^c} = ;\ ;\ ;$

# Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

# Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- $(X,Y)$ διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.

# Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.

# Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$:

# Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

## Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

# Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.

# Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $Y$ δοθέντος ότι $X = x$:

# Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $Y$ δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

# Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:
$p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $Y$ δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$
- Όμοια:

# Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- $(X, Y)$ διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της $Y$ δοθέντος ότι $X = x$:

$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

- Όμοια: $p_{Y|X}(y|x) \geq 0$, $\sum_y p_{Y|X}(y|x) = 1$.

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

## Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$p_Y(y) = \sum_x p_X(x)p_{Y|X}(y|x).$$

## Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$p_Y(y) = \sum_x p_X(x)p_{Y|X}(y|x).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

# Υπολογιστικά θεωρήματα με δεσμ. σμπ.

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

$$p_Y(y) = \sum_x p_X(x)p_{Y|X}(y|x).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_X(x)p_{Y|X}(y|x)}{p_Y(y)}.$$

# Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

## Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.

## Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.
- Σε κάθε ερώτηση που του τίθεται απαντάει λάθος με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.

# Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.
- Σε κάθε ερώτηση που του τίθεται απαντάει λάθος με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.
- $X$: Αριθμός ερωτήσεων.

# Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.
- Σε κάθε ερώτηση που του τίθεται απαντάει λάθος με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.
- $X$: Αριθμός ερωτήσεων.
- $Y$: Αριθμός λανθασμένων απαντήσεων.

# Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.
- Σε κάθε ερώτηση που του τίθεται απαντάει λάθος με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.
- $X$: Αριθμός ερωτήσεων.
- $Y$: Αριθμός λανθασμένων απαντήσεων.
- $p_{X,Y}(x, y) =$ ;, $p_X(x) =$ ;, $p_Y(y) =$ ;

## Παράδειγμα: Λάθη απαντήσεων καθηγητή

- Κατά τη διάρκεια μιας ομιλίας του, ένας καθηγητής δέχεται 0, 1 ή 2 ερωτήσεις με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{3}$.
- Σε κάθε ερώτηση που του τίθεται απαντάει λάθος με πιθανότητα $\frac{1}{4}$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο.
- $X$: Αριθμός ερωτήσεων.
- $Y$: Αριθμός λανθασμένων απαντήσεων.
- $p_{X,Y}(x, y) =$ ;, $p_X(x) =$ ;, $p_Y(y) =$ ;

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ορισμοί

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ορισμοί

- Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς ενδεχόμενο $A$ με $P(A) > 0$:
$$E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x).$$
- Δεσμευμένη μέση τιμή δεδομένου ότι $Y = y$ με $p_Y(y) > 0$:
$$E[X|Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y).$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο $A$ με $P(A) > 0$:

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο $A$ με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x).$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο $A$ με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x).$$

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. δεδομένου ότι $Y = y$ με $p_Y(y) > 0$:

# Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. ως προς ενδεχόμενο $A$ με $P(A) > 0$:

$$E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x).$$

- Δεσμευμένη μέση τιμή συνάρτησης τ.μ. δεδομένου ότι $Y = y$ με $p_Y(y) > 0$:

$$E[g(X)|Y = y] = \sum_x g(x) p_{X|Y}(x|y).$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) $\text{και } \cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα: $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$
  $$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$
- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με άλλη τ.μ.:

# Δεσμευμένη μέση τιμή - Ιδιότητες

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με σύνολα:
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) E[X|A_i].$$

- Θεώρημα ολικής μέσης τιμής με άλλη τ.μ.:

$$E[X] = \sum_{y} p_Y(y) E[X|Y = y].$$

# Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

# Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p$.

# Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p$.
- $X$: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.

# Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p$.
- $X$: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.
- $E[X] =$ ;

# Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p$.
- $X$: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.
- $E[X] =$ ; ;

# Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p$.
- $X$: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.
- $E[X] = ;\ ;\ ;\ Var[X] = ;$

## Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p$.
- $X$: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.
- $E[X] = ;\ ;\ ;\ Var[X] = ;\ ;$

# Παράδειγμα 1: Μέση τιμή και διασπορά γεωμετρικής τ.μ.

- Ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p$.
- $X$: Αριθμός δοκιμών μέχρι την 1η επιτυχία.
- $E[X] = ;\ ;\ ;\ Var[X] = ;\ ;\ ;$

# Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

# Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.

## Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες. Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.

## Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.

# Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.
  Η 3η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες.

# Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.
  Η 3η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες.
- Όταν ο φυλακισμένος επιστρέψει στο κελί ξαναεπιλέγει άμεσα πόρτα (χωρίς να έχει μνήμη τί επέλεξε προηγούμενα) και η διαδικασία συνεχίζει μέχρι να ελευθερωθεί.

# Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.
  Η 3η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες.
- Όταν ο φυλακισμένος επιστρέψει στο κελί ξαναεπιλέγει άμεσα πόρτα (χωρίς να έχει μνήμη τί επέλεξε προηγούμενα) και η διαδικασία συνεχίζει μέχρι να ελευθερωθεί.
- Μέσος αριθμός ημερών μέχρι την ελευθερία = ;

# Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.
  Η 3η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες.
- Όταν ο φυλακισμένος επιστρέψει στο κελί ξαναεπιλέγει άμεσα πόρτα (χωρίς να έχει μνήμη τί επέλεξε προηγούμενα) και η διαδικασία συνεχίζει μέχρι να ελευθερωθεί.
- Μέσος αριθμός ημερών μέχρι την ελευθερία = ; ;

# Παράδειγμα 2: Μέρες ως την ελευθερία

- Ένας φυλακισμένος διαλέγει μια από τρεις πόρτες.
  Η 1η τον οδηγεί άμεσα στην ελευθερία.
  Η 2η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 3 μέρες.
  Η 3η τον οδηγεί πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες.
- Όταν ο φυλακισμένος επιστρέψει στο κελί ξαναεπιλέγει άμεσα πόρτα (χωρίς να έχει μνήμη τί επέλεξε προηγούμενα) και η διαδικασία συνεχίζει μέχρι να ελευθερωθεί.
- Μέσος αριθμός ημερών μέχρι την ελευθερία = ; ; ;

# Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι $r$ συνεχόμενες Κ

# Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι $r$ συνεχόμενες Κ

- Νόμισμα φέρνει σε κάθε ρίψη Κ με πιθανότητα $p$ και Γ με πιθανότητα $1-p$.

# Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι $r$ συνεχόμενες Κ

- Νόμισμα φέρνει σε κάθε ρίψη Κ με πιθανότητα $p$ και Γ με πιθανότητα $1 - p$.
- $T_r$: Αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν $r$ συνεχόμενες κορώνες.

# Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι $r$ συνεχόμενες Κ

- Νόμισμα φέρνει σε κάθε ρίψη Κ με πιθανότητα $p$ και Γ με πιθανότητα $1-p$.
- $T_r$: Αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν $r$ συνεχόμενες κορώνες.
- $E[T_r] =$ ;

# Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι $r$ συνεχόμενες Κ

- Νόμισμα φέρνει σε κάθε ρίψη Κ με πιθανότητα $p$ και Γ με πιθανότητα $1-p$.
- $T_r$: Αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν $r$ συνεχόμενες κορώνες.
- $E[T_r] =$ ; ;

# Παράδειγμα 3: Ρίψεις νομίσματος μέχρι $r$ συνεχόμενες Κ

- Νόμισμα φέρνει σε κάθε ρίψη Κ με πιθανότητα $p$ και Γ με πιθανότητα $1-p$.
- $T_r$: Αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθούν $r$ συνεχόμενες κορώνες.
- $E[T_r] =$ ; ; ;

# Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

# Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα $N$ αυγά.

# Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα $N$ αυγά.
- Η τ.μ. $N$ ακολουθεί την κατανομή Poisson($\lambda$) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$.

## Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα $N$ αυγά.
- Η τ.μ. $N$ ακολουθεί την κατανομή Poisson($\lambda$) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα $p$.

# Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα $N$ αυγά.
- Η τ.μ. $N$ ακολουθεί την κατανομή Poisson($\lambda$) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα $p$.
- $K$: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.

## Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα $N$ αυγά.
- Η τ.μ. $N$ ακολουθεί την κατανομή Poisson($\lambda$) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα $p$.
- $K$: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.
- $P(N = n, K = k) =$ ;

# Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα $N$ αυγά.
- Η τ.μ. $N$ ακολουθεί την κατανομή Poisson($\lambda$) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα $p$.
- $K$: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.
- $P(N = n, K = k) =$ ;
- $P(K = k) =$ ;

# Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα $N$ αυγά.
- Η τ.μ. $N$ ακολουθεί την κατανομή Poisson($\lambda$) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα $p$.
- $K$: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.
- $P(N = n, K = k) =$ ;
- $P(K = k) =$ ;
- $E[K|N = n] =$ ;

## Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα $N$ αυγά.
- Η τ.μ. $N$ ακολουθεί την κατανομή Poisson$(\lambda)$ με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα $p$.
- $K$: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.
- $P(N = n, K = k) = \;;$
- $P(K = k) = \;;$
- $E[K|N = n] = \;;$
- $E[N|K = k] = \;;$

# Παράδειγμα 4: Η κότα και τα αυγά

- Κότα γεννάει σε ένα μήνα $N$ αυγά.
- Η τ.μ. $N$ ακολουθεί την κατανομή Poisson($\lambda$) με σμπ. $p_N(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},\ n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα με πιθανότητα $p$.
- $K$: Πλήθος αυγών που εκκολάφθηκαν.
- $P(N = n, K = k) =$ ;
- $P(K = k) =$ ;
- $E[K|N = n] =$ ;
- $E[N|K = k] =$ ;
- $E[N] =$ ;, $E[K] =$ ;

# Παράδειγμα 5: Μέση τιμή και διασπορά τυχαίου αθροίσματος

# Παράδειγμα 5: Μέση τιμή και διασπορά τυχαίου αθροίσματος

- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_i] = \mu_X$ και $Var[X_i] = \sigma_X^2$.

# Παράδειγμα 5: Μέση τιμή και διασπορά τυχαίου αθροίσματος

- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_i] = \mu_X$ και $Var[X_i] = \sigma_X^2$.
- $N$ ακέραια, μη-αρνητική τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$, με με $E[N] = \mu_N$ και $Var[N] = \sigma_N^2$.

# Παράδειγμα 5: Μέση τιμή και διασπορά τυχαίου αθροίσματος

- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_i] = \mu_X$ και $Var[X_i] = \sigma_X^2$.
- $N$ ακέραια, μη-αρνητική τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$, με με $E[N] = \mu_N$ και $Var[N] = \sigma_N^2$.
- $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

# Παράδειγμα 5: Μέση τιμή και διασπορά τυχαίου αθροίσματος

- $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E[X_i] = \mu_X$ και $Var[X_i] = \sigma_X^2$.
- $N$ ακέραια, μη-αρνητική τ.μ., ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$, με με $E[N] = \mu_N$ και $Var[N] = \sigma_N^2$.
- $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.
- $E[S_N] = ;, Var[S_N] = ;$

# Μελέτη

# Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  2.6 Δέσμευση

- Ασκήσεις:

  Τα παραδείγματα που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν έγιναν στην τάξη.

# Τέλος Διαλέξεως

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

# Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Διακριτές τυχαίες μεταβλητές». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.