7. ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ z

Όταν θα έχουμε τελειώσει το Κεφάλαιο αυτό θα μπορούμε να:

- ορίσουμε τον ***μετασχηματισμό z*** και τον ***μονόπλευρο μετασχηματισμό z*** και να περιγράψουμε τις βασικές διαφορές τους.

- περιγράψουμε τι είναι συνάρτηση μεταφοράς συστήματος διακριτού χρόνου και εξηγήσουμε έννοιες *όπως* ***περιοχή σύγκλισης***, ***πόλος*** και ***μηδενικό***.

- υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό z στοιχειωδών σημάτων.

- αναφέρουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού z.

- υπολογίζουμε εύκολα τον αντίστροφο μετασχηματισμό z μιας συνάρτησης, χωρίς να καταφεύγουμε στην εξίσωση αντιστροφής.

- επιλύουμε γραμμικές εξισώσεις διαφορών με αρχικές συνθήκες με τη βοήθεια του μονόπλευρου μετασχηματισμού z.

- υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου με τη βοήθεια της εξίσωσης διαφορών, η οποία συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.

- υπολογίζουμε την έξοδο ενός συστήματος, το οποίο δεν βρίσκεται απαραίτητα σε ***κατάσταση ηρεμίας***, όταν γνωρίζουμε την είσοδό του και την εξίσωση διαφορών η οποία συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.

- προσδιορίζουμε τη συμπεριφορά ενός συστήματος από τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του στο μιγαδικό επίπεδο.

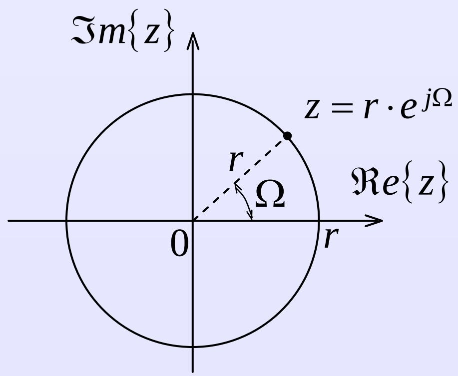
Ο ΑΜΦΙΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

Ο μετασχηματισμός z είναι ο αντίστοιχος Laplace για σήματα διακριτού χρόνου και αποτελεί γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Ο μετασχηματισμός z αντιστοιχεί στην ακολουθία $x(n)$ τη συνάρτηση:

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Ο $X(z)$ είναι μιγαδική συνάρτηση, της μιγαδικής μεταβλητής $z = r \cdot e^{j\Omega}$ και ονομάζεται ***αμφίπλευρος μετασχηματισμός z*** ή απλά ***μετασχηματισμός z***.



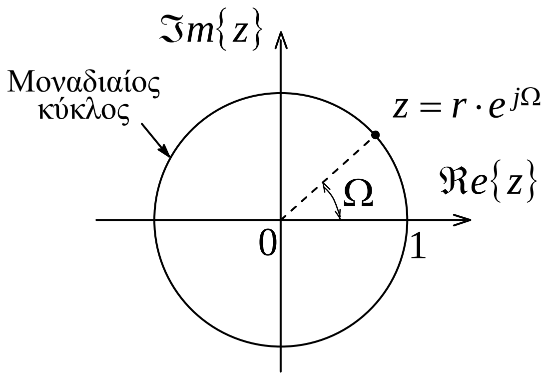
Το μιγαδικό επίπεδο - z

Η περιοχή τιμών του z, για τις οποίες ο μετασχηματισμός z έχει πεπερασμένη τιμή καλείται ***περιοχή σύγκλισης*** (ΠΣ) (*region of convergence ROC*)

Παρατηρήσεις

Αν ο μετασχηματισμός z υπάρχει και για τιμές $r = 1$,δηλαδή, για τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου $z = e^{j\Omega}$ τότε

$$X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\Omega n} = F[x(n)]$$



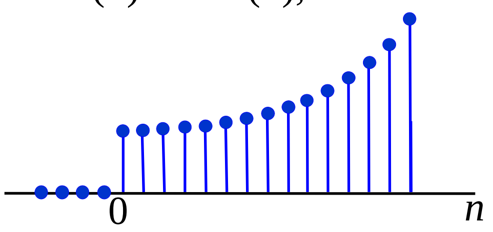
Ο μετασχηματισμός z μετατρέπεται σε μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου για τις τιμές του z που βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο.

Για την περίπτωση κατά την οποία $r \neq 1$ έχουμε

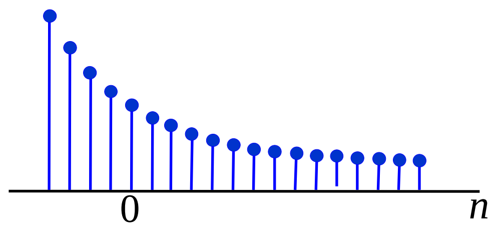
$$X(z)\big|_{z=re^{j\Omega}} = X\left(re^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x(n)\, r^{n}\right] e^{-j\Omega n} = F[x(n)\cdot r^{n}]$$

Παρατηρούμε ότι $X(r\,e^{j\Omega})$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $x(n)$ πολλαπλασιασμένης με την πραγματική εκθετική ακολουθία r^{-n}.

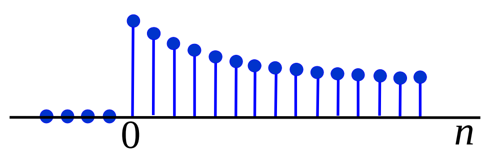
Η παρουσία του όρου r^{-n} παρέχει τη δυνατότητα σύγκλισης του αθροίσματος και κατά συνέπεια την ύπαρξη του μετασχηματισμού z ακόμη και αν δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας $x(n)$.



Η ακολουθία x(n) για την οποία δεν υπάρχει ο DTFT.



Ο παράγοντας εξασθένισης r^{-n} .



Η ακολουθία $x(n)r^{-n}$ *η οποία είναι αριθμήσιμη κατά απόλυτο τιμή*

Παράδειγμα (*σήμα πεπερασμένης έκτασης*)

Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός z του τετραγωνικού παραθύρου πλάτους *N+1*.

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απάντηση

$$X(z) = \begin{cases} z^{-N} \dfrac{z^{N+1} - 1}{z - 1} = \dfrac{z^{N+1} - 1}{z^{N}(z-1)}, & z \neq 1, z \neq 0 \\ N + 1, & z = 1 \end{cases}$$

Η περιοχή σύγκλισης καλύπτει όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το μηδέν.

Παράδειγμα *(το εκθετικό αιτιατό σήμα)*

Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός z του αιτιατού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου:

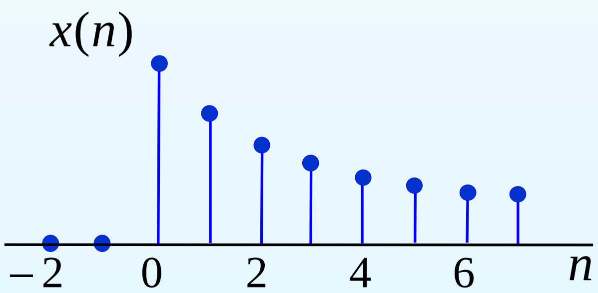
$$x(n) = a^n u(n)$$

όπου α πραγματικός αριθμός.

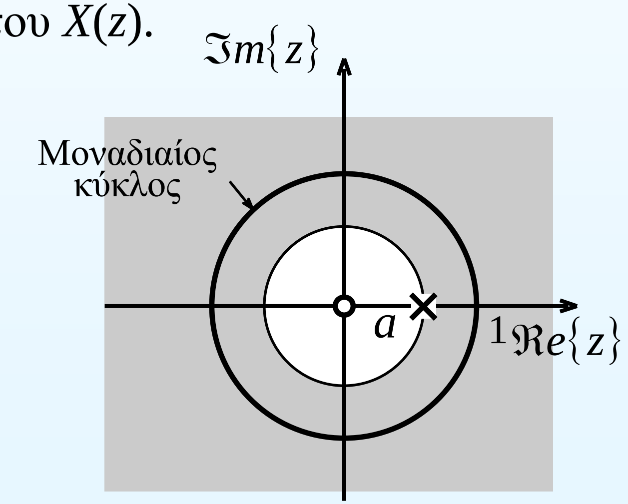
Απάντηση

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad \text{με περιοχή σύγκλισης:} \quad |z| > |a|$$

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού z εκτείνεται έξω από κύκλο με τη μικρότερη ακτίνα ο οποίος περιέχει τον πόλο του $X(z)$.



Το εκθετικό σήμα $x(n) = a^n u(n)$ όταν a είναι πραγματικός αριθμός < 1.



Η περιοχή σύκλισης, ο πόλος και το μηδενικό του μετασχηματισμού z του σήματος $x(n)$.

Ο μετασχηματισμός z για τη μοναδιαία βηματική ακολουθία είναι

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \qquad \text{με περιοχή σύγκλισης:} \quad |z| > 1$$

Ο μετασχηματισμός z για την ακολουθία $x(n) = n\,a^{n-1}\,u(n)$ είναι

$$x(n) = n\,a^{n-1}u(n) \quad \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} \quad \frac{z}{(z-a)^2} \qquad \text{με περιοχή σύγκλισης:} \quad |z| > |a|$$

Ο μετασχηματισμός z για το μοναδιαίο δείγμα $x(n) = \delta(n)$ είναι

$$Z\left[\delta(n)\right] = 1, \qquad \text{με περιοχή σύγκλισης:} \quad z \neq 0$$

και του ολισθημένου κατά k βήματα μοναδιαίου δείγματος $\delta(n - k)$ είναι

$$Z\left[\delta(n-k)\right] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ z^{-k}, & k \geq 0 \end{cases}$$

η περιοχή σύγκλισης καλύπτει όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από την αρχή $C - \{0\}$.

Παράδειγμα (αυστηρά μη *αιτιατό εκθετικό σήμα*)

Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός z του αυστηρά μη αιτιατού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου:

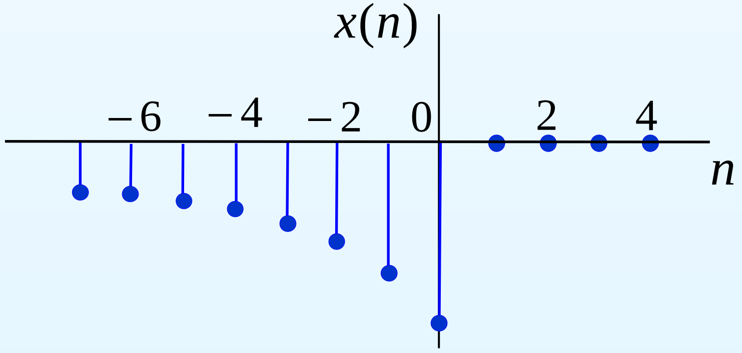
$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$

όπου α πραγματικός αριθμός.

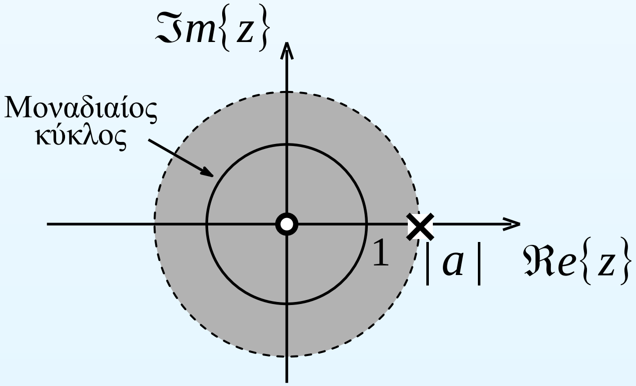
Απάντηση

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad \text{με περιοχή σύγκλισης:} \quad |z| < |a|$$

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού z είναι το εσωτερικό κύκλου με τη μεγαλύτερη ακτίνα ο οποίος δεν περιέχει τον πόλο του $X(z)$.



Το αυστηρά μη εκθετικό σήμα x(n) = aⁿ u(n) όταν a είναι πραγματικός αριθμός > 1.



Η περιοχή σύκλισης, ο πόλος και το μηδενικό του μετασχηματισμού z του σήματος x(n).

Παράδειγμα (δεξιόπλευρη ακολουθία)

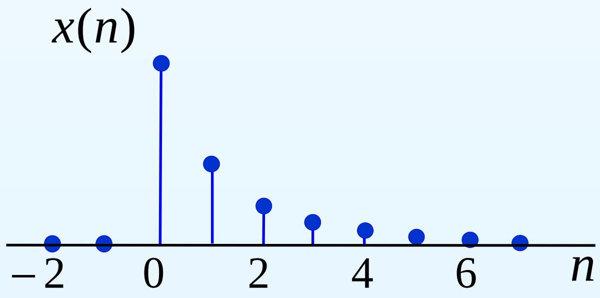
Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός z του σήματος:

$$x(n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u(n)$$

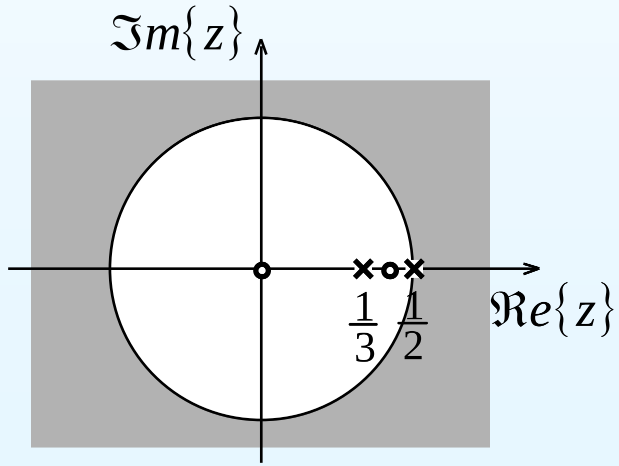
Απάντηση

$$X(z) = \frac{z(2z - 5/6)}{(z - 1/2)(z - 1/3)}$$ Με περιοχή σύγκλισης $|z| > \frac{1}{3}$

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού z εκτείνεται έξω από κύκλο με τη μικρότερη ακτίνα ο οποίος περιέχει τους πόλους του $X(z)$.



Το σήμα $x(n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u(n)$



Η περιοχή σύκλισης, οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχηματισμού z του σήματος $x(n)$.

Παράδειγμα (αμφίπλευρη ακολουθία)

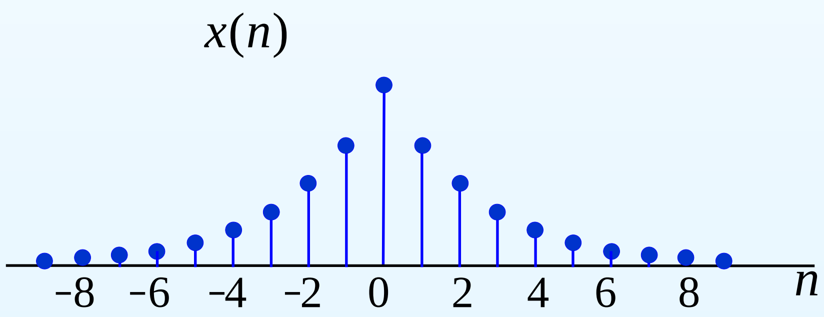
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z του σήματος

$$x(n) = a^{|n|}, \; -\infty < n < \infty, \quad |a| < 1$$

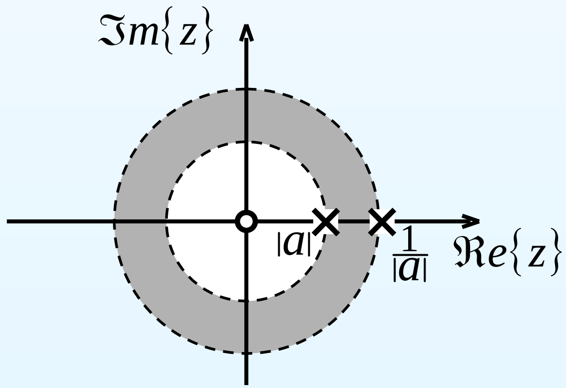
Απάντηση

$$X(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{az}{1-az}$$ Με περιοχή σύγκλισης $$|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού z έχει την μορφή δακτυλίου.



Η ακολουθία x(n) = a^{|n|} όταν a είναι πραγματικός αριθμός < 1.



Η περιοχή σύκλισης, οι πόλοι και το μηδενικό του μετασχηματισμού z της ακολουθίας x(n).

Παράδειγμα (αμφίπλευρη ακολουθία)

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός z του σήματος

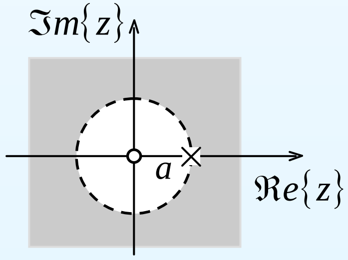
$$x(n) = a^n, \qquad -\infty < n < \infty$$

Λύση

Το σήμα $x(n)$ γράφεται ως $x(n) = a^n = a^n u(n) + a^n u(-n-1)$

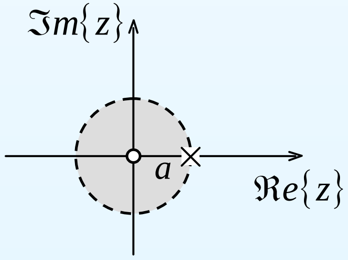
Για το αιτιατό τμήμα έχουμε

$$a^n u(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-a}$$



Για το μη αιτιατό τμήμα έχουμε

$$a^n u(-n-1) \overset{Z}{\longleftrightarrow} -\frac{z}{z-a}$$



Επειδή η τομή των επιμέρους μετασχηματισμών z είναι το κένο σύνολο η ακολουθία $x(n) = a^n$ δεν έχει αμφίπλευρο μετασχηματισμό z.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Z

Γραμμικότητα

Αν $X_1(z) = Z[x_1(n)]$ με πεδίο σύγκλισης P_1 και $X_2(z) = Z[x_2(n)]$ με πεδίο σύγκλισης P_2 τότε

$$ax_1(n) + bx_2(n) \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} aX_1(n) + bX_2(n)$$

με περιοχή σύγκλισης τουλάχιστον $P = P_1 \cap P_2$

Ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης

$$x(n - n_0) \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} z^{n_0} X(z)$$

με την ίδια περιοχή σύγκλισης.

Για $n_0 = -1$ έχουμε $Z[x(n-1)] = z^{-1} X(z)$. Το σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο προκαλεί χρονική καθυστέρηση ενός δείγματος συμβολίζεται με z^{-1}.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow x(n-1)$$

Ιδιότητα της συνέλιξης ή συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \cdot X_2(z)$$

με περιοχή σύγκλισης τουλάχιστον $P = P_1 \bigcap P_2$

Ιδιότητα της διαμόρφωσης ή ολίσθηση συχνότητας – κλιμάκωση στο πεδίο του z

Αν $X(z) = Z[x(n)]$ με πεδίο σύγκλισης $P = \{z \in C: R+ < z < R^{-}$ τότε

$$y(n) = c^n x(n) \xleftrightarrow{Z} Y(z) = X\left(\frac{z}{c}\right)$$

με περιοχή σύγκλισης $|c|\, R^+ < z < |c|\, R^-$

Ιδιότητα της παραγώγισης στο πεδίο του z

$$n\,x(n) \xleftrightarrow{Z} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Με την ίδια περιοχή σύγκλισης

Ιδιότητα της συζυγίας (συζυγής ακολουθία)

$$x^*(n) \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) \quad R^* < z < R^-$$

$$\Re e[x(n)] \xleftrightarrow{Z} \tfrac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$$

$$\Im m[x(n)] \xleftrightarrow{Z} \tfrac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$$

Κατοπτρισμός στο χρόνο

$$x(-n) \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1})$$

με περιοχή σύγκλισης $\frac{1}{R^-} < z < \frac{1}{R^+}$

Συσχέτιση

Αν θεωρήσουμε δύο σήματα ως διανύσματα, ένας αριθμός που μετράει την ομοιότητά τους είναι το εσωτερικό τους γινόμενο, τούτο γίνεται μέγιστο για διανύσματα (σήματα) που συμπίπτουν ενώ μηδενίζεται για διανύσματα που είναι κάθετα.

Η ***συνάρτηση*** - ακολουθία ***συσχέτισης*** ή ***ετεροσυσχέτιση*** των σήματων διακριτού χρόνου - ακολουθιών $x(n)$ και $y(n)$ συμβολίζεται ως r_{xy} και ορίζεται

$$r_{xy}(l) = x(n) * y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, y(n-l), \quad -\infty < l < \infty$$

Η ανεξάρτητη μεταβλητή l εκφράζει την μετατόπιση μεταξύ των δύο σημάτων $x(n)$ και $y(n)$ και ονομάζεται ***καθυστέρηση*** (*lag*).

Αν $X(z) = Z[x(n)]$ με πεδίο σύγκλισης P_1 και $Y(z) = Z[y(n)]$ με πεδίο σύγκλισης P_2 τότε

$$r_{xy}(l) \xleftrightarrow{Z} X(z) \cdot Y(z^{-1})$$

με περιοχή σύγκλισης τουλάχιστον $P = P_1 \bigcap P_2$

Ο συντελεστής συσχέτισης σημάτων διακριτού χρόνου συμβολίζεται ως $\rho_{xy}(l)$ και ορίζεται από την

$$\rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{E_x}\sqrt{E_y}}, \quad -\infty < l < \infty$$

όπου E_x και E_y είναι η ενέργεια των σημάτων $x(n)$ και $y(n)$ αντίστοιχα. Η $\rho_{xy}(l)$ είναι συνάρτηση μόνο της καθυστέρησης των δύο σημάτων και όχι των ενεργειών τους

Η ***συνάρτηση αυτοσυσχέτισης*** του σήματος διακριτού χρόνου $x(n)$ ως $r_{xx}(l)$ και ορίζεται

$$r_{xx}(l) = x(n) * x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, x(n-l), \quad -\infty < l < \infty$$

και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

Η ενέργεια του σήματος $x(n)$ είναι ίση με τη τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του για $l = 0$

$$r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = E_x$$

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ισούται με τη φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος.

$$r_{xx}(l) = x(n) \cdot x^*(-n) \xleftrightarrow{F} |X(\Omega)|^2$$

και από το θεώρημα του Parseval έχουμε

$$E_x = r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega$$

Ο ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

Ο ***μονόπλευρος μετασχηματισμός z*** ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathcal{X}(z) = X^{+}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z του σήματος $x(n)$ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό z του σήματος $x(n)\,u(n)$.

Η περιοχή σύγκλισης του μονόπλευρου μετασχηματισμού z είναι πάντα το εξωτερικό μέρος κύκλου με τη μικρότερη ακτίνα R_x που περιλαμβάνει τους πόλου του σήματος.

Επειδή το κάτω όριο του αθροίσματος ορισμού του μονόπλευρου μετασχηματισμού z είναι το μηδέν ο μονόπλευρος μετασχηματισμός έχει την ιδιότητα ***της δεξιάς*** και ***της αριστερής ολίσθησης***.

Οι ιδιότητες αυτές και η ιδιότητα της συνέλιξης παρέχει στο μονόπλευρο μετασχηματισμό z τη δυνατότητα επίλυσης εξισώσεων διαφορών, οι οποίες έχουν μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού Z

- ***Ιδιότητα της δεξιάς ολίσθησης - Καθυστέρηση***

$$x(n-n_0) \xleftrightarrow{Z^+} z^{-n_0}\mathcal{X}(z) + z^{-n_0}\sum_{i=1}^{n_0} x(-i)\, z^i, \qquad \text{για κάθε } n_0 \geq 1$$

Παρατηρούμε ότι κατά τη δεξιά ολίσθηση νέα δείγματα εισέρχονται στο διάστημα [0, ∞) θα πρέπει να λάβουν και αυτά μέρος στους υπολογισμούς. Τα νέα δείγματα είναι τα $x(-1)$, $x(-2)$, ..., $x(-n_0)$.

Για $n_0 = 1$ έχουμε $Z^+[x(n-1)] = z^{-1}\mathcal{X}(z) + x(-1)$

Ιδιότητα της αριστερής ολίσθησης - Προήγηση

$$z^{-n_0} Z^{+}\left[x(n-n_0)\right] = \mathcal{X}(z) - \sum_{i=1}^{n_0-1} x(i)\, z^{-i}, \qquad \text{για κάθε } n_0 \geq 1$$

Παρατηρούμε ότι κατά την αριστερή ολίσθηση κάποια από τα υπάρχοντα δείγματα βρίσκονται εκτός διαστήματος [0, ∞) και συνεπώς θα πρέπει να αφαιρεθούν από το συνολικό άθροισμα. Τα νέα δείγματα είναι τα $x(0)$, $x(1)$, ..., $x(n_0\text{-}1)$.

Για $n_0 = 1$ έχουμε $\quad z^{-1} Z^{+}[x(n+1)] = \mathcal{X}(z) + x(0)$

Θεώρημα της Αρχικής Τιμής

Αν το σήμα $x(n)$ έχει ΜΜz $\mathcal{X}(z)$ με ακτίνα σύγκλισης R_x, τότε

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} \mathcal{X}(z)$$

Θεώρημα της Τελικής Τιμής

Αν το σήμα $x(n)$ έχει ΜΜz $\mathcal{X}(z)$ με ακτίνα σύγκλισης R_x, τότε

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (z-1)\mathcal{X}(z)$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος και ο αμφίπλευρος μετασχηματισμό z του σήματος

$$y(n) = a^{n+1} u(n+1)$$

Απάντηση

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός z είναι

$$Z^{+}[y(n)] = \frac{a}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός z είναι

$$Z[y(n)] = \frac{z}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

Ο ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ z

Αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός *z* ενός σήματος τότε η ανασύνθεση του σήματος γίνεται με τη βοήθεια της

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

όπου *C* είναι μια αριστερόστροφη κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης γύρω από την αρχή των αξόνων η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού *z*, η δε ολοκλήρωση γίνεται αντίστροφα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Ο απευθείας υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού *z* μέσω του παραπάνω ολοκληρώματος είναι επίπονη διαδικασία και γι' αυτό συνήθως ακολουθούνται έμμεσοι τρόποι εύρεσης του αντίστροφου μετασχηματισμού *z*.

Υπολογισμός του αντίστροφου Mz για ρητές συναρτήσεις

Αν η συνάρτηση $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση τότε την αναπτύσσουμε σε απλά κλάσματα και τότε εύκολα υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό z, με τη χρήση γνωστών μετασχηματισμών z.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το σήμα το οποίο έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση:

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

Απάντηση

Ο μετασχηματισμός z αναλύεται σε απλά κλάσματα ως

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

```
b = [3, -5/6];
a = poly([1/4, 1/3]);
[R,p,C] = residuez(b,a)
```

```
R =
   2.0000
   1.0000
p =
   0.3333
   0.2500
C =
    []
```

Το σήμα $x(n)$ είναι ίσο με το άθροισμα των αντιστόφων Mz των απλών κλασμάτων οι οποίοι βρίσκονται εύκολα με τη βοήθεια του ζεύγους 4 του Πίνακα 7.2.

$$x(n) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u(n) + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το σήμα το οποίο έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση:

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)} \qquad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

Απάντηση

Ο μετασχηματισμός z αναλύεται σε απλά κλάσματα ως

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

Το σήμα $x(n)$ είναι ίσο με το άθροισμα των αντιστόφων Μz των απλών κλασμάτων οι οποίοι βρίσκονται εύκολα με τη βοήθεια των ζευγών 4 και 5 του Πίνακα 7.2.

$$x(n) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u(n) - 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το σήμα το οποίο έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2}$$

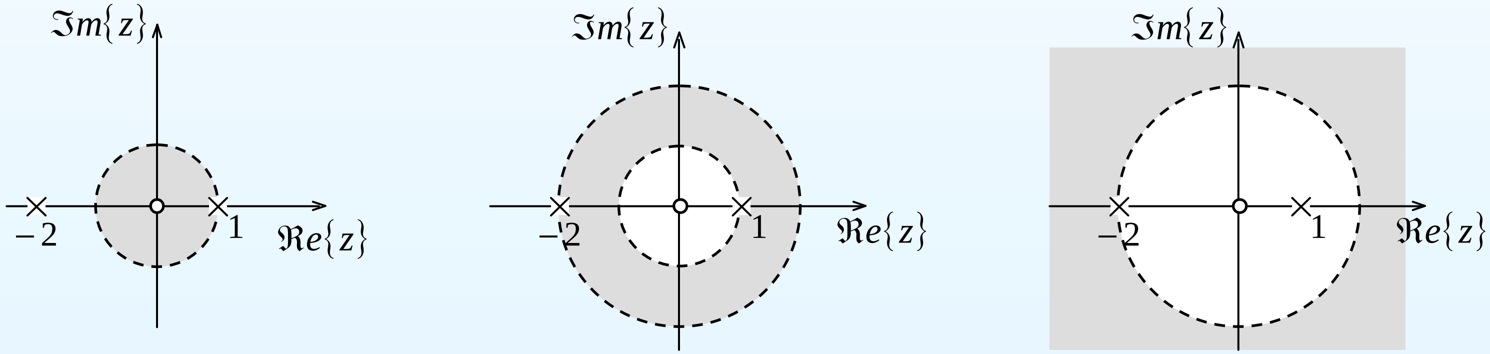
Λύση

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα τη συνάρτηση $X(z)/z$ και έχουμε

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z^2 + z - 2} = -\frac{1}{3}\frac{1}{z+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{z-1} \Rightarrow \qquad X(z) = -\frac{1}{3}\frac{z}{z+2} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-1}$$

Οι πιθανές περιοχές σύγκλισης του Mz του σήματος είναι

$|z| < 1 \qquad 1 < |z| < 2 \qquad 2 < |z| < \infty$



$$x(n) = \tfrac{1}{3}(-2)^n u(-n-1) - \tfrac{1}{3}u(-n-1)$$

$$x(n) = \tfrac{1}{3}(-2)^n u(-n-1) - \tfrac{1}{3}u(n)$$

$$x(n) = \tfrac{1}{3}(-2)^n u(n) - \tfrac{1}{3}u(n)$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το αιτιατό σήμα δικριτού χρόνου το οποίο έχει μετασχηματισμό z τη συνάρτηση

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

Απάντηση

$$x(n) = \left(2^n - 1\right) u(n)$$

$$x(n) = \left(2^n - 1\right) u(n-1)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ Z

Στο παράδειγμα που ακολουθεί προσδιορίζεται, χωρίς να καταφύγουμε στο άθροισμα της συνέλιξης, η ακολουθία εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου, αν η κρουστική απόκριση και η είσοδός του είναι ακολουθίες πεπερασμένης έκτασης.

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί η ακολουθία εξόδου ενός ΓΧΑ διακριτού συστήματος, το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(n) = \{1, 2, 3\}$ όταν διεγείρεται από την ακολουθία $x(n) = \{3, 4, 5, 2\}$.

Απάντηση

$$y(n) = \{3, 10, 22, 24, 19, 6\}$$

```
x=[3,4,5,2];
h=[1,2,3];
y=conv(h,x)
```

```
h=[1,2,3];
y=[3,10,22,24,19,6];
x=deconv(y,h)
```

```
function[y,ny]=conv_m(x,nx,h,nh)
% Modified convolution routine for signal processing
%--------------------------------
%[x,nx] = first signal
%[h,nh] = second signal
%[y,ny] = convolution result
%--------------------------------
nyb=nx(1)+nh(1);
nye=nx(length(x))+nh(length(h));
ny=[nyb:nye];
y=conv(x,h);
```

```
x1 = [3 11 7 0 -1 4 2];
n1 = [-3:3];
x2 = [2 4 3 5];
n2 = [-2:1];
[x3,n3] = conv_m(x1,n1,x2,n2);
```

▶ Συστήματα τα οποία χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

Το σήμα εισόδου $x(n)$ και το σήμα εξόδου $y(n)$ ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου ικανοποιούν μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \quad \text{με} \quad a_0 = 1$$

Το σήμα εισόδου, $x(n)$, και το σήμα εξόδου, $y(n)$, ενός ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με το άθροισμα της συνέλιξης.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Η ευστάθεια και η αιτιατότητα προσδιορίζουν την περιοχή σύγκλισης

Παράδειγμα (Σύστημα διακριτού χρόνου πρώτης τάξης)

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του αιτιατού ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου πρώτης τάξης, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - a\, y(n-1) = b\, x(n)$$

όπου a και b θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{b}{1 - a\, z^{-1}}$$

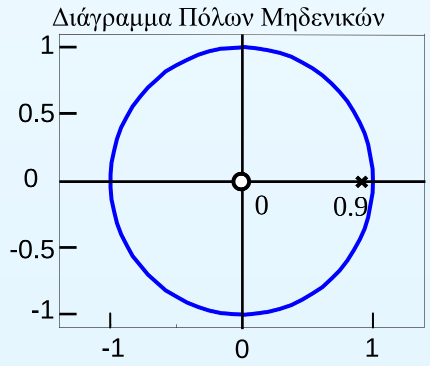
Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > a$.

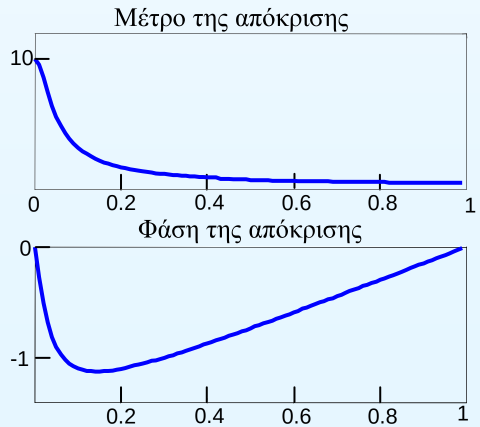
Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = Z^{-1}[H(z)] = b \cdot a^n\, u(n)$$

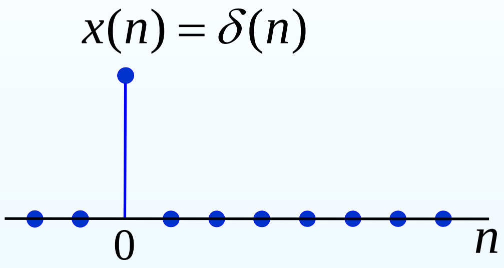
```
b = [1,0];
a = [1, -0.9];
zplane(b,a);
title(' Διάγραμμα Πόλων
 Μηδενικών ');
text(0.85,-0.1,'0.9');
text(0.01,-0.1,'0');
```

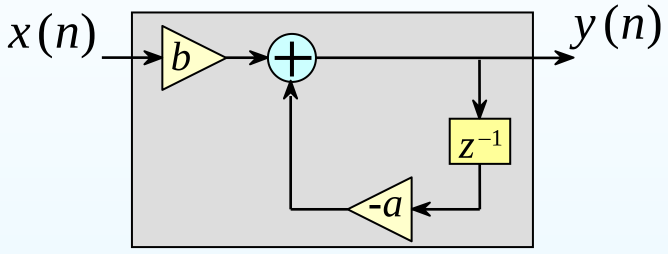
```
b=[1,0];
a=[1, -0.9];
[H,W]=freqz(b,a,100);
subplot(2,1,1); plot(W/pi,abs(H));
title(' Μέτρο της απόκρισης ')
subplot(2,1,2); plot(W/pi,angle(H));
title(' Φάση της απόκρισης ')
```

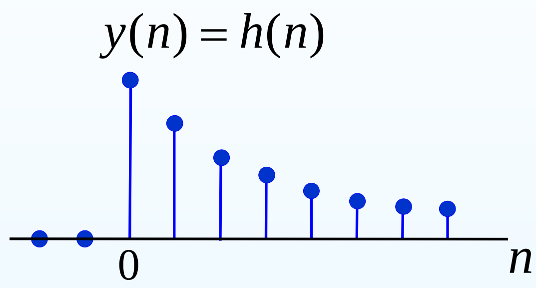




Το σύστημα πρώτης τάξης διακριτού χρόνου όπως αυτό έχει υλοποιηθεί με τη βοήθεια μιας μονάδας καθυστέρησης ενός δείγματος, ενός αθροιστή και δύο πολλαπλασιαστών και η κρουστική του απόκριση, δηλαδή, η ακολουθία εξόδου του όταν η είσοδός του είναι η κρουστική ακολουθία.








```
b = [b,0];
a = [1, -a];
subplot(2,3,1); zplane(b,a);
title('Διάγραμμα πόλων-μηδενικών');
```

```
[x,n] = impseq(0, -20, 120);
h = filter(b,a,x);
subplot(2,3,2); stem(n,h);
xlabel(' n')
ylabel(' h(n) ')
title(' Κρουστική απόκριση ')
```

Παράδειγμα (Σύστημα διακριτού χρόνου δεύτερης τάξης)

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του αιτιατού ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου πρώτης τάξης, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - a_1\, y(n-1) + a_2\, y(n-2) = x(n)$$

όπου a_1 και α_2 πραγματικοί αριθμοί.

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1\, z^{-1} + a_2\, z^{-2}}$$

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό η περιοχή σύγκλισης είναι $|z| > R$.

```
b=[1];
a=[1, -a1, a2];

[H,W] = freqz(b,a,1000);

subplot(2,3,3); plot(W/pi,abs(H));
xlabel(' Συχνότητα σε μονάδες π ')
ylabel(' Μέτρο σε Volts ')
title(' Απόκριση πλάτους ')

subplot(2,3,6); plot(W/pi,angle(H));
xlabel(' Συχνότητα σε μονάδες π ')
ylabel(' Φάση σε μονάδες π ')
title(' Απόκριση φάσης ')
```

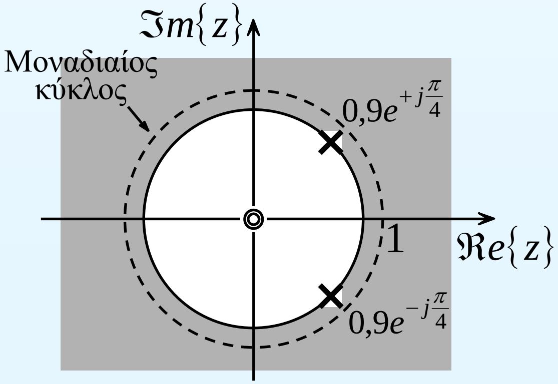
Αν a_1 = -1,2728 και a_2 = 0,81 το σύστημα έχει δύο συζυγείς πόλους τους 0,9 $e^{\pm j\pi/4}$. Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως

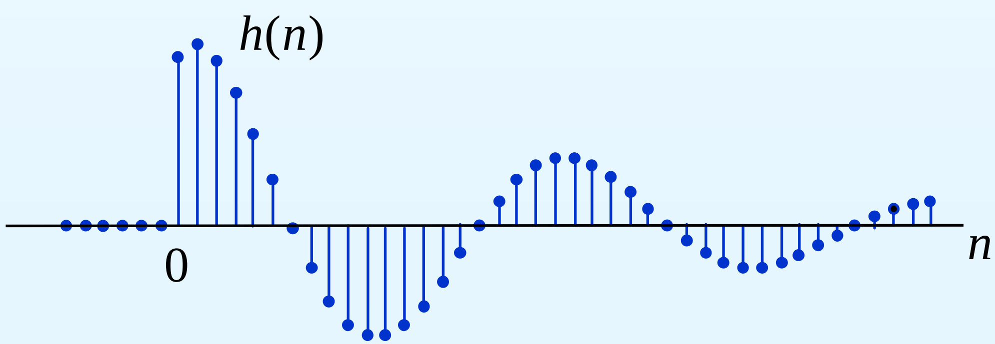
$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - 0{,}9 e^{+j\frac{\pi}{4}} z^{-1}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{+j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - 0{,}9 e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1}}$$

και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = \sqrt{2}\,(0{,}9)^n \cos\left[(n-1)\tfrac{\pi}{4}\right] u(n)$$

Στο Σχήμα περιγράφεται η περιοχή σύγκλισης οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι, το μηδενικό με πολλαπλότητα 2 του συστήματος διακριτού χρόνου και η κρουστική του απόκριση η οποία είναι μία ***φθίνουσα*** ημιτονοειδής ακολουθία. Το σύστημα είναι ***ευσταθές***.





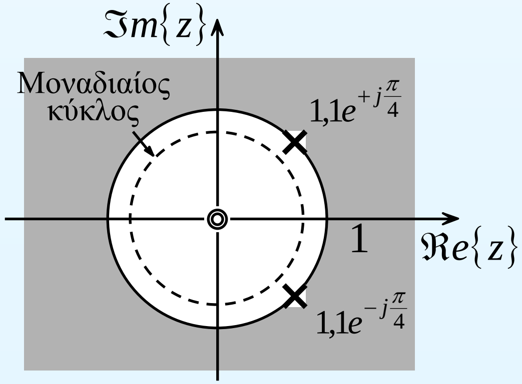
Αν a_1 = -1,5556 και a_2 = 1,21 το σύστημα έχει δύο συζυγείς πόλους τους 1,1 $e^{\pm j\pi/4}$. Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ αναλύεται σε απλά κλάσματα ως

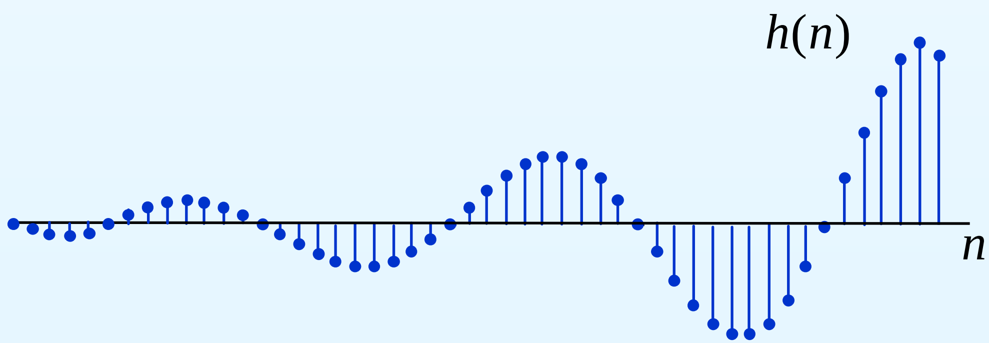
$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - 1{,}1 e^{+j\frac{\pi}{4}} z^{-1}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{+j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - 1{,}1 e^{-j\frac{\pi}{4}} z^{-1}}$$

και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = \sqrt{2}\,(1{,}1)^n \cos\left[(n-1)\tfrac{\pi}{4}\right] u(n)$$

Στο Σχήμα περιγράφεται η περιοχή σύγκλισης οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι του, το μηδενικό με πολλαπλότητα 2 του συστήματος διακριτού χρόνου και η κρουστική του απόκριση η οποία είναι μία ***αύξουσα*** ημιτονοειδής ακολουθία. Το σύστημα τώρα είναι ***μη ευσταθές***.





Παράδειγμα

Έστω το αιτιατό σύστημα του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν τη γραμμική εξίσωση διαφορών

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό η περιοχή σύγκλισης είναι $|z|>\frac{1}{2}$.

Επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή πρέπει να γίνει διαίρεση πριν την ανάλυση σε απλά κλάσματα. Έτσι έχουμε για την κρουστική απόκριση του συστήματος

$$h(n)=Z^{-1}[H(z)]=Z^{-1}\left[-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]=-\frac{2}{3}\delta(n)+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$$

Παράδειγμα (*προσδιορισμός συνάρτησης μεταφοράς – κρουστικής απόκρισης*)

Δίνεται το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου του οποίοιυ η είσοδος και η έξοδος συνδέονται από την εξίσωση διαφορών

$$y(n) - 0{,}5y(n-1) = x(n)$$

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Απάντηση

Η συνάρτηση μεταφοράς μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{1}{1-0{,}5z^{-1}}$$

με περιοχή σύγκλισης $|\,z\,| > 0{,}5$ αφού το σύστημα είναι αιτιατό.

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(n) = (0{,}5)^n u(n)$$

Παράδειγμα (*προσδιορισμός εξόδου χωρίς αρχικές συνθήκες*)

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος αν το σήμα εισόδου είναι $x(n) = u(n)$ και το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς μεταφοράς είναι $H(z) = \dfrac{1}{1-0{,}5z^{-1}}$ με ΠΣ |z| > 0,5

Ο Mz της ακολουθίας εισόδου είναι $X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$ με ΠΣ |z| > 0,5

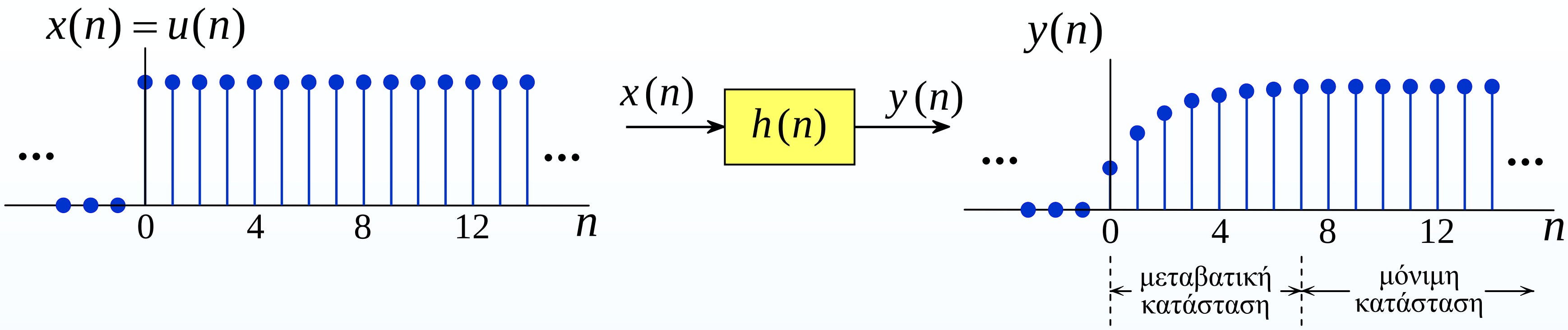
Ο Mz της ακολουθίας εξόδου είναι

$$Y(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{1}{1-0{,}5z^{-1}}\,\frac{1}{1-z^{-1}} = -\frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} + \frac{2}{1-z^{-1}}$$

με περιοχή σύγκλισης την τομή των δύο επιμέρους περιοχών σύγκλισης, δηλαδή, |z| > 1.

Η ακολουθία εξόδου το συστήματος είναι

$$y(n) = -(0{,}5)^n u(n) + 2u(n)$$



Αν δεν έχουμε αρχικές συνθήκες τότε η έξοδος του συστήματος προσδιορίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης γνωρίζοντας τη συνάρτηση μεταφοράς και το μετασχηματισμό z του σήματος εισόδου.

Αν έχουμε αρχικές συνθήκες τότε στην εξίσωση διαφορών λόγω της ιδιότητας της αριστερής ολίσθησης του μετασχηματισμού z

$$Z^{+}[x(n-1)] = z^{-1}\mathcal{X}(z) + x(-1)$$

συμπεριλαμβάνουμε τις αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα (*προσδιορισμός εξόδου με αρχικές συνθήκες*)

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος αν το σήμα εισόδου είναι $x(n) = u(n)$ με αρχική συνθήκη $y(-1) = 1$.

Λύση:

Εφαρμόζουμε μονόπλευρο μετασχηματισμό z και στα δύο μέρη της εξίσωσης διαφορών $y(n) - 0{,}5\, y(n-1) = x(n)$ έχουμε

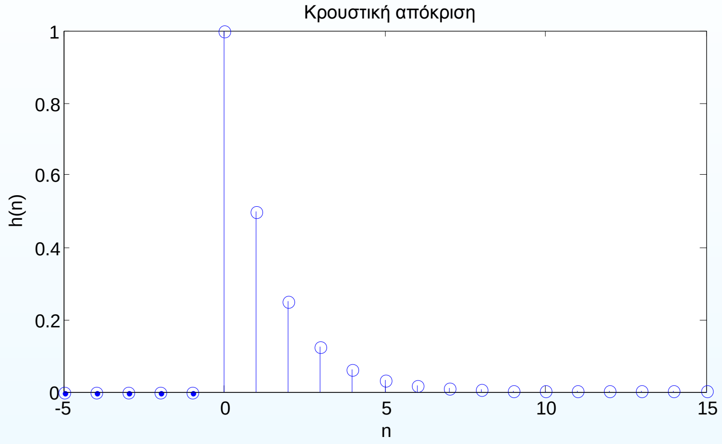
$$Y^+(z) - 0{,}5\left[z^{-1}Y^+(z) + y(-1)\right] = X^+(z)$$

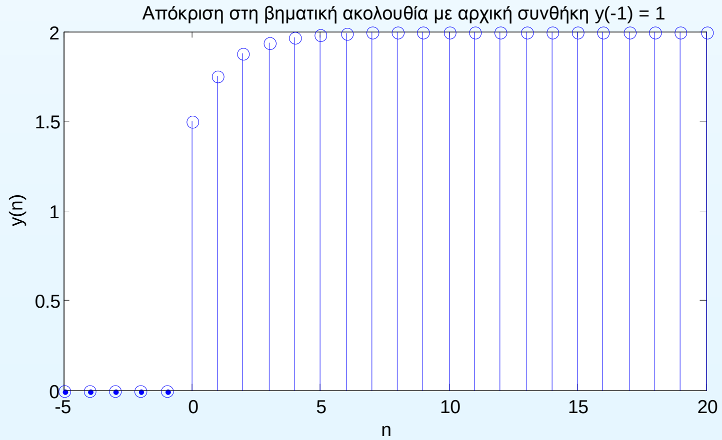
$$\begin{aligned} Y^+(z) &= \frac{1}{1-0{,}5\,z^{-1}}X^+(z) + \frac{0{,}5}{1-0{,}5\,z^{-1}} \\ &= H(z)\,X^+(z) + \frac{0{,}5}{1-0{,}5\,z^{-1}} \\ &= Y_o(z) + Y_i(z) \end{aligned}$$

όπου
$$Y_o(z) = H(z)\,X^+(z) = \frac{1}{1-0{,}5\,z^{-1}}\,\frac{1}{1-z^{-1}} = -\frac{1}{1-0{,}5\,z^{-1}} + 2\frac{1}{1-z^{-1}}$$
είναι ο μετασχηματισμός z της εξόδου του συστήματος ***για μηδενικές αρχικές συνθήκες***. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός z δίνει
$$y_o(n) = -(0{,}5)^n u(n) + 2u(n)$$
η οποία ονομάζεται ***απόκριση μηδενικής κατάστασης*** (*zero stage response*) και
$$Y_i(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-0{,}5\,z^{-1}}$$
είναι ο μετασχηματισμός z της εξόδου του συστήματος ο οποίος ***προέρχεται από τις αρχικές συνθήκες*** του συστήματος. Η συνεισφορά του όρου στην έξοδο του συστήματος βρίσκεται με αντίστροφο μετασχηματισμό z και είναι
$$y_i(n) = \frac{1}{2}(0{,}5)^n u(n)$$
η οποία ονομάζεται ***απόκριση μηδενικής εισόδου*** (*zero input response*). Η έξοδος του συστήματος είναι
$$\begin{aligned} y(n) = y_o(n) + y_i(n) &= -(0{,}5)^n u(n) + 2u(n) + \frac{1}{2}(0{,}5)^n u(n) \\ &= -(0{,}5)^{n+1} u(n) + 2u(n) \end{aligned}$$

```
b=[1];
a=[1, -0.5];

subplot(2,3,1); zplane(b,a);
title(' Διάγραμμα πόλων μηδενικών');
[x,n] = impseq(0, -5, 15);
h = filter(b,a,x);
subplot(2,3,2); stem(n,h);
xlabel(' n')
ylabel(' h(n) ')
title(' Κρουστικ΄απόκριση')

Y=[1]; % Αρχικές συνθήκες εξόδου
X=[0]; % Αρχικές συνθήκες εισόδου
xic=filtic(b,a,Y,X);
 [u,n] = stepseq(0, 0, 20);
y = filter(b,a,u,xic);
[u,n] = stepseq(0, -5, 20);
y = [0 0 0 0 0 y];

subplot(2,3,5); stem(n,y);
xlabel(' n')
ylabel(' y(n) ')
title(' Απόκριση στη βηματική ακολουθία με αρχική συνθήκη  y(-1) = 1')
```


Διάγραμμα Πόλων Μηδενικών
Imaginary Part
Real Part
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1


Κρουστική απόκριση
h(n)
n
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-5
0
5
10
15


Απόκριση στη βηματική ακολουθία με αρχική συνθήκη y(-1) = 1
y(n)
n
2
1.5
1
0.5
0
-5
0
5
10
15
20

Μελέτη γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με τη βοήθεια Mz

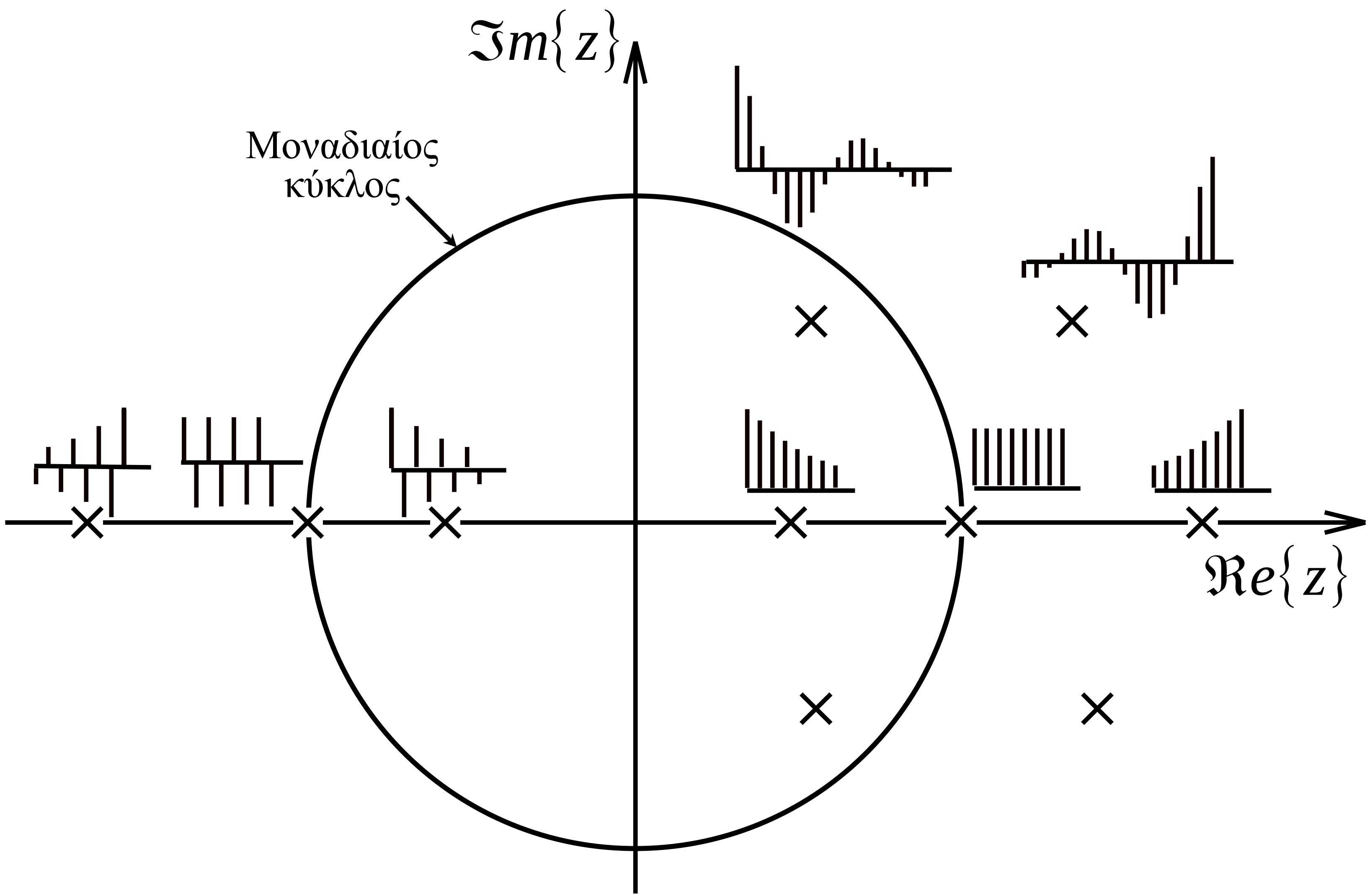
Από την περιοχή σύγκλισης και τη θέση των πόλων και των μηδενικών μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την ευστάθεια και την αιτιατότητα του συστήματος

Για να είναι ένα σύστημα διακριτού χρόνου αιτιατό πρέπει η περιοχή σύγκλισης να είναι το εξωτερικό κύκλου με τη μικρότερη ακτίνα που περιέχει τους πόλους.

Για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του $H(z)$ να περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.

Η θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του $H(z)$ στο επίπεδο z προσδιορίζει τη συμπεριφορά της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Η συμπεριφορά της κρουστικής του απόκρισης ενός συστήματος διακριτού χρόνου ανάλογα με τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του στο μιγαδικό επίπεδο z.



Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα διακριτού χρόνου, με είσοδο $x(n)$ και έξοδο $y(n)$, που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$3\,y(n)-7\,y(n-1)+2\,y(n-2)=3\,x(n-2)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Απάντηση

Για να είναι το σύστημα αιτιατό πρέπει

$$h(n)=-\tfrac{3}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)+\tfrac{2}{5}(2)^{n-1}u(n-1) \qquad |z|>2$$

Για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει

$$h(n)=-\tfrac{3}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)-\tfrac{3}{5}(2)^{n-1}u(-n) \qquad \tfrac{1}{3}<|z|<2$$

Η παραπάνω εξίσωση διαφορών δεν μπορεί να περιγράφει σύστημα που να είναι συγχρόνως ευσταθές και αιτιατό.