Πιθανότητες και Στατιστική

Ενότητα 1:
Βασικές έννοιες και αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων

Αντώνιος Οικονόμου

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Αθήνα 2015

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Πλαίσιο

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο = Σύνολο αποτελεσμάτων, υποσύνολο δ.χ.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο = Σύνολο αποτελεσμάτων, υποσύνολο δ.χ.
- Πιθανότητα =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο = Σύνολο αποτελεσμάτων, υποσύνολο δ.χ.
- Πιθανότητα = Αριθμός στο $[0, 1]$ που αντιστοιχεί σε ενδεχόμενο.

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο = Σύνολο αποτελεσμάτων, υποσύνολο δ.χ.
- Πιθανότητα = Αριθμός στο $[0, 1]$ που αντιστοιχεί σε ενδεχόμενο.
- Τυχαία μεταβλητή =

Πλαίσιο

- Πείραμα τύχης = Διαδικασία με αβέβαιο αποτέλεσμα.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα.
- Τα δειγματικά σημεία πρέπει να είναι αμοιβαία αποκλειόμενα.
- Δειγματικός χώρος = Σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων.
- Ο δ.χ. πρέπει να είναι συλλογικά εξαντλητικός.
- Ενδεχόμενο = Σύνολο αποτελεσμάτων, υποσύνολο δ.χ.
- Πιθανότητα = Αριθμός στο $[0, 1]$ που αντιστοιχεί σε ενδεχόμενο.
- Τυχαία μεταβλητή = Αριθμητικό χαρακτηριστικό.

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος:

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
    - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος:
  $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3
    $= \{(1,2),(2,1)\}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) =$

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.
  - $P(A_2) =$

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.
  - $P(A_2) = \frac{6}{36}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.
  - $P(A_2) = \frac{6}{36}$.
- Τυχαίες μεταβλητές:

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.
  - $P(A_2) = \frac{6}{36}$.
- Τυχαίες μεταβλητές:
  - $X_1 =$ το άθροισμα των ζαριών.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Ρίψη δυο ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Ενδεχόμενα:
  - $A_1 =$ Το άθροισμα των ζαριών να είναι 3 $= \{(1,2),(2,1)\}$.
  - $A_2 =$ Η 1η ζαριά να είναι 6 $= \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$.
- Πιθανότητες:
  - $P(A_1) = \frac{2}{36}$.
  - $P(A_2) = \frac{6}{36}$.
- Τυχαίες μεταβλητές:
  - $X_1 =$ το άθροισμα των ζαριών.
  - $X_2 =$ η πρώτη ζαριά.

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 10 άλογα τρέχουν στον ιππόδρομο.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 10 άλογα τρέχουν στον ιππόδρομο.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα: Σειρά τερματισμού.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 10 άλογα τρέχουν στον ιππόδρομο.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα: Σειρά τερματισμού.
- Δειγματικός χώρος $= \Omega =$ Σύνολο μεταθέσεων 10 αλόγων.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: 10 άλογα τρέχουν στον ιππόδρομο.
- Δειγματικό σημείο = Αποτέλεσμα: Σειρά τερματισμού.
- Δειγματικός χώρος = Ω = Σύνολο μεταθέσεων 10 αλόγων.
- $|\Omega| = 10!$.

Παράδειγμα

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Γέννηση παιδιών σε οικογένεια και καταγραφή φύλου.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Γέννηση παιδιών σε οικογένεια και καταγραφή φύλου.
- Δειγματικός χώρος:

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Γέννηση παιδιών σε οικογένεια και καταγραφή φύλου.
- Δειγματικός χώρος: $\Omega = \{-, A, K, AA, AK, KA, KK, AAA, \ldots\}$.

Παράδειγμα

- Πείραμα τύχης: Γέννηση παιδιών σε οικογένεια και καταγραφή φύλου.
- Δειγματικός χώρος:
  $\Omega = \{-, A, K, AA, AK, KA, KK, AAA, \ldots\}$.
- Ω διακριτός (αριθμήσιμος), αλλά $|\Omega| = \infty$.

Έννοιες πιθανότητας

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.
- Οριακή σχετική συχνότητα.

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.
- Οριακή σχετική συχνότητα.
- Γεωμετρική πιθανότητα.

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.
- Οριακή σχετική συχνότητα.
- Γεωμετρική πιθανότητα.
- Εμπειρική πιθανότητα.

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.
- Οριακή σχετική συχνότητα.
- Γεωμετρική πιθανότητα.
- Εμπειρική πιθανότητα.

$$\Downarrow$$

Έννοιες πιθανότητας

- Κλασική πιθανότητα.
- Οριακή σχετική συχνότητα.
- Γεωμετρική πιθανότητα.
- Εμπειρική πιθανότητα.

$$\Downarrow$$

Αξιωματική θεμελίωση του Kolmogorov.

Κλασική πιθανότητα

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές/ Δυνατές.

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές/ Δυνατές.
- Ο ορισμός ισχύει μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα δειγματικά σημεία.

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές/ Δυνατές.
- Ο ορισμός ισχύει μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Π.χ. Πιθανότητα ένας Έλληνας να έχει ύψος ≥ 1.80

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές/ Δυνατές.
- Ο ορισμός ισχύει μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Π.χ. Πιθανότητα ένας Έλληνας να έχει ύψος ≥ 1.80 = Ποσοστό Ελλήνων με ύψος ≥ 1.80

Κλασική πιθανότητα

- Πεπερασμένος πληθυσμός.
- Επιλογή ατόμου - Καταγραφή χαρακτηριστικού.
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές/ Δυνατές.
- Ο ορισμός ισχύει μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Π.χ. Πιθανότητα ένας Έλληνας να έχει ύψος ≥ 1.80
  $=$ Ποσοστό Ελλήνων με ύψος ≥ 1.80
  $=$ Πλήθος Ελλήνων με ύψος ≥ 1.80 / Πλήθος Ελλήνων.

Οριακή σχετική συχνότητα

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.
- Πιθανότητα ενδεχομένου

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.
- Πιθανότητα ενδεχομένου = Οριακή σχετική συχνότητα ενδεχομένου σε n επαναλήψεις, $n \to \infty$.

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.
- Πιθανότητα ενδεχομένου = Οριακή σχετική συχνότητα ενδεχομένου σε n επαναλήψεις, $n \to \infty$.
- Π.χ. Ρίψη νομίσματος επ΄ άπειρον.

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.
- Πιθανότητα ενδεχομένου
  = Οριακή σχετική συχνότητα ενδεχομένου σε n επαναλήψεις, $n \to \infty$.
- Π.χ. Ρίψη νομίσματος επ' άπειρον.
  Πιθανότητα ένδειξης "Γράμματα"

Οριακή σχετική συχνότητα

- Τυχαίο πείραμα που επαναλαμβάνεται.
- Σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σε n επαναλήψεις = Πλήθος επαναλήψεων στις οποίες πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο στις n επαναλήψεις / n.
- Πιθανότητα ενδεχομένου = Οριακή σχετική συχνότητα ενδεχομένου σε n επαναλήψεις, $n \to \infty$.
- Π.χ. Ρίψη νομίσματος επ' άπειρον.
  Πιθανότητα ένδειξης "Γράμματα"
  = Οριακή σχετική συχνότητα ένδειξης "Γράμματα".

Γεωμετρική πιθανότητα

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.
- Πιθανότητα ενδεχομένου A
  $=$ Εμβαδόν χωρίου A / Εμβαδόν χωρίου Ω

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.
- Πιθανότητα ενδεχομένου A
  $=$ Εμβαδόν χωρίου A / Εμβαδόν χωρίου Ω
- Ο ορισμός προϋποθέτει ότι τα δειγματικά σημεία ($=$ σημεία του γεωμετρικού σχήματος που απεικονίζει το δειγματικό χώρο) είναι ισοπίθανα.

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.
- Πιθανότητα ενδεχομένου A
  $=$ Εμβαδόν χωρίου A / Εμβαδόν χωρίου Ω
- Ο ορισμός προϋποθέτει ότι τα δειγματικά σημεία (= σημεία του γεωμετρικού σχήματος που απεικονίζει το δειγματικό χώρο) είναι ισοπίθανα.
- Π.χ. Ρίχνω τυχαία βέλος σε κυκλικό στόχο.

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.
- Πιθανότητα ενδεχομένου A
  $=$ Εμβαδόν χωρίου A / Εμβαδόν χωρίου Ω
- Ο ορισμός προϋποθέτει ότι τα δειγματικά σημεία (= σημεία του γεωμετρικού σχήματος που απεικονίζει το δειγματικό χώρο) είναι ισοπίθανα.
- Π.χ. Ρίχνω τυχαία βέλος σε κυκλικό στόχο.
  Πιθανότητα πετυχαίνω "κέντρο"

Γεωμετρική πιθανότητα

- Μόνο για πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα μπορούν να παρασταθούν ως γεωμετρικά σχήματα, συνήθως επίπεδα σχήματα.
- Πιθανότητα ενδεχομένου A
  = Εμβαδόν χωρίου A / Εμβαδόν χωρίου Ω
- Ο ορισμός προϋποθέτει ότι τα δειγματικά σημεία (= σημεία του γεωμετρικού σχήματος που απεικονίζει το δειγματικό χώρο) είναι ισοπίθανα.
- Π.χ. Ρίχνω τυχαία βέλος σε κυκλικό στόχο.
  Πιθανότητα πετυχαίνω "κέντρο"
  = Εμβαδόν "κέντρου" / Εμβαδόν κυκλικού στόχου.

Εμπειρική πιθανότητα

Εμπειρική πιθανότητα

- Πειράματα τύχης που δεν έχουν ισοπίθανα αποτελέσματα, ούτε επαναλαμβάνονται.

Εμπειρική πιθανότητα

- Πειράματα τύχης που δεν έχουν ισοπίθανα αποτελέσματα, ούτε επαναλαμβάνονται.
- Πιθανότητα = υποκειμενικό μέτρο βεβαιότητας.

Εμπειρική πιθανότητα

- Πειράματα τύχης που δεν έχουν ισοπίθανα αποτελέσματα, ούτε επαναλαμβάνονται.
- Πιθανότητα = υποκειμενικό μέτρο βεβαιότητας.
- Π.χ. Το Ομηρικό Πρόβλημα:

Εμπειρική πιθανότητα

- Πειράματα τύχης που δεν έχουν ισοπίθανα αποτελέσματα, ούτε επαναλαμβάνονται.
- Πιθανότητα = υποκειμενικό μέτρο βεβαιότητας.
- Π.χ. Το Ομηρικό Πρόβλημα:
  Ποιά η πιθανότητα η Ιλιάδα και η Οδύσσεια να είναι έργο του ίδιου δημιουργού (Ομήρου);

Εμπειρική πιθανότητα

- Πειράματα τύχης που δεν έχουν ισοπίθανα αποτελέσματα, ούτε επαναλαμβάνονται.
- Πιθανότητα = υποκειμενικό μέτρο βεβαιότητας.
- Π.χ. Το Ομηρικό Πρόβλημα:
  Ποιά η πιθανότητα η Ιλιάδα και η Οδύσσεια να είναι έργο του ίδιου δημιουργού (Ομήρου);
- Π.χ. Πιθαν. να βρω σήμερα τους γονείς μου σπίτι;

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο A $\to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)
  2. $P(\Omega) = 1$. (κανονικοποίηση)

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)
  2. $P(\Omega) = 1$. (κανονικοποίηση)
  3. $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο $\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
     (σ-προσθετικότητα)

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
    1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
    1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
    2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
    1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
    2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.
- Ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο;

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
    1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
    2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.
- Ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο; ;

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
  1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
  2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.
- Ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο; ; ;

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
    1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
    2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.
- Ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο; ; ; ;

Άσκηση 1: Το δίλημμα Monty Hall

- Ένας τηλεπαρουσιαστής εμφανίζει 3 πόρτες σε παίκτη.
- 1 πόρτα έχει δώρο, οι 2 πόρτες έχουν από έναν τράγο.
- Ο παίκτης μαντεύει μια πόρτα για το δώρο.
- Ο παρουσιαστής του ανοίγει μια από τις άλλες.
- Ο παίκτης έχει 2 στρατηγικές:
  1. Να μείνει πιστός στην επιλογή του.
  2. Να μετακινηθεί στην άλλη πόρτα που δεν άνοιξε.
- Ποιά στρατηγική μεγιστοποιεί την πιθανότητα να κερδίσει το δώρο; ; ; ;
- Να μετακινηθεί στην πόρτα που δεν άνοιξε (πιθ. κέρδους 2/3). Η στρατηγική να μείνει πιστός στην επιλογή του είναι υποδεέστερη (πιθ. κέρδους 1/3).

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.
- P(ο A να φέρει το άθροισμα των B, Γ)=;

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.
- $P($ο A να φέρει το άθροισμα των $B, \Gamma)=$; ;

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.
- $P($ο A να φέρει το άθροισμα των $B, \Gamma)=$; ; ;

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.
- $P($ο A να φέρει το άθροισμα των $B, \Gamma)=$; ; ; ;

Άσκηση 2: Τρεις παίκτες ρίχνουν ζάρι

- Οι παίκτες A, B, Γ ρίχνουν συνηθισμένο (εξάεδρο) ζάρι.
- $P($ο A να φέρει το άθροισμα των $B, \Gamma)=$; ; ; ; $= \frac{15}{6^3}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  $(4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία$)$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}.$
  $(4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία$)$.
- $P($το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος$)=$; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ; $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$. $(4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία$)$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  $(4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία$)$.
- $P($το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος$)=$; ; ; $= \frac{8}{16}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  $(4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία$)$.
- $P($το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος$)=$; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- $P($το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.$)=$; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  $(4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία$)$.
- $P($το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος$)=$; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- $P($το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.$)=$; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- $P($η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη$)=$; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- $P($η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη$)=$;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{6}{16}$.

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{6}{16}$.
- P(τουλάχιστον μια ρίψη να είναι ίση με 4)=;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{6}{16}$.
- P(τουλάχιστον μια ρίψη να είναι ίση με 4)=; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\dots,(4,4)\}$.
  ($4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία).
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.)=; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- P(η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη)=; ; ; $= \frac{6}{16}$.
- P(τουλάχιστον μια ρίψη να είναι ίση με 4)=; ; ;

Άσκηση 3: Ρίψη ζεύγους τετράεδρων ζαριών

- Πείραμα τύχης: Ρίψη ζεύγους δίκαιων τετράεδρων ζαριών.
- Δειγματικός χώρος: ; ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),\ldots,(4,4)\}$.
  $(4 \times 4 = 16$ δειγματικά σημεία$)$.
- $P($το άθροισμα των ρίψεων να είναι άρτιος$)=$; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- $P($το άθροισμα των ρίψεων να είναι περιτ.$)=$; ; ; $= \frac{8}{16}$.
- $P($η πρώτη ρίψη να είναι ίση με τη δεύτερη$)=$; ; ; $= \frac{4}{16}$.
- $P($η πρώτη ρίψη $>$ από τη δεύτερη$)=$; ; ; $= \frac{6}{16}$.
- $P($τουλάχιστον μια ρίψη να είναι ίση με 4$)=$; ; ; $= \frac{7}{16}$.

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

- Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι.

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

- Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι.
- P(Κανείς να μην στήσει τον άλλον πάνω από 15′)=;

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

- Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι.
- P(Κανείς να μην στήσει τον άλλον πάνω από 15′)=; ;

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

- Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι.
- P(Κανείς να μην στήσει τον άλλον πάνω από 15′)=; ; ;

Άσκηση 4: Ρωμαίος και Ιουλιέτα

- Ο Ρωμαίος και η Ιουλιέτα συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 12 και 1 το μεσημέρι.
- P(Κανείς να μην στήσει τον άλλον πάνω από $15'$)=; ; ; $= \frac{7}{16}$.

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.
- Ο παίκτης κερδίζει εφόσον ο δίσκος πέσει εξολοκλήρου εντός κάποιου τετραγώνου.

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.
- Ο παίκτης κερδίζει εφόσον ο δίσκος πέσει εξολοκλήρου εντός κάποιου τετραγώνου.
- P(κερδίζει ο παίκτης)=;

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.
- Ο παίκτης κερδίζει εφόσον ο δίσκος πέσει εξολοκλήρου εντός κάποιου τετραγώνου.
- $P($κερδίζει ο παίκτης$)=$; ;

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.
- Ο παίκτης κερδίζει εφόσον ο δίσκος πέσει εξολοκλήρου εντός κάποιου τετραγώνου.
- P(κερδίζει ο παίκτης)=; ; ;

Άσκηση 5: Το παιχνίδι Franc-Carreau

- Ένα δάπεδο είναι καλυμένο με τετράγωνα πλακάκια διαστάσεως $a \times a$ εκατοστών. Σε αυτό ρίπτεται τυχαία ένας δίσκος ακτίνας r εκατοστών.
- Ο παίκτης κερδίζει εφόσον ο δίσκος πέσει εξολοκλήρου εντός κάποιου τετραγώνου.
- $P(\text{κερδίζει ο παίκτης}) =;\ ;\ ; = \frac{(a-2r)^2}{a^2}$.

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:
  - 1.1 Σύνολα
  - 1.2 Μοντέλα Πιθανοτήτων
- Ασκήσεις:
  - 1.1 Προβλήματα 1,3
  - 1.2 Προβλήματα 5,6,7

Τέλος Διαλέξεως

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «*Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών*» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών 2015. Αντώνιος Οικονόμου. «Πιθανότητες και Στατιστική. Βασικές έννοιες και αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://opencourses.uoa.gr/courses/DI46/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.