Πιθανότητες και Στατιστική
Ενότητα 2:
Δεσμευμένη πιθανότητα και στοχαστική ανεξαρτησία

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Συνδυαστική

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
"How to count without counting?"

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
"How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
"How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
"How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
  (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
  "How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
  123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
  Γενικά;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
"How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
Γενικά;
- Π.χ. Με πόσους τρόπους k Κ και $n - k$ Γ σε σειρά;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
  "How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
  123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
  Γενικά;
- Π.χ. Με πόσους τρόπους k Κ και $n - k$ Γ σε σειρά;
  Πόσα αποτελ. υπάρχουν σε n ρίψεις νομίσματος με k Κ;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
  (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
  "How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
  123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
  Γενικά;
- Π.χ. Με πόσους τρόπους k Κ και $n - k$ Γ σε σειρά;
  Πόσα αποτελ. υπάρχουν σε n ρίψεις νομίσματος με k Κ;
- Για $n = 4$ και $k = 2$;

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή
(χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
"How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
Γενικά;
- Π.χ. Με πόσους τρόπους k Κ και $n - k$ Γ σε σειρά;
Πόσα αποτελ. υπάρχουν σε n ρίψεις νομίσματος με k Κ;
- Για $n = 4$ και $k = 2$;
ΚΚΓΓ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΓΚΚ: 6 τρόποι.

Συνδυαστική

- Συνδυαστική = απαρίθμηση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου με κάποια συγκεκριμένη δομή (χωρίς να χρειάζεται να καταμετρηθούν ένα-ένα τα στοιχεία του).
  "How to count without counting?"
- Π.χ. Με πόσους τρόπους μπαίνουν n άτομα σε σειρά;
- Για $n = 3$;
  123, 132, 213, 231, 312, 321: 6 τρόποι.
  Γενικά;
- Π.χ. Με πόσους τρόπους k Κ και $n - k$ Γ σε σειρά;
  Πόσα αποτελ. υπάρχουν σε n ρίψεις νομίσματος με k Κ;
- Για $n = 4$ και $k = 2$;
  ΚΚΓΓ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΓΚΚ: 6 τρόποι.
  Γενικά;

Συνδυαστική και Πιθανότητες

- Στις πιθανότητες συχνά χρειάζεται συνδυαστική.

Συνδυαστική και Πιθανότητες

- Στις πιθανότητες συχνά χρειάζεται συνδυαστική.
- Π.χ. Όταν ο δ.χ. αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία (κλασική πιθανότητα) και A ένα ενδεχόμενο.

- Στις πιθανότητες συχνά χρειάζεται συνδυαστική.
- Π.χ. Όταν ο δ.χ. αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία (κλασική πιθανότητα) και A ένα ενδεχόμενο.

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{\text{Πλήθος στοιχείων του δ.χ.}\Omega}.$$

Συνδυαστική και Πιθανότητες

- Στις πιθανότητες συχνά χρειάζεται συνδυαστική.
- Π.χ. Όταν ο δ.χ. αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία (κλασική πιθανότητα) και A ένα ενδεχόμενο.

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{\text{Πλήθος στοιχείων του δ.χ.}\Omega}.$$

- Π.χ. Όταν ένα ενδεχόμενο A αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία με πιθανότητα p.

Συνδυαστική και Πιθανότητες

- Στις πιθανότητες συχνά χρειάζεται συνδυαστική.
- Π.χ. Όταν ο δ.χ. αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία (κλασική πιθανότητα) και A ένα ενδεχόμενο.

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{\text{Πλήθος στοιχείων του δ.χ.}\Omega}.$$

- Π.χ. Όταν ένα ενδεχόμενο A αποτελείται από ισοπίθανα δειγματικά σημεία με πιθανότητα p.

$$P(A) = p \times (\text{Πλήθος στοιχείων του } A).$$

Η Πολλαπλασιαστική αρχή

Η Πολλαπλασιαστική αρχή

- Έστω ότι ένα (συνδυαστικό) αντικείμενο (=διαδικασία) φτιάχνεται σε r στάδια.

Η Πολλαπλασιαστική αρχή

- Έστω ότι ένα (συνδυαστικό) αντικείμενο (=διαδικασία) φτιάχνεται σε r στάδια.
- Στο στάδιο i υπάρχουν n_i το πλήθος επιλογές, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Η Πολλαπλασιαστική αρχή

- Έστω ότι ένα (συνδυαστικό) αντικείμενο (=διαδικασία) φτιάχνεται σε r στάδια.
- Στο στάδιο i υπάρχουν n_i το πλήθος επιλογές, $i = 1, 2, \ldots, r$.
- Το είδος των επιλογών στο στάδιο i μπορεί να εξαρτάται από ποιές επιλογές έγιναν στα προηγούμενα στάδια, αλλά το πλήθος των επιλογών δεν εξαρτάται.

Η Πολλαπλασιαστική αρχή

- Έστω ότι ένα (συνδυαστικό) αντικείμενο (=διαδικασία) φτιάχνεται σε r στάδια.
- Στο στάδιο i υπάρχουν n_i το πλήθος επιλογές, $i = 1, 2, \ldots, r$.
- Το είδος των επιλογών στο στάδιο i μπορεί να εξαρτάται από ποιές επιλογές έγιναν στα προηγούμενα στάδια, αλλά το πλήθος των επιλογών δεν εξαρτάται.
- Τότε ο συνολικός αριθμός αντικειμένων (αποτελεσμάτων της διαδικασίας) είναι $n_1 n_2 \cdots n_r$.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ $=$ **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται**.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$. (k-μετάθεση).

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$. (k-μετάθεση).
- Για $k = n$ έχουμε μετάθεση του $\mathcal{S}$.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
  (k-μετάθεση).
- Για $k = n$ έχουμε μετάθεση του $\mathcal{S}$.
  Μετάθεση του $\mathcal{S}$ = Διάταξη n ανά n του $\mathcal{S}$

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
  (k-μετάθεση).
- Για $k = n$ έχουμε μετάθεση του $\mathcal{S}$.
  Μετάθεση του $\mathcal{S}$ = Διάταξη n ανά n του $\mathcal{S}$
  = Τοποθέτηση σε σειρά όλων των στοιχείων του $\mathcal{S}$.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$. (k-μετάθεση).
- Για $k = n$ έχουμε μετάθεση του $\mathcal{S}$.
  Μετάθεση του $\mathcal{S}$ = Διάταξη n ανά n του $\mathcal{S}$
  = Τοποθέτηση σε σειρά όλων των στοιχείων του $\mathcal{S}$.
- Διάταξη n ανά k με επανάληψη του $\mathcal{S}$

Διατάξεις - Μεταθέσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Διάταξη n ανά k του $\mathcal{S}$ = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται.**
  = Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων του $\mathcal{S}$. (k-μετάθεση).
- Για $k = n$ έχουμε μετάθεση του $\mathcal{S}$.
  Μετάθεση του $\mathcal{S}$ = Διάταξη n ανά n του $\mathcal{S}$
  = Τοποθέτηση σε σειρά όλων των στοιχείων του $\mathcal{S}$.
- Διάταξη n ανά k με επανάληψη του $\mathcal{S}$
  = **διατεταγμένη** k-άδα στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που μπορεί να επαναλαμβάνονται.**

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $=$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) =$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων $=$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 =$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
  $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
  $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
  $=$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k
$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων
$= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k
$= n \cdot n \cdot n \cdots n =$

Πλήθος διατάξεων-μεταθέσεων

- Πλήθος διατάξεων n ανά k $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων $= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$.
- Πλήθος επαναληπτικών διατάξεων n ανά k $= n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$.

Συνδυασμοί

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  = **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων
  του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται**.

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  = **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται**.
  = Υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με k στοιχεία.

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  = **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται**.
  = Υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με k στοιχεία.
  = Επιλογή k στοιχείων του $\mathcal{S}$.

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  = **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται**.
  = Υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με k στοιχεία.
  = Επιλογή k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
- Διαφορά διάταξης και συνδυασμού n ανά k:

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  $=$ **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται**.
  $=$ Υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με k στοιχεία.
  $=$ Επιλογή k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
- Διαφορά διάταξης και συνδυασμού n ανά k:
  Συνδυασμός: Επιλογή k στοιχείων.

Συνδυασμοί

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία.
- Συνδυασμός n ανά k του $\mathcal{S}$
  $=$ **μη-διατεταγμένη** k-άδα διακεκριμένων στοιχείων του $\mathcal{S}$ **που δεν επαναλαμβάνονται**.
  $=$ Υποσύνολο του $\mathcal{S}$ με k στοιχεία.
  $=$ Επιλογή k στοιχείων του $\mathcal{S}$.
- Διαφορά διάταξης και συνδυασμού n ανά k:
  Συνδυασμός: Επιλογή k στοιχείων.
  Διάταξη: Επιλογή + Τοποθέτηση σε σειρά k στοιχείων.

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k}$

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!}$

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Απόδειξη:

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k} = \frac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Απόδειξη:
  1 συνδ. n ανά $k \to k!$ διαφορετικές διατάξεις n ανά k.

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Απόδειξη:
  1 συνδ. n ανά k $\rightarrow$ $k!$ διαφορετικές διατάξεις n ανά k.
  $\Downarrow$

Πλήθος συνδυασμών

- Πλήθος συνδυασμών n ανά k
  $= \binom{n}{k} = \dfrac{\text{Πλήθος διατάξεων } n \text{ ανά } k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Απόδειξη:
  1 συνδ. n ανά k $\rightarrow$ $k!$ διαφορετικές διατάξεις n ανά k.
  $\Downarrow$
  (Πλήθος συνδ. n ανά k) $\times$ $k!$ $=$ Πλήθος διατ. n ανά k.

Διαμερίσεις

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε

  1. $|A_i| = n_i$,

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια διαμέρ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια διαμέρ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή στοιχείων για το σύνολο A_i.

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια διαμέρ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή στοιχείων για το σύνολο A_i.
  Πλήθος τρόπων: $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_k}{n_k}$

Διαμερίσεις

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Μια διαμέριση τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ του $\mathcal{S}$ είναι μια διατεταγμένη k-άδα υποσυνόλων $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ του $\mathcal{S}$ ώστε
  1. $|A_i| = n_i$,
  2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$,
  3. $\cup_{i=1}^{k} A_i = \mathcal{S}$.
- Πλήθος διαμερίσεων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ενός συνόλου $\mathcal{S}$ με n στοιχεία $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια διαμέρ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή στοιχείων για το σύνολο A_i.
  Πλήθος τρόπων: $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια μετάθ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια μετάθ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή θέσεων για το σύμβολο a_i.

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια μετάθ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή θέσεων για το σύμβολο a_i.
  Πλήθος τρόπων: $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_k}{n_k}$

Μεταθέσεις n ειδών στοιχείων

- Μια μετάθεση k ειδών στοιχείων $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ είναι μια διατεταγμένη n-άδα στοιχείων με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, όπου το στοιχείο a_i εμφανίζεται n_i φορές.
- Πλήθος μεταθέσεων k ειδών στοιχείων τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.
- Απόδειξη:
  Μια μετάθ. τύπου $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ δημιουργ. σε k στάδ:
  i στάδιο: Επιλογή θέσεων για το σύμβολο a_i.
  Πλήθος τρόπων: $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} \cdots \binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Εφαρμογή 1: Πλήθος υποσυνόλων συνόλου

Εφαρμογή 1: Πλήθος υποσυνόλων συνόλου

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Ποιός είναι ο συνολικός αριθμός υποσυνόλων του;

Εφαρμογή 1: Πλήθος υποσυνόλων συνόλου

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Ποιός είναι ο συνολικός αριθμός υποσυνόλων του;
- Απάντηση:

Εφαρμογή 1: Πλήθος υποσυνόλων συνόλου

- Έστω ένα σύνολο $\mathcal{S}$ με n στοιχεία. Ποιός είναι ο συνολικός αριθμός υποσυνόλων του;
- Απάντηση: 2^n.

Εφαρμογή 2: Αναγραμματισμοί

Εφαρμογή 2: Αναγραμματισμοί

- Πόσους αναγραμματισμούς έχει η λέξη "ΜΑΛΑΜΑΤΑ";

Εφαρμογή 2: Αναγραμματισμοί

- Πόσους αναγραμματισμούς έχει η λέξη "ΜΑΛΑΜΑΤΑ";
- Απάντηση:

Εφαρμογή 2: Αναγραμματισμοί

- Πόσους αναγραμματισμούς έχει η λέξη "ΜΑΛΑΜΑΤΑ";
- Απάντηση: $\frac{8!}{4!2!1!1!}$.

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

- n ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

- n ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Πιθανότητα κορώνας p, πιθανότητα γραμμάτων $q = 1 - p$.

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

- n ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Πιθανότητα κορώνας p, πιθανότητα γραμμάτων $q = 1 - p$.
- Πιθανότητα k κορώνων σε n ρίψεις;

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

- n ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Πιθανότητα κορώνας p, πιθανότητα γραμμάτων $q = 1 - p$.
- Πιθανότητα k κορώνων σε n ρίψεις;
- Απάντηση:

Εφαρμογή 3: Διωνυμικές πιθανότητες

- n ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος.
- Πιθανότητα κορώνας p, πιθανότητα γραμμάτων $q = 1 - p$.
- Πιθανότητα k κορώνων σε n ρίψεις;
- Απάντηση: $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Εφαρμογή 4: Πλήθος ακέραιων λύσεων εξίσωσης

Εφαρμογή 4: Πλήθος ακέραιων λύσεων εξίσωσης

- Πόσες ακέραιες μη-αρνητικές λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ έχει η εξίσωση
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k;$$

Εφαρμογή 4: Πλήθος ακέραιων λύσεων εξίσωσης

- Πόσες ακέραιες μη-αρνητικές λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ έχει η εξίσωση
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k;$$

- Απάντηση:

Εφαρμογή 4: Πλήθος ακέραιων λύσεων εξίσωσης

- Πόσες ακέραιες μη-αρνητικές λύσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ έχει η εξίσωση
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k;$$

- Απάντηση: $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Άσκηση 1: Αριθμοί με ιδιότητες

Άσκηση 1: Αριθμοί με ιδιότητες

- Πόσοι 7-ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά ψηφία;

Άσκηση 1: Αριθμοί με ιδιότητες

- Πόσοι 7-ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά ψηφία;
- Πόσοι άρτιοι 7-ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά ψηφία;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
    1. Χωρίς περιορισμό;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
    1. Χωρίς περιορισμό;
    2. Με ακριβώς r γυναίκες;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;
  3. Με ακριβώς r γυναίκες, χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;
  3. Με ακριβώς r γυναίκες, χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  4. Χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;
  3. Με ακριβώς r γυναίκες, χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  4. Χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  5. Με πρόεδρο;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;
  3. Με ακριβώς r γυναίκες, χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  4. Χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  5. Με πρόεδρο;
  6. Με γυναίκα πρόεδρο;

Άσκηση 2: Επιτροπή από ζευγάρια

- Έστω n ανδρόγυνα.
- Πόσες k-μελείς επιτροπές υπάρχουν από αυτά τα ανδρόγυνα σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:
  1. Χωρίς περιορισμό;
  2. Με ακριβώς r γυναίκες;
  3. Με ακριβώς r γυναίκες, χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  4. Χωρίς άτομα από το ίδιο ανδρόγυνο;
  5. Με πρόεδρο;
  6. Με γυναίκα πρόεδρο;
  7. Με γυναίκα πρόεδρο και άντρα αντιπρόεδρο;

Άσκηση 3: Τοποθέτηση αγοριών και κοριτσιών σε σειρά

Άσκηση 3: Τοποθέτηση αγοριών και κοριτσιών σε σειρά

- 100 αγόρια και 20 κορίτσια πρόκειται να τοποθετηθούν σε σειρά.

Άσκηση 3: Τοποθέτηση αγοριών και κοριτσιών σε σειρά

- 100 αγόρια και 20 κορίτσια πρόκειται να τοποθετηθούν σε σειρά.
- Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις τους ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικά κορίτσια;

Άσκηση 3: Τοποθέτηση αγοριών και κοριτσιών σε σειρά

- 100 αγόρια και 20 κορίτσια πρόκειται να τοποθετηθούν σε σειρά.
- Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις τους ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικά κορίτσια; ;

Άσκηση 3: Τοποθέτηση αγοριών και κοριτσιών σε σειρά

- 100 αγόρια και 20 κορίτσια πρόκειται να τοποθετηθούν σε σειρά.
- Πόσες είναι οι δυνατές τοποθετήσεις τους ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικά κορίτσια; ; ;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  1.6 Αρίθμηση

- Ασκήσεις:

  1.6 Προβλήματα: 51, 52, 53, 55, 57

Τέλος Διαλέξεως

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Δεσμευμένη πιθανότητα και στοχαστική ανεξαρτησία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] `http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/`

Ως *Μη Εμπορική* ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.