Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 2:

Δεσμευμένη πιθανότητα και στοχαστική ανεξαρτησία

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Βασικά θεωρήματα δέσμευσης

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

Βασικά θεωρήματα δέσμευσης

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \ldots A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \\ &\quad \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

Βασικά θεωρήματα δέσμευσης

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\ldots A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \\ &\quad \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**

Βασικά θεωρήματα δέσμευσης

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
  $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

Βασικά θεωρήματα δέσμευσης

- **Πολλαπλασιαστικός Νόμος:**

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\ldots A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \\ &\quad \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

- **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:**
$A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο (ασυμβίβ.) και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$

- **Κανόνας του Bayes:**

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k

  $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) =$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 =$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n =$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k

  $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k}$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!}$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
$= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
$= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
$= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου με n στοιχεία $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου με n στοιχεία
  $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $=$

Συνδυαστικά αποτελέσματα

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.
- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου με n στοιχεία
  $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$
  $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{“εξάρι”}) = P(X = 6) = ;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{``εξάρι''}) = P(X = 6) = \,;\,;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{“εξάρι”}) = P(X = 6) = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{``εξάρι''}) = P(X = 6) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{``πεντάρι''}) = P(X = 5) = ;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P($"εξάρι"$) = P(X = 6) =$; ; ;
- $P($"πεντάρι"$) = P(X = 5) =$; ;

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \dots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \dots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{"εξάρι"}) = P(X = 6) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{"πεντάρι"}) = P(X = 5) = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 1: Παιχνίδι ΛΟΤΤΟ

- Παίκτης συμπληρώνει δελτίο που περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 49$ κυκλώνοντας 6 αριθμούς.
- Κληρώνονται 6 αριθμοί από τους $1, 2, \ldots, 49$ χωρίς επανάθεση.
- X: Πλήθος κοινών αριθμών δελτίου και κλήρωσης.
- $P(\text{“εξάρι”}) = P(X = 6) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{“πεντάρι”}) = P(X = 5) = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων}) = \,;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$
- $p_n = \,;\;;\;; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γενεθλίων;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων}) =$;
- $p_n =$; ; ; $= 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γεννεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P($τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων$) =$;
- $p_n =$; ; ; $= 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γενεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων}) =$;
- $p_n =$; ; ; $= 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γεννεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = \;;$
- $p_n = \;;\;;\;; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γενεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5 \;;\;;\;;$

n	15	20	23	25	30	40	50	75
p_n	0.25	0.41	0.51	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P($τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων$) =$;
- $p_n =$; ; ; $= 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γεννεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

n	15	20	23	25	30	40	50	75
p_n	0.25	0.41	0.51	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων}) = ;$
- $p_n = \; ; \; ; \; ; \; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γεννεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

n	15	20	23	25	30	40	50	75
p_n	0.25	0.41	0.51	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γενεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P(\text{τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γενεθλίων}) = ;$
- $p_n = ;\ ;\ ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γενεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

n	15	20	23	25	30	40	50	75
p_n	0.25	0.41	0.51	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

- Θεωρούμε n άτομα που είναι γεννημένα σε μη-δίσεκτα έτη (365 ημερών).
- $p_n = P$(τουλάχ. 2 άτομα με ίδια μέρα γεννεθλίων) = ;
- $p_n = \; ; \; ; \; ; = 1 - \frac{365!/(365-n+1)!}{365^n}$.
- Για ποιό n και πάνω θα στοιχηματίζατε ότι μεταξύ n ατόμων θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ίδια μέρα γεννεθλίων;
- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ;

n	15	20	23	25	30	40	50	75
p_n	0.25	0.41	0.51	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

- Ελάχιστος n ώστε $p_n > 0.5$; ; ; = 23.

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) =$;

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{οι } 1, 2, \ldots, k \text{ να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{οι } 1, 2, \ldots, k \text{ να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{οι } 1, 2, \ldots, k \text{ να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = \;;\;;\;;$
- $P(\text{οι } 1, 2, \ldots, k \text{ να πάρουν το βιβλίο τους}) = \;;\;;\;;$
- $P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = \;;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{οι } 1, 2, \ldots, k \text{ να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = ;\ ;$

Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα των συναντήσεων

- n άνθρωποι έχουν παραγγείλει n διαφορετικά βιβλία σε έναν ιστότοπο (ο καθένας από 1).
- Το σύστημα διαχείρισης των παραγγελιών χαλάει και στέλνει τα παραγγελθέντα βιβλία στην τύχη (1 στον καθένα από τους n ανθρώπους).
- $P(\text{όλοι να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{οι } 1, 2, \ldots, k \text{ να πάρουν το βιβλίο τους}) = ;\ ;\ ;$
- $P(\text{κανένας να πάρει το βιβλίο του}) = ;\ ;\ ;$

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.
- Εξάγονται διαδοχικά 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.
- Εξάγονται διαδοχικά 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.
- $P(1\text{ο } \Lambda,\ 2\text{ο } \mathrm{M},\ 3\text{ο } \mathrm{M},\ 4\text{ο } \Lambda\ )=;$

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.
- Εξάγονται διαδοχικά 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.
- $P($1ο Λ, 2ο Μ, 3ο Μ, 4ο Λ $)=$; ;

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.
- Εξάγονται διαδοχικά 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.
- $P($1ο Λ, 2ο Μ, 3ο Μ, 4ο Λ $)=$; ; ;

Άσκηση 1: Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη

- Κάλπη περιέχει 10 λευκά (Λ) και 5 μαύρα (Μ) σφαιρίδια.
- Εξάγονται διαδοχικά 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση.
- P(1ο Λ, 2ο Μ, 3ο Μ, 4ο Λ)=; ; ;

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.
- Οι ήδη καθισμένοι θεατές ενοχλούνται αν κάποιος περάσει από μπροστά τους για να καθήσεις στη θέση του.

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.
- Οι ήδη καθισμένοι θεατές ενοχλούνται αν κάποιος περάσει από μπροστά τους για να καθήσεις στη θέση του.
- P(να καθήσουν όλοι χωρίς να ενοχλήσουν)$=$;

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.
- Οι ήδη καθισμένοι θεατές ενοχλούνται αν κάποιος περάσει από μπροστά τους για να καθήσεις στη θέση του.
- P(να καθήσουν όλοι χωρίς να ενοχλήσουν)$=$; ;

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.
- Οι ήδη καθισμένοι θεατές ενοχλούνται αν κάποιος περάσει από μπροστά τους για να καθήσεις στη θέση του.
- P(να καθήσουν όλοι χωρίς να ενοχλήσουν)= ; ; ;

Άσκηση 2: Τοποθέτηση στο θέατρο

- Σε ένα θέατρο καθε σειρά αποτελείται από 7 κολλητά καθίσματα.
- 7 θεατές, οι $1, 2, \ldots, 7$ που έχουν εισιτήρια για μια συγκεκριμένη σειρά φθάνουν και πάνε προς το κάθισμά τους.
- Έχουν πρόσβαση στο κάθισμά τους και από τα δυο άκρα της σειράς.
- Οι ήδη καθισμένοι θεατές ενοχλούνται αν κάποιος περάσει από μπροστά τους για να καθήσεις στη θέση του.
- P(να καθήσουν όλοι χωρίς να ενοχλήσουν)= ; ; ;

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.
- Πρόκειται να αποβιβαστούν ο καθένας σε κάποιον από τους ορόφους 1-5 (ο καθένας διαλέγει όροφο ισοπίθανα).

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.
- Πρόκειται να αποβιβαστούν ο καθένας σε κάποιον από τους ορόφους 1-5 (ο καθένας διαλέγει όροφο ισοπίθανα).
- P(Τουλάχιστον ένας αποβιβάζεται σε κάθε όροφο)=;

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.
- Πρόκειται να αποβιβαστούν ο καθένας σε κάποιον από τους ορόφους 1-5 (ο καθένας διαλέγει όροφο ισοπίθανα).
- P(Τουλάχιστον ένας αποβιβάζεται σε κάθε όροφο)=; ;

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.
- Πρόκειται να αποβιβαστούν ο καθένας σε κάποιον από τους ορόφους 1-5 (ο καθένας διαλέγει όροφο ισοπίθανα).
- P(Τουλάχιστον ένας αποβιβάζεται σε κάθε όροφο)=; ; ;

Άσκηση 3: Αποβίβαση σε ορόφους

- 20 άνθρωποι επιβιβάζονται σε ανελκυστήρα στο ισόγειο 5όροφου κτηρίου.
- Πρόκειται να αποβιβαστούν ο καθένας σε κάποιον από τους ορόφους 1-5 (ο καθένας διαλέγει όροφο ισοπίθανα).
- P(Τουλάχιστον ένας αποβιβάζεται σε κάθε όροφο)=; ; ;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  1.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα
  1.4 Θεώρημα Συνολικής Πιθανότητας και ο Κανόνας του Bayes
  1.5 Ανεξαρτησία
  1.6 Αρίθμηση
  1.7 Σύνοψη και Συζήτηση
  Προβλήματα

- Ασκήσεις:

  Οι ασκήσεις που περιέχονται σε αυτές τις διαφάνειες και δεν λύθηκαν στην τάξη.

Τέλος Διαλέξεως

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.