Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 3:
Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- $P(X = x, Y = y)$: Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- $P(X = x, Y = y)$: Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.
- $P(X \leq x, Y \leq y)$: Από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- $P(X = x, Y = y)$: Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.
- $P(X \leq x, Y \leq y)$: Από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y.
- (X, Y) διακριτή $\Leftrightarrow$ Παίρνει αριθμήσιμο πλήθος τιμών.

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή = 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή = συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- $P(X = x, Y = y)$: Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.
- $P(X \leq x, Y \leq y)$: Από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y.
- (X, Y) διακριτή $\Leftrightarrow$ Παίρνει αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$: από κοινού σμπ. χαρακτηρίζει την (X, Y).

Ορισμός διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ 2 αριθμητικά χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $=$ συνάρτηση $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
- $P(X = x, Y = y)$: Από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.
- $P(X \leq x, Y \leq y)$: Από κοινού συνάρτηση κατανομής των X, Y.
- (X, Y) διακριτή $\Leftrightarrow$ Παίρνει αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$: από κοινού σμπ. χαρακτηρίζει την (X, Y).
- Για την ώρα περιοριζόμαστε σε διδιάστ. διακριτές τ.μ.

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

- Υπολογισμός πιθανοτήτων:

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

- Υπολογισμός πιθανοτήτων:

$$P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y).$$

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

- Υπολογισμός πιθανοτήτων:

$$P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y).$$

- Περιθώριες σμπ:

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

- Υπολογισμός πιθανοτήτων:

$$P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y).$$

- Περιθώριες σμπ:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y} p_{X,Y}(x,y).$$

Υπολογισμοί πιθαν., περιθώριες

- Υπολογισμός πιθανοτήτων:

$$P((X,Y)\in A)=\sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y).$$

- Περιθώριες σμπ:

$$p_X(x)=P(X=x)=\sum_y p_{X,Y}(x,y).$$

$$p_Y(y)=P(Y=y)=\sum_x p_{X,Y}(x,y).$$

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  $=$ Νέα τυχαία μεταβλητή.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  $=$ Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  $=$ Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.
- Πρόβλημα: (X, Y) διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
  Τότε $Z = g(X, Y)$ διακριτή τ.μ. Ποιά η σμπ. $p_Z(z)$;

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  $=$ Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.
- Πρόβλημα: (X, Y) διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
  Τότε $Z = g(X, Y)$ διακριτή τ.μ. Ποιά η σμπ. $p_Z(z)$; ;

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  $=$ Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.
- Πρόβλημα: (X, Y) διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
  Τότε $Z = g(X, Y)$ διακριτή τ.μ. Ποιά η σμπ. $p_Z(z)$; ; ;

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  = Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.
- Πρόβλημα: (X, Y) διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
  Τότε $Z = g(X, Y)$ διακριτή τ.μ. Ποιά η σμπ. $p_Z(z)$; ; ;
- Λύση:

Συναρτήσεις διδιάστατης τ.μ.

- $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικά πειράματος τύχης.
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: Πραγματική συνάρτηση.
- $g \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. : Χαρακτηριστικό του πειράματος τύχης, που προσδιορίζεται από τα χαρακτηριστικα X, Y.
  = Νέα τυχαία μεταβλητή.
- Συμβολισμός: $g(X, Y)$, αντί $g \circ (X, Y)$.
- Πρόβλημα: (X, Y) διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
  Τότε $Z = g(X, Y)$ διακριτή τ.μ. Ποιά η σμπ. $p_Z(z)$; ; ;
- Λύση:

$$p_Z(z) = \sum_{(x,y):g(x,y)=z} p_{X,Y}(x, y).$$

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

- Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

- Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y).$$

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

- Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y).$$
Προσοχή !!!: $E[g(X,Y)] \neq g(E[X], E[Y])$.

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

- Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y).$$
Προσοχή !!!: $E[g(X,Y)] \neq g(E[X], E[Y])$.
- Μέση τιμή γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:

Διδιάστατες τ.μ. και μέση τιμή

- Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.:
$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y).$$
Προσοχή !!!: $E[g(X,Y)] \neq g(E[X], E[Y])$.
- Μέση τιμή γραμμικής συνάρτησης τ.μ.:
$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c.$$

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.
- $Y=$ Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.
- $Y=$ Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.
- $Y=$ Πλήθος K ως τα πρώτα Γ ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$; ; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) = ;\ ;\ ;$
- $p_X(x) = ;\ p_Y(y) = ;\ E[X] = ;\ E[Y] = ;\ ;\ ;$
- $P(X + Y = 4) = ;\ ;\ ;$
- $Z = X + 2Y + 1.$

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.
- $Y=$ Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x,y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X+Y=4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x,y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X + Y = 4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $E[XY] =$;

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x, y) = ;\ ;\ ;$
- $p_X(x) = ;\ p_Y(y) = ;\ E[X] = ;\ E[Y] = ;\ ;\ ;$
- $P(X + Y = 4) = ;\ ;\ ;$
- $Z = X + 2Y + 1.\ p_Z(z) = ;\ E[Z] =;\ ;\ ;$
- $E[XY] =;\ ;$

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{X,Y}(x,y) =$; ; ;
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $P(X+Y=4) =$; ; ;
- $Z = X + 2Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $E[XY] =$; ; ;

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.
- $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.
- $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: περιθώρια της X_1.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.
- $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: περιθώρια της X_1. Όμοια ορίζονται και οι άλλες.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $= n$ αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.
- $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2, \ldots, x_n} p_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: περιθώρια της X_1. Όμοια ορίζονται και οι άλλες.
- $E[g(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$ $= \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_n} g(x_1, x_2 \ldots, x_n) p_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Γενίκευση: Πολυδιάστατες τ.μ.

- Έστω πείραμα τύχης $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ n αριθμητικά χαρακτηριστικά.
- n-διάστατη τ.μ. $=$ συνάρτ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ διακρ. $\Leftrightarrow$ Αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- $p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$: από κοινού σμπ.
- $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: περιθώρια της X_1. Όμοια ορίζονται και οι άλλες.
- $E[g(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$ $= \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_n} g(x_1, x_2 \ldots, x_n) p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- $E[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n + b]$ $= a_1E[X_1] + a_2E[X_2] + \cdots + a_nE[X_n] + b$.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n, p)$.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Bin}(n, p)$.

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- $E[X] =$;

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\text{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\text{Bin}(n, p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- $E[X] =$; ;

Παράδειγμα 1: Μέση τιμή διωνυμικής τ.μ.

- Πείραμα τύχης: Ακολουθία n δοκιμών Bernoulli.
- Πιθανότητα επιτυχίας p.
- X = Πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές.
- Η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Bin}(n, p)$.
- Σμπ:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- $E[X] = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = \frac{1}{n!}$.

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- X= Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] =$;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P($όλοι να πάρουν το βιβλίο τους$) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P($κανένας να πάρει το βιβλίο του$) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] =$; ;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $X=$ Πλήθος ατόμων που παίρνει το βιβλίο του.
- $P(X = n) = P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = \frac{1}{n!}$.
- $P(X = 0) = P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- $E[X] =$; ; ;

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
X: ένδειξη.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  X: ένδειξη.
  A: Ήρθε άρτιος.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  X: ένδειξη.
  A: Ήρθε άρτιος.
  $p_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.

Δεσμευμένη τ.μ. από γεγονός

- X διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_X(x)$.
- A ενδεχόμενο (γεγονός).
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος του A:
$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|A}(x) \geq 0$, $\sum_x p_{X|A}(x) = 1$.
- Π.χ. Ρίψη ζαριού.
  X: ένδειξη.
  A: Ήρθε άρτιος.
  $p_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \ldots, 6$.
  $p_{X|A}(x) = \frac{1}{3}$, $x = 2, 4, 6$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y=y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X,Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x,y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y=y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:
$p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ: $p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:

$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

- Όμοια:

Δεσμευμένη τ.μ. από άλλη τ.μ.

- (X, Y) διδιάστατη διακριτή τ.μ. με σμπ. $p_{X,Y}(x, y)$.
- $p_X(x)$, $p_Y(y)$ οι αντίστοιχες περιθώριες σμπ.
- Η δεσμευμένη σμπ. της X δοθέντος ότι $Y = y$:
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$
- Η δεσμευμένη σμπ. έχει τις ιδιότητες μιας σμπ:
$p_{X|Y}(x|y) \geq 0$, $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$.
- Η δεσμευμένη σμπ. της Y δοθέντος ότι $X = x$:
$$p_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$
- Όμοια: $p_{Y|X}(y|x) \geq 0$, $\sum_y p_{Y|X}(y|x) = 1$.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- $X =$ Πλήθος K.

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

Παράδειγμα 1: 3 ρίψεις νομίσματος (συνέχεια)

- Π.χ. Τυχαίο πείραμα: 3 ρίψεις δίκαιου νομίσματος.
- X = Πλήθος K.
- Y= Πλήθος K ως τα πρώτα Γ
  ($Y = 3$ αν δεν εμφανιστούν γράμματα).

ω	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΚΓΓ	ΓΚΚ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	3	2	1	1	0	0	0	0

- $p_{Y|X}(y|0) =$; $p_{Y|X}(y|1) =$; $p_{Y|X}(y|2) =$; $p_{Y|X}(y|3) =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) =\ ;\ p_Y(y) =\ ;\ E[X] =\ ;\ E[Y] =\ ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) = ;\ p_Y(y) = ;\ E[X] = ;\ E[Y] = ;\ ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) = \;;\; p_Y(y) = \;;\; E[X] = \;;\; E[Y] = \;;\;;\;;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1.$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) =\ ;\ p_Y(y) =\ ;\ E[X] =\ ;\ E[Y] =\ ;\ ;\ ;$
- $Z = X + Y + 1.\ p_Z(z) =\ ;\ E[Z] =;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) =\ ;\ p_Y(y) =\ ;\ E[X] =\ ;\ E[Y] =\ ;\ ;\ ;$
- $Z = X + Y + 1.\ p_Z(z) =\ ;\ E[Z] =;\ ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) = ; \; p_Y(y) = ; \; E[X] = ; \; E[Y] = ; \; ; \; ;$
- $Z = X + Y + 1.\; p_Z(z) = ; \; E[Z] =; \; ; \; ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ; \; ; \; ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) = ;\ p_Y(y) = ;\ E[X] = ;\ E[Y] = ;\ ;\ ;$
- $Z = X + Y + 1.\ p_Z(z) = ;\ E[Z] =;\ ;\ ;$
- $P(X+Y=5|X \leq 3) = ;\ ;\ ;$
- $U = \min(X,Y),\ V = \max(X,Y).\ p_{U,V}(u,v) =;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) = \;;\; p_Y(y) = \;;\; E[X] = \;;\; E[Y] = \;;\;;\;;$
- $Z = X + Y + 1.\; p_Z(z) = \;;\; E[Z] =;\;;\;;$
- $P(X+Y=5|X \leq 3) = \;;\;;\;;$
- $U = \min(X,Y),\, V = \max(X,Y).\; p_{U,V}(u,v) =;\;;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$; ; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) = ;\ p_Y(y) = ;\ E[X] = ;\ E[Y] = ;\ ;\ ;$
- $Z = X + Y + 1.\ p_Z(z) = ;\ E[Z] =;\ ;\ ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ;\ ;\ ;$
- $U = \min(X,Y),\ V = \max(X,Y).\ p_{U,V}(u,v) =;\ ;\ ;$
- $E[U + V] = ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$; ; ;
- $E[U + V] =$; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2},\ x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X,Y)$, $V = \max(X,Y)$. $p_{U,V}(u,v) =$; ; ;
- $E[U + V] =$; ; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) = ;\ p_Y(y) = ;\ E[X] = ;\ E[Y] = ;\ ;\ ;$
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) = ;\ E[Z] =;\ ;\ ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ;\ ;\ ;$
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =;\ ;\ ;$
- $E[U + V] = ;\ ;\ ;$
- $p_U(u) = ;,\ p_V(v) = ;,\ E[V] = ;,\ E[U] = ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) = ; \; p_Y(y) = ; \; E[X] = ; \; E[Y] = ; \; ; \; ;$
- $Z = X + Y + 1. \; p_Z(z) = ; \; E[Z] =; \; ; \; ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ; \; ; \; ;$
- $U = \min(X, Y), \, V = \max(X, Y). \; p_{U,V}(u, v) =; \; ; \; ;$
- $E[U + V] = ; \; ; \; ;$
- $p_U(u) = ;, \, p_V(v) = ;, \, E[V] = ;, \, E[U] = ; \; ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}$, $x, y = 1, 2, \ldots, n$.
- $p_X(x) =$; $p_Y(y) =$; $E[X] =$; $E[Y] =$; ; ;
- $Z = X + Y + 1$. $p_Z(z) =$; $E[Z] =$; ; ;
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) =$; ; ;
- $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. $p_{U,V}(u, v) =$; ; ;
- $E[U + V] =$; ; ;
- $p_U(u) =$;, $p_V(v) =$;, $E[V] =$;, $E[U] =$; ; ;

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x,y = 1,2,\ldots,n.$
- $p_X(x) = ;\; p_Y(y) = ;\; E[X] = ;\; E[Y] = ;\; ;\; ;$
- $Z = X + Y + 1.\; p_Z(z) = ;\; E[Z] =;\; ;\; ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ;\; ;\; ;$
- $U = \min(X,Y),\, V = \max(X,Y).\; p_{U,V}(u,v) =;\; ;\; ;$
- $E[U + V] = ;\; ;\; ;$
- $p_U(u) = ;,\, p_V(v) = ;,\, E[V] = ;,\, E[U] = ;\; ;\; ;$
- $p_{U|V}(u|v) = ;,\, p_{V|U}(v|u) =;\; p_{V|\{X=k\}}(v) = ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) = ; \; p_Y(y) = ; \; E[X] = ; \; E[Y] = ; \; ; \; ;$
- $Z = X + Y + 1. \; p_Z(z) = ; \; E[Z] =; \; ; \; ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ; \; ; \; ;$
- $U = \min(X, Y), \; V = \max(X, Y). \; p_{U,V}(u, v) =; \; ; \; ;$
- $E[U + V] = ; \; ; \; ;$
- $p_U(u) = ;, \; p_V(v) = ;, \; E[V] = ;, \; E[U] = ; \; ; \; ;$
- $p_{U|V}(u|v) = ;, \; p_{V|U}(v|u) =; \; p_{V|\{X=k\}}(v) = ; \; ;$

Άσκηση 1: Η διδιάστατη διακριτή ομοιόμορφη τ.μ.

- Διδιάστατη ομοιόμορφη διακριτή τ.μ. Από κοινού σμπ: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n^2}, \; x, y = 1, 2, \ldots, n.$
- $p_X(x) = ; \; p_Y(y) = ; \; E[X] = ; \; E[Y] = ; \; ; \; ;$
- $Z = X + Y + 1.\; p_Z(z) = ; \; E[Z] =; \; ; \; ;$
- $P(X + Y = 5 | X \leq 3) = ; \; ; \; ;$
- $U = \min(X, Y), \; V = \max(X, Y).\; p_{U,V}(u, v) =; \; ; \; ;$
- $E[U + V] = ; \; ; \; ;$
- $p_U(u) = ;, \; p_V(v) = ;, \; E[V] = ;, \; E[U] = ; \; ; \; ;$
- $p_{U|V}(u|v) = ;, \; p_{V|U}(v|u) =; \; p_{V|\{X=k\}}(v) = ; \; ; \; ;$

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:
  - 2.5 Από κοινού σμπ πολλαπλών τυχαίων μεταβλητών
  - 2.6 Δέσμευση
- Ασκήσεις:
  - 2.5 Προβλήματα 24, 26, 27
  - 2.6 Πρόβλημα 31

Τέλος Διαλέξεως

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.