

Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 2:

Δεσμευμένη πιθανότητα και στοχαστική ανεξαρτησία

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικών και Καποδιστριακών
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Διαισθητική έννοια ανεξαρτησίας

Διαισθητική έννοια ανεξαρτησίας

- A, B ανεξάρτητα
 \Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός δεν μεταβάλλει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

Διαισθητική έννοια ανεξαρτησίας

- A, B ανεξάρτητα
 \Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός δεν μεταβάλλει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.
- A, B ανεξάρτητα
 $\Leftrightarrow P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$
ή
 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B).$

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- Αν $P(B) > 0$ τότε
 A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- Αν $P(B) > 0$ τότε
 A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
- A, B υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου του C με $P(C) > 0$
 $\Leftrightarrow P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$.

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- Αν $P(B) > 0$ τότε
 A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
- A, B υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου του C με $P(C) > 0$
 $\Leftrightarrow P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$.
- Αν $P(BC) > 0$ τότε
 A, B υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου του C με $P(C) > 0$
 $\Leftrightarrow P(A|BC) = P(A|C)$.

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- Αν $P(B) > 0$ τότε
 A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
- A, B υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου του C με $P(C) > 0$
 $\Leftrightarrow P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$.
- Αν $P(BC) > 0$ τότε
 A, B υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου του C με $P(C) > 0$
 $\Leftrightarrow P(A|BC) = P(A|C)$.
- Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Δεσμευμένη ανεξαρτησία.

Ανεξαρτησία για πολλά ενδεχόμενα

Ανεξαρτησία για πολλά ενδεχόμενα

- A_1, A_2, \dots, A_n ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(\bigcap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} P(A_i)$,
για κάθε $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

Ανεξαρτησία για πολλά ενδεχόμενα

- A_1, A_2, \dots, A_n ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(\cap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} P(A_i)$, για κάθε $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.
- π.χ. για $n = 3$, A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Ανεξαρτησία για πολλά ενδεχόμενα

- A_1, A_2, \dots, A_n ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(\bigcap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} P(A_i)$, για κάθε $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.
- π.χ. για $n = 3$, A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

- A_1, A_2, \dots, A_n ανεξάρτητα ανά ζεύγη
 $\Leftrightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, για κάθε $i, j \in \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ με $i \neq j$.

Ανεξαρτησία για πολλά ενδεχόμενα

- A_1, A_2, \dots, A_n ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(\bigcap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} P(A_i)$, για κάθε $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.
- π.χ. για $n = 3$, A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

- A_1, A_2, \dots, A_n ανεξάρτητα ανά ζεύγη
 $\Leftrightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, για κάθε $i, j \in \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ με $i \neq j$.
- Ανεξαρτησία \Rightarrow (αλλά $\not\Leftarrow$) Ανεξαρτησία ανά ζεύγη.

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
 \Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν** μεταβάλλει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα

\Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν** μεταβάλλει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

$$\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B).$$

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
 \Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλλει** την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.
 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- A, B ασυμβίβαστα

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
⇔ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν** μεταβάλλει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.
⇔ $P(AB) = P(A)P(B)$.
- A, B ασυμβίβαστα
⇔ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **αποκλείει** την πραγματοποίηση του άλλου.

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
 \Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλλει** την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.
 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- A, B ασυμβίβαστα
 \Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **αποκλείει** την πραγματοποίηση του άλλου.
 $\Leftrightarrow AB = \emptyset$ (οπότε και $P(AB) = 0$).

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
 \Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλλει** την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.
 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- A, B ασυμβίβαστα
 \Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **αποκλείει** την πραγματοποίηση του άλλου.
 $\Leftrightarrow AB = \emptyset$ (οπότε και $P(AB) = 0$).
- A, B ανεξάρτητα $\not\Rightarrow, \not\Leftarrow A, B$ ασυμβίβαστα.

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
 \Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλλει** την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.
 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- A, B ασυμβίβαστα
 \Leftrightarrow η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **αποκλείει** την πραγματοποίηση του άλλου.
 $\Leftrightarrow AB = \emptyset$ (οπότε και $P(AB) = 0$).
- A, B ανεξάρτητα $\not\Rightarrow, \not\Leftarrow A, B$ ασυμβίβαστα.
- Είναι δυνατόν A, B ανεξάρτητα και ασυμβίβαστα;

Μερικές ιδιότητες

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα \Leftrightarrow

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα \Leftrightarrow
 B, A ανεξάρτητα,

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα \Leftrightarrow
 B, A ανεξάρτητα,
 A, B^c ανεξάρτητα,

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα \Leftrightarrow
 B, A ανεξάρτητα,
 A, B^c ανεξάρτητα,
 A^c, B^c ανεξάρτητα.

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα \Leftrightarrow
 B, A ανεξάρτητα,
 A, B^c ανεξάρτητα,
 A^c, B^c ανεξάρτητα.
- A, B, C ανεξάρτητα \Rightarrow

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα \Leftrightarrow
 B, A ανεξάρτητα,
 A, B^c ανεξάρτητα,
 A^c, B^c ανεξάρτητα.
- A, B, C ανεξάρτητα \Rightarrow
 $A, B \cup C$ ανεξάρτητα,

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα \Leftrightarrow
 B, A ανεξάρτητα,
 A, B^c ανεξάρτητα,
 A^c, B^c ανεξάρτητα.
- A, B, C ανεξάρτητα \Rightarrow
 $A, B \cup C$ ανεξάρτητα,
 $A, B \cap C$ ανεξάρτητα,

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα \Leftrightarrow
 B, A ανεξάρτητα,
 A, B^c ανεξάρτητα,
 A^c, B^c ανεξάρτητα.
- A, B, C ανεξάρτητα \Rightarrow
 $A, B \cup C$ ανεξάρτητα,
 $A, B \cap C$ ανεξάρτητα,
 $A, B \cap C^c$ ανεξάρτητα,
...

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A : η πρώτη ζαριά να είναι 4.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A : η πρώτη ζαριά να είναι 4.
- B : η δεύτερη ζαριά να είναι 3.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A : η πρώτη ζαριά να είναι 4.
- B : η δεύτερη ζαριά να είναι 3.
- C : το άθροισμα των ζαριών να είναι 7.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A : η πρώτη ζαριά να είναι 4.
- B : η δεύτερη ζαριά να είναι 3.
- C : το άθροισμα των ζαριών να είναι 7.
- Είναι τα A, B, C ανεξάρτητα ανά ζεύγη; ανεξάρτητα;

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A : η πρώτη ζαριά να είναι 4.
- B : η δεύτερη ζαριά να είναι 3.
- C : το άθροισμα των ζαριών να είναι 7.
- Είναι τα A, B, C ανεξάρτητα ανά ζεύγη; ανεξάρτητα;
- D : το άθροισμα των ζαριών να είναι 5.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A : η πρώτη ζαριά να είναι 4.
- B : η δεύτερη ζαριά να είναι 3.
- C : το άθροισμα των ζαριών να είναι 7.
- Είναι τα A, B, C ανεξάρτητα ανά ζεύγη; ανεξάρτητα;
- D : το άθροισμα των ζαριών να είναι 5.
- Είναι τα A, D ανεξάρτητα;

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A : η πρώτη ζαριά να είναι 1,2 ή 3.

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A : η πρώτη ζαριά να είναι 1,2 ή 3.
- B : η πρώτη ζαριά να είναι 3,4 ή 5.

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow \text{Ανεξαρτησία.}$$

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A : η πρώτη ζαριά να είναι 1,2 ή 3.
- B : η πρώτη ζαριά να είναι 3,4 ή 5.
- C : το άθροισμα των ζαριών να είναι 9.

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow \text{Ανεξαρτησία.}$$

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A : η πρώτη ζαριά να είναι 1,2 ή 3.
- B : η πρώτη ζαριά να είναι 3,4 ή 5.
- C : το άθροισμα των ζαριών να είναι 9.
- Ισχύει $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$; Είναι τα A, B, C ανεξάρτητα;

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

- Ρίψη 2 δίκαιων νομισμάτων.

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

- Ρίψη 2 δίκαιων νομισμάτων.
- K_1 : η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

- Ρίψη 2 δίκαιων νομισμάτων.
- K_1 : η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.
- K_2 : η δεύτερη ρίψη είναι κορώνα.

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

- Ρίψη 2 δίκαιων νομισμάτων.
- K_1 : η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.
- K_2 : η δεύτερη ρίψη είναι κορώνα.
- D : οι δυο ρίψεις έχουν διαφορετικά αποτελέσματα.

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

- Ρίψη 2 δίκαιων νομισμάτων.
- K_1 : η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.
- K_2 : η δεύτερη ρίψη είναι κορώνα.
- D : οι δυο ρίψεις έχουν διαφορετικά αποτελέσματα.
- Είναι τα K_1 , K_2 ανεξάρτητα; ανεξάρτητα υπό δέσμευση δεδομένου του D ;

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.
- Το κόκκινο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.01.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.
- Το κόκκινο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.01.
- B : επιλέχθηκε το μπλε νόμισμα.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.
- Το κόκκινο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.01.
- B : επιλέχθηκε το μπλε νόμισμα.
- K_1 : η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία





- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.
- Το κόκκινο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.01.
- B : επιλέχθηκε το μπλε νόμισμα.
- K_1 : η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.
- K_2 : η δεύτερη ρίψη είναι κορώνα.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία






- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.
- Το κόκκινο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.01.
- B : επιλέχθηκε το μπλε νόμισμα.
- K_1 : η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.
- K_2 : η δεύτερη ρίψη είναι κορώνα.
- Είναι τα K_1, K_2 ανεξάρτητα υπό δέσμευση δεδομένου του B ; ανεξάρτητα;

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου






Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 “χρώματα” (, , , ) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς (2, 3, ..., 10, J, Q, K, A).

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 “χρώματα” (, , , ) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς (2, 3, ..., 10, J, Q, K, A).
- A: Το τραπουλόχαρτο είναι .

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 “χρώματα” (, , , ) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς (2, 3, ..., 10, J, Q, K, A).
- A: Το τραπουλόχαρτο είναι .
- B: Το τραπουλόχαρτο είναι K.

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 “χρώματα” (\clubsuit , \diamondsuit , \heartsuit , \spadesuit) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς (2, 3, ..., 10, J, Q, K, A).
- A: Το τραπουλόχαρτο είναι \clubsuit .
- B: Το τραπουλόχαρτο είναι K.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 “χρώματα” (\clubsuit , \diamondsuit , \heartsuit , \spadesuit) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς (2, 3, ..., 10, J, Q, K, A).
- A: Το τραπουλόχαρτο είναι \clubsuit .
- B: Το τραπουλόχαρτο είναι K.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;
- Έστω ότι από την αρχική τράπουλα έχει αφαιρεθεί το $2\diamondsuit$ και μετά επιλέγεται ένα τραπουλόχαρτο.

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 “χρώματα” (\clubsuit , \diamondsuit , \heartsuit , \spadesuit) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς (2, 3, ..., 10, J, Q, K, A).
- A: Το τραπουλόχαρτο είναι \clubsuit .
- B: Το τραπουλόχαρτο είναι K.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;
- Έστω ότι από την αρχική τράπουλα έχει αφαιρεθεί το $2\diamondsuit$ και μετά επιλέγεται ένα τραπουλόχαρτο.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$.

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A : το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- *A*: το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.
- *B*: το ενδεχόμενο ο αριθμός να διαιρείται με το 3.

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A : το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.
- B : το ενδεχόμενο ο αριθμός να διαιρείται με το 3.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A : το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.
- B : το ενδεχόμενο ο αριθμός να διαιρείται με το 3.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ;

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A : το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.
- B : το ενδεχόμενο ο αριθμός να διαιρείται με το 3.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ; ;

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \dots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A : το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.
- B : το ενδεχόμενο ο αριθμός να διαιρείται με το 3.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ; ;

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίχαιο ζάρι.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X : η ένδειξη του ζαριού.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X : η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X : η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y : ο αριθμός των “κεφαλών” στις ρίψεις.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X : η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y : ο αριθμός των “κεφαλών” στις ρίψεις.
- A : ο X είναι άρτιος.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X : η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y : ο αριθμός των “κεφαλών” στις ρίψεις.
- A : ο X είναι άρτιος.
- B : ο Y είναι άρτιος.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X : η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y : ο αριθμός των “κεφαλών” στις ρίψεις.
- A : ο X είναι άρτιος.
- B : ο Y είναι άρτιος.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X : η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y : ο αριθμός των “κεφαλών” στις ρίψεις.
- A : ο X είναι άρτιος.
- B : ο Y είναι άρτιος.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ;

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X : η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y : ο αριθμός των “κεφαλών” στις ρίψεις.
- A : ο X είναι άρτιος.
- B : ο Y είναι άρτιος.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ; ;

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X : η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y : ο αριθμός των “κεφαλών” στις ρίψεις.
- A : ο X είναι άρτιος.
- B : ο Y είναι άρτιος.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ; ;

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

1.5 Ανεξαρτησία

- Ασκήσεις:

1.5 Προβλήματα 30, 34, 35, 36, 40

Τέλος Διαλέξεως

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Δεσμευμένη πιθανότητα και στοχαστική ανεξαρτησία». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
 - το Σημείωμα Αδειοδότησης
 - τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
 - το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)
- μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.