6. ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Όταν θα έχουμε τελειώσει το κεφάλαιο αυτό θα μπορούμε να:

- ορίσουμε το **Μετασχηματισμό Laplace** (ML) και το **Μονόπλευρο Μετασχηματισμό Laplace** (MML) και να περιγράψουμε τις βασικές διαφορές τους.
- περιγράψουμε τι είναι **συνάρτηση μεταφοράς συστήματος** και εξηγήσουμε έννοιες όπως ***περιοχή σύγκλισης, πόλος*** και ***μηδενικό***.
- διατυπώσουμε **τη σχέση** που υπάρχει μεταξύ μετασχηματισμού Fourier και μετασχηματισμού Laplace.
- υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace **στοιχειωδών σημάτων**.
- αναφέρουμε **τις ιδιότητες** του μετασχηματισμού Laplace.

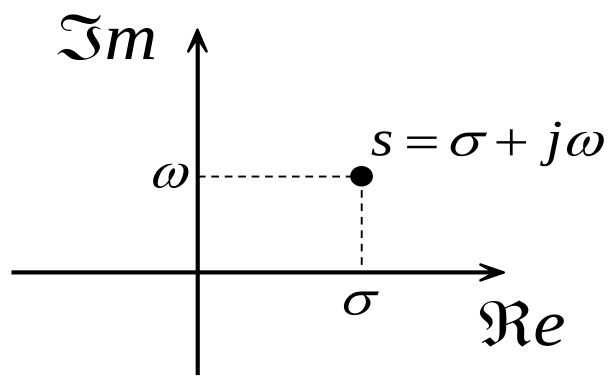
- υπολογίζουμε εύκολα **τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** μιας συνάρτησης, χωρίς να καταφεύγουμε στην εξίσωση αντιστροφής
- επιλύουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ***με αρχικές συνθήκες*** με τη βοήθεια του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace.
- υπολογίζουμε **τη συνάρτηση μεταφοράς ενός** ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης, η οποία συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.
- υπολογίζουμε την έξοδο ενός συστήματος, το οποίο δε βρίσκεται απαραίτητα σε ***κατάσταση ηρεμίας***, όταν γνωρίζουμε την είσοδό του και τη διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει την είσοδο και την έξοδο του συστήματος.
- προσδιορίζουμε **τη συμπεριφορά ενός συστήματος** από τη θέση των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς του στο μιγαδικό επίπεδο.

Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Σ

Ο ***Μετασχηματισμός Laplace*** αντιστοιχεί στο σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ τη συνάρτηση

$$L\left[x(t)\right] = X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

Ο Μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ του σήματος $x(t)$ είναι μιγαδική συνάρτηση, της μιγαδικής μεταβλητής $s = \sigma + j\omega$.



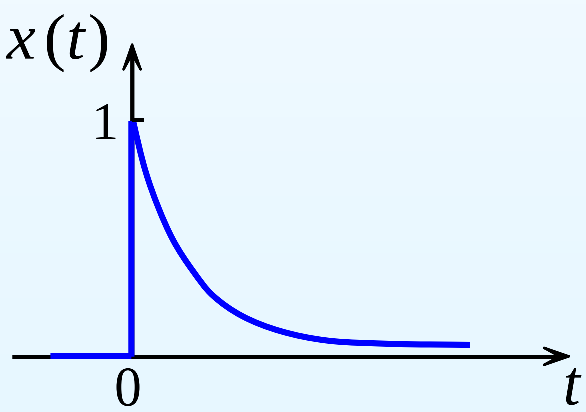
Το μιγαδικό επίπεδο

Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του αιτιατού εκθετικού σήματος:

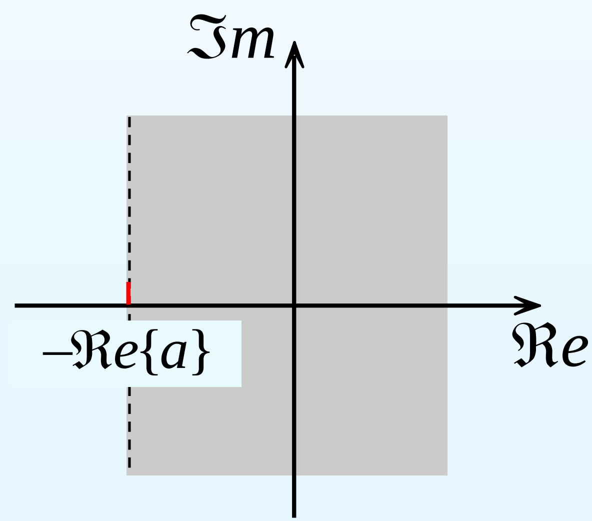
$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad \text{όπου α μιγαδικός αριθμός}$$

Απάντηση

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \text{με περιοχή σύγκλισης} \qquad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$



Το αιτιατού εκθετικού όταν $\Re e[a] > 0$.

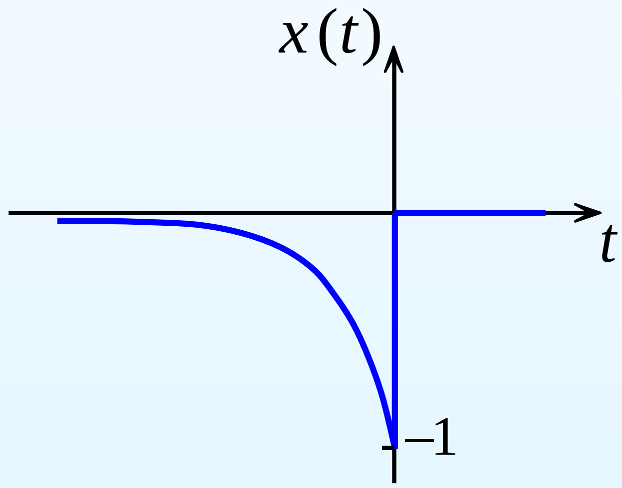


Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του αυστηρά μη αιτιατού εκθετικού σήματος

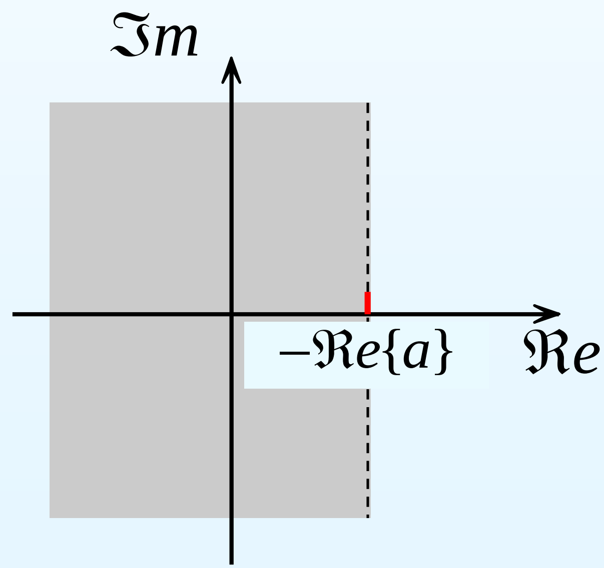
$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

Απάντηση

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$



Το αυστηρά μη αιτιατού εκθετικού όταν $\Re e[a] < 0$.

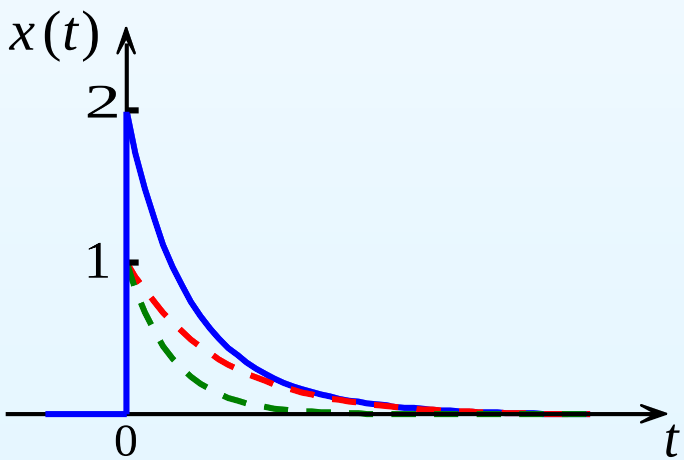


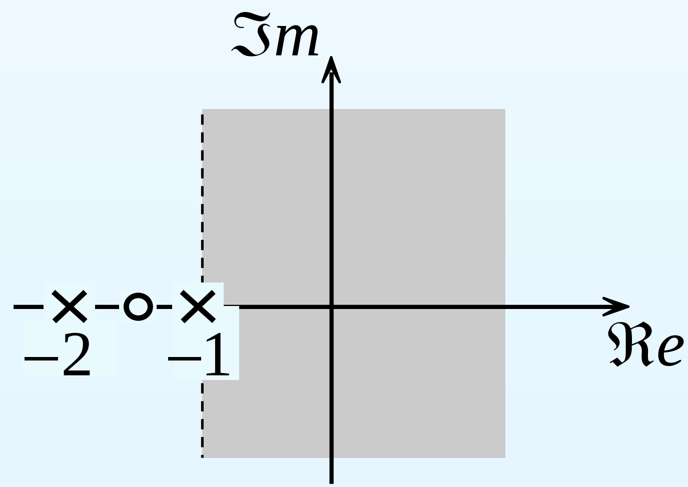
Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$$

Απάντηση

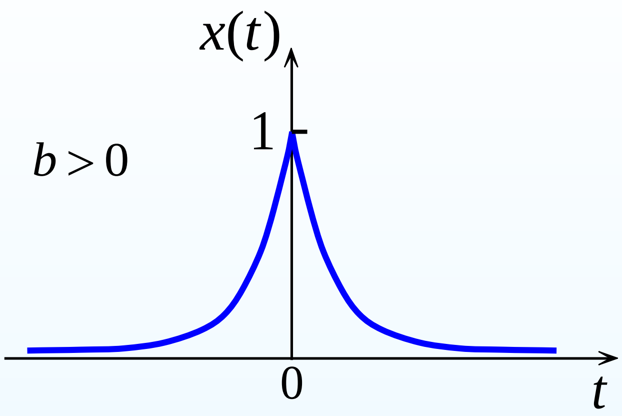
$$e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2s+3}{s^2+3s+2} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\} > -1$$

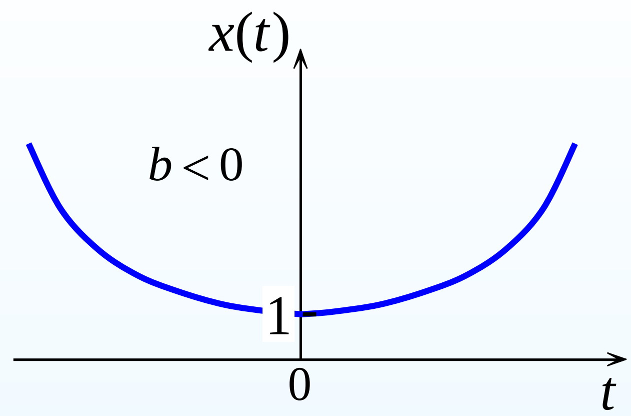




Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

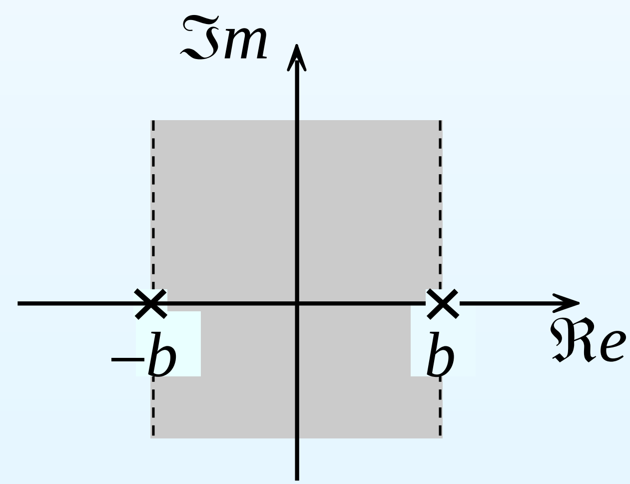




Απάντηση

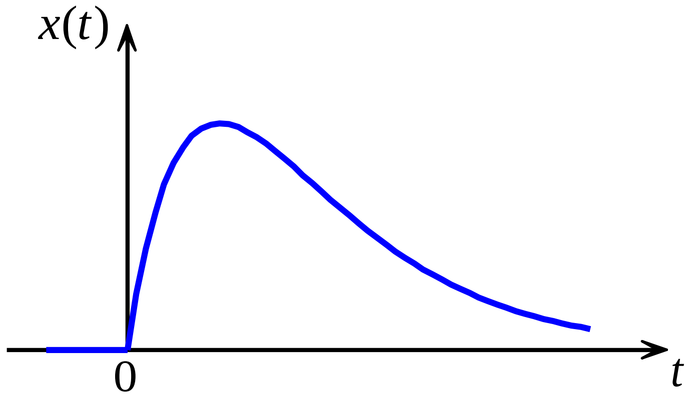
$$L\left[e^{-b|t|}\right] = \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = -\frac{2b}{s^2 - b^2}$$

με περιοχή σύγκλισης $-b < \Re e\{s\} < +b$



Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του σήματος

$$x(t) = t\,e^{-a\,t}u(t)$$



Απάντηση

$$X(s) = L\left[\; t e^{-at} u(t)\right] = \frac{1}{(s+a)^2}$$ με περιοχή σύγκλισης $\Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$

Αν $\alpha = 0$ έχουμε:

$$L\left[\, t\,u(t)\right] = \frac{1}{s^2}$$ με περιοχή σύγκλισης $\Re e\{s\} > 0$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

- Γραμμικότητα

$$a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \xleftrightarrow{L} a\,X_1(s) + b\,X_2(s)$$

Με περιοχή σύγκλισης τουλάχιστον $R = R_1 \cap R_2$

- Μετατόπιση στο χρόνο

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s)$$

με την ίδια Π Σ R

- Μετατόπιση στη μιγαδική συχνότητα

$$e^{s_0 t}\,x(t) \xleftrightarrow{L} X(s - s_0)$$

με Π Σ $R + \Re e\{s_0\}$

- Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα

Αν $x(t) \stackrel{L}{\longleftrightarrow} X(s)$ Με Π Σ $\sigma_1 < \Re e\{s\} < \sigma_2$ τότε

$$x(at) \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{Με Π Σ} \quad \frac{\sigma_1}{a} < \Re e\{s\} < \frac{\sigma_2}{a}$$

- Παραγώγιση στη συχνότητα

$$(-t)^n x(t) \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \frac{d^n X(s)}{ds^n} \quad \text{με την ίδια Π Σ } R$$

- Ολοκλήρωση στη συχνότητα

$$\frac{x(t)}{t} \xleftrightarrow{L} \int_{s}^{\infty} X(\xi)\, d\xi \qquad \text{με την ίδια ΠΣ } R$$

- Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s) \qquad \text{με την ίδια ΠΣ } R$$

- Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$$

Με περιοχή σύγκλισης τουλάχιστον $R \cap \{\Re e\{s\} > 0\}$

- Θεώρημα της συνέλιξης στο χρόνο

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

Με περιοχή σύγκλισης τουλάχιστον $R = R_1 \cap R_2$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

Το ολοκλήρωμα έχει τη έννοια ότι η ολοκλήρωση εκτελείται πάνω στην ευθεία $Re[s] = \sigma$, η οποία πρέπει να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του $X(s)$.

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{3s+7}{s^2+4s+3} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\} > -1$$

Απάντηση

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = t\,e^{-at}u(t) \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = e^{-b|t|} \quad \overset{L}{\longleftrightarrow} \quad X(s) = -\frac{2b}{s^2-b^2} \quad -b < \Re e\{s\} < +b$$

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^2 (s-2)} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\} > 2$$

$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = -e^{-at} u(-t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = t\, e^{-at} u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = e^{-b|t|} \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s) = -\frac{2b}{s^2 - b^2} \qquad -b < \Re e\{s\} < +b$$

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\} > -2$$

Μιγαδικές ρίζες $\rho_1 = -2-3j$ και $\rho_2 = -2+3j$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = t\,e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$x(t) = e^{-b|t|} \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s) = -\frac{2b}{s^2-b^2} \quad -b < \Re e\{s\} < +b$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$u(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad U(s) = \frac{1}{s}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

$$e^{-at}x(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad X(s+a)$$

$$L\{\cos(\omega_0 t)u(t)\} = L\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}u(t)\right\} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

$$L\left\{e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)\right\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}, \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13} = \frac{s+2}{s^2+4s+4+9} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\} = \quad x(t) = e^{-2t}\cos(3t)u(t)$$

- Να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$X(s)=\frac{s^2+5s+15}{s^2+4s+13} \quad \text{με περιοχή σύγκλισης} \quad \Re e\{s\}>-2$$

Απάντηση

$$X(s)=\frac{s^2+4s+13}{s^2+4s+13}+\frac{s+2}{s^2+4s+13}=1+\frac{s+2}{s^2+4s+13}=1+\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}$$

$$x(t)=\delta(t)+e^{-2t}\cos(3t)\,u(t)$$

Ο ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{X}(s) = X^{+}(s) \equiv \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

- Παραγώγιση στο χρόνο

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\,\mathcal{X}(s) - x(0^{-})$$

- Ολοκλήρωση στο χρόνο

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}\mathcal{X}(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^{-}} x(\tau)\, d\tau$$

Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s)$$

Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$$

- Θεώρημα αρχικής και τελικής τιμής

$$x(0^{+}) = \lim_{s\to\infty} s\cdot\mathcal{X}(s) \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot\mathcal{X}(s)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

- Επίλυση γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με τη βοήθεια Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

- Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων

- Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\,x(t)}{dt} + 3x(t) + 2\int_{-\infty}^{t} x(\xi)d\xi = u(t)$$

με αρχικές συνθήκες: $x(0^-) = 2$ και $\int_{-\infty}^{0^-} x(\xi)\,d\xi = 0$

- Παραγώγιση στο χρόνο

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

- Ολοκλήρωση στο χρόνο

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}\mathcal{X}(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau$$

Απάντηση

$$\mathcal{X}(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{X}(s)\} = \left[-e^{-t} + 3e^{-2t}\right]u(t)$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$$\begin{matrix} x(t) \\ X(s) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \text{ΓΧΑ} \\ h(t) \quad H(s) \end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) \\ Y(s) \end{matrix}$$

- Ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα περιγράφεται πλήρως από την κρουστική του απόκριση $h(t)$.

- Το σήμα εισόδου, $x(t)$, και το σήμα εξόδου, $y(t)$, ενός ΓΧΑ συστήματος συνδέονται με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad\qquad y(t) = x(t) * h(t)$$

- Τα σήματα εισόδου-εξόδου συσχετίζονται με τη διαφορική εξίσωσης.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- Το θεώρημα της Συνέλιξης.

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Παρατηρούμε ότι η ***συνάρτηση μεταφοράς***, $H(s)$, ενός συστήματος μπορεί να βρεθεί, ως πηλίκο των μετασχηματισμών Laplace εξόδου-εισόδου.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Υπενθυμίζεται ότι

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

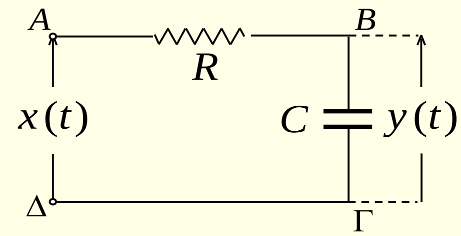
$$H(s) = L\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

Η ***ευστάθεια*** και η ***αιτιότητα*** προσδιορίζουν την περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, ενός ΓΧΑ συστήματος είναι μία ***ρητή συνάρτηση***, δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων της μεταβλητής s.

Σημειώνεται επίσης στον υπολογισμό της H(s) ενός συστήματος ***δεν υπεισέρχονται οι αρχικές συνθήκες*** στις οποίες βρίσκεται πιθανόν το σύστημα.

Για το ηλεκτρικό κύκλωμα RC σε σειρά



η διαφορική εξίσωση είναι

$$\frac{d\,y(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε διαδοχικά

$$L\left\{\frac{d\,y(t)}{dt} + a\,y(t)\right\} = L\{b\,x(t)\}$$

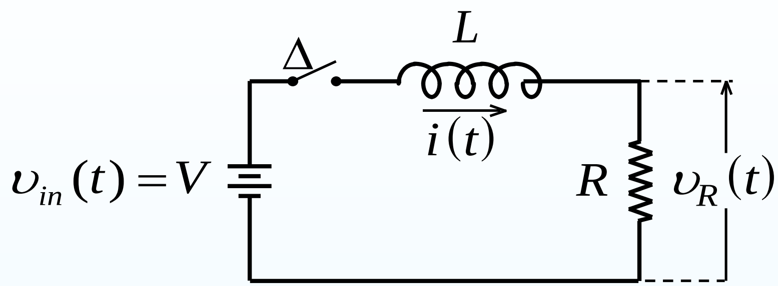
$$L\left\{\frac{d\,y(t)}{dt}\right\} + a\,L\{y(t)\} = bL\{x(t)\} \xrightarrow{\frac{d}{dt}x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} s\,X(s)} s \cdot Y(s) + a\,Y(s) = b\,X(s)$$

$$\left.\begin{array}{l} (s+a)\cdot Y(s) = b\,X(s) \\ H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} \end{array}\right\} H(s) = \frac{b}{s+a} \xrightarrow{e^{-at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}} h(t) = b\,e^{-at}u(t)$$

Με περιοχή σύγκλισης

$$\Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του κυκλώματος



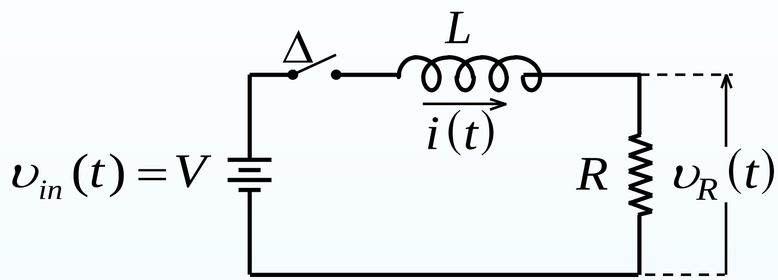
Απάντηση

Η διαφορική εξίσωση για το σύστημα είναι
$$\frac{d\,\upsilon_R(t)}{d\,t} + \frac{R}{L}\upsilon_R(t) = \frac{R}{L}\upsilon_{in}(t)$$

η συνάρτηση μεταφοράς είναι
$$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L} \qquad \Re e\{s\} > -R/L$$

και η κρουστική απόκριση είναι
$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$$

Αν το κύκλωμα αρχικά ηρεμεί, και στην είσοδό του, κατά τη χρονική στιγμή $t_0=0$, εφαρμόσουμε πηγή σταθερής τάσης V, να προσδιοριστεί η τάση $\upsilon_R(t)$ στα άκρα της αντίστασης σε συνάρτηση με το χρόνο.



Η συνάρτηση μεταφοράς είναι $$H(s)=\frac{R/L}{s+R/L} \qquad \Re e\{s\}>-R/L$$

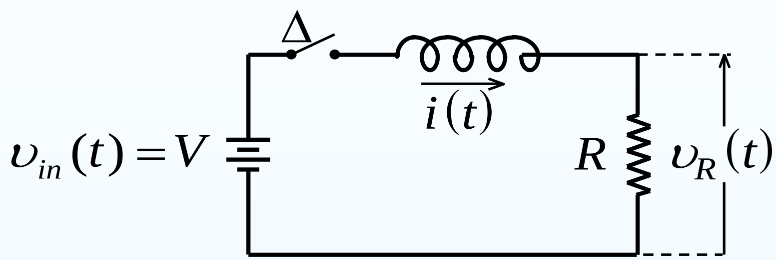
Απάντηση

$$V_R(s)=H(s)\cdot V_{in}(s) \qquad V_R(s)=V\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+R/L}\right)$$

$$\upsilon_R(t)=Vu(t)-Ve^{-\frac{R}{L}t}u(t)\;=V\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

$$V_R(s) = V\cdot\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right) \qquad \upsilon_R(t) = Vu(t) - Ve^{-\frac{R}{L}t}u(t) = V\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

Αν η τάση στα άκρα της αντίστασης αρχικά είναι $\upsilon_R(0^-) = 1$ και στην είσοδό του, κατά τη χρονική στιγμή t_0=0, εφαρμόσουμε πηγή σταθερής τάσης V = 2, να προσδιοριστεί η τάση $\upsilon_R(t)$ στα άκρα της αντίστασης σε συνάρτηση με το χρόνο.



Η διαφορική εξίσωση για το σύστημα είναι $$\frac{d\,\upsilon_R(t)}{d\,t} + \frac{R}{L}\upsilon_R(t) = \frac{R}{L}\upsilon_{in}(t)$$

- Παραγώγιση στο χρόνο

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

- Ολοκλήρωση στο χρόνο

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}\mathcal{X}(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau$$

$$\upsilon_R(t) = V\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t) + \upsilon_R(0^-)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}u(t) = \left[V - \left(\upsilon_R(0^-) - V\right)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right]u(t)$$

Αν ***έχουμε αρχικές συνθήκες*** τότε στη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

συμπεριλαμβάνουμε τις αρχικές συνθήκες λόγω των ιδιοτήτων της παραγώγισης στο χρόνο και της ολοκλήρωσης στο χρόνο που έχει ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace.

- Παραγώγιση στο χρόνο $\quad \frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
- Ολοκλήρωση στο χρόνο $\quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}\mathcal{X}(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau$

και στην $Y(s) = H(s)\ X(s)$ εμφανίζεται και ένας ***επιπλέον όρος*** ο οποίος προέρχεται από ***τις αρχικές συνθήκες***.

Σημειώνεται ότι η ***συνάρτηση μεταφοράς*** ενός συστήματος είναι ανεξάρτητη της εισόδου και των αρχικών συνθηκών και ότι ***εξαρτάται μόνο από τα στοιχεία του συστήματος***.

Να προσδιορισθεί η αρχική και η τελική τιμή του σήματος του αποίου ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace είναι

$$X^+(s) = \frac{7s+10}{s(s+2)}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της αρχικής τιμής βρίσκουμε ότι

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{7s+10}{s(s+2)} = \lim_{s\to\infty} \frac{7s+10}{(s+2)} = 7$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της τελικής τιμής βρίσκουμε ότι

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{7s+10}{s(s+2)} = \lim_{s\to\infty} \frac{7s+10}{(s+2)} = 5$$

Το σήμα $x(t)$ που έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace είναι

$$x(t) = 5u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

και επαληθεύουμε ότι $x(0^+) = 7$ και $x(\infty) = 5$.

Παρατηρήσεις για το μετασχηματισμό Laplace

Η συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, ενός ΓΧΑ συστήματος είναι μία ***ρητή συνάρτηση***, δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο πολυωνύμων της μεταβλητής s.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Για να είναι ένα σύστημα ***αιτιατό*** πρέπει η περιοχή σύγκλισης να είναι το ***δεξιό ημιεπίπεδο*** του μιγαδικού επιπέδου με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-Re\{a_k\}|_{\max}$.

Αν ο βαθμός του πολυωνύμου του $N(s)$ είναι ***μεγαλύτερος ή ίσος*** από το βαθμό του πολυωνύμου $D(s)$, τότε, πριν αναλύσουμε σε απλά κλάσματα, ***πρέπει*** να κάνουμε τη διαίρεση $N(s)$ / $D(s)$.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum c_k \cdot s^k + \frac{N'(s)}{D(s)}$$

Για να είναι ένα σύστημα ***ΦΕΦΕ ευσταθές*** θα πρέπει ο βαθμός του πολυωνύμου N(s) να είναι ***μικρότερος*** από το βαθμό του πολυωνύμου D(s).

Ένα ΓΧΑ σύστημα ***είναι ΦΕΦΕ ευσταθές***, αν η κρουστική απόκρισή του είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή, αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, h(t) \,|\, dt < +\infty$$

Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ο MF και αυτό πραγματοποιείται ***όταν το πεδίο σύγκλισης του ML περιέχει το φανταστικό άξονα***.

$$F\{x(t)\} = X(s)\,\big|_{s=j\omega}$$

Για να είναι ένα σύστημα ***ΦΕΦΕ ευσταθές*** θα πρέπει ο φανταστικός άξονας να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace.

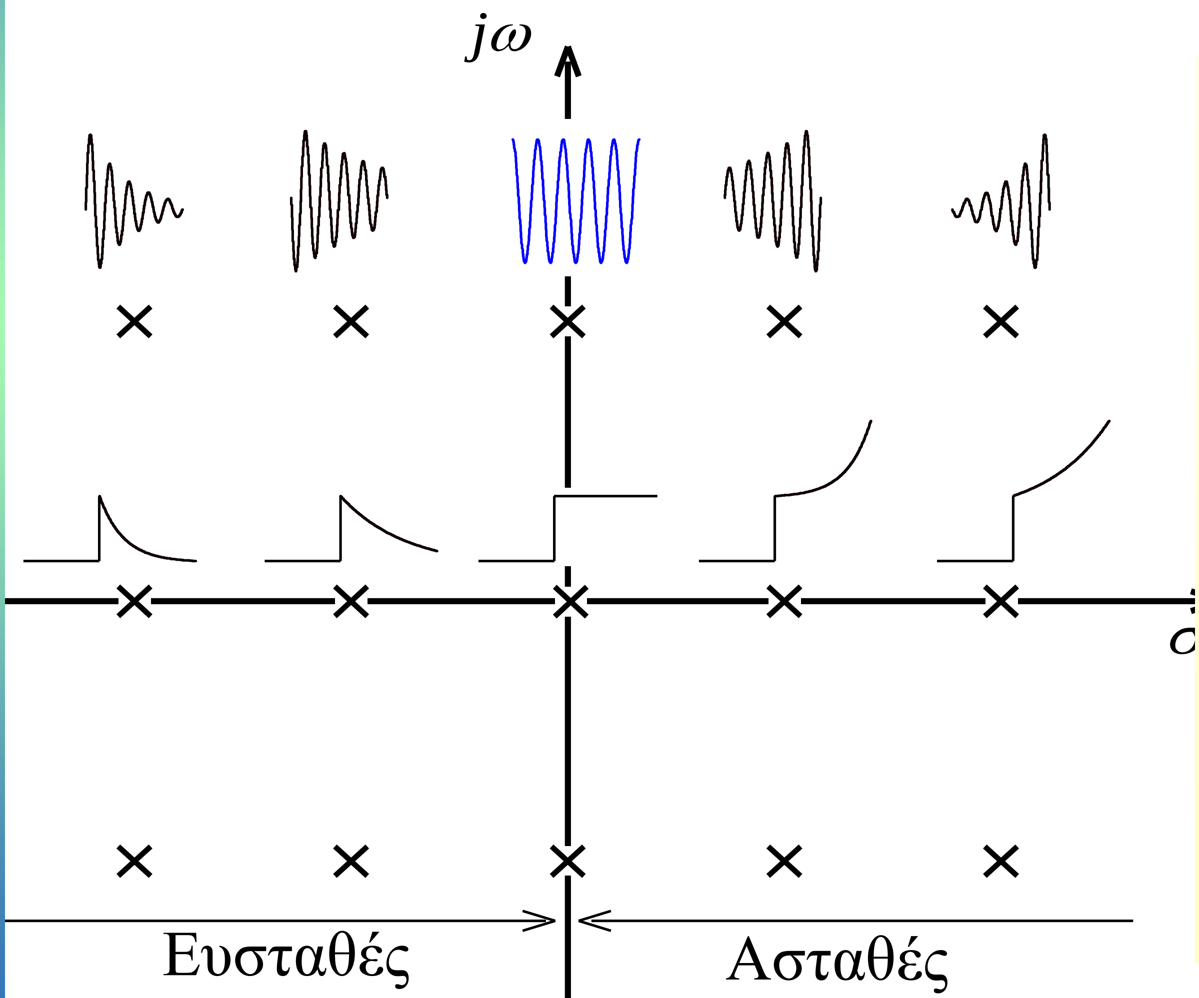
Για να είναι ένα σύστημα ***ΦΕΦΕ ευσταθές*** θα πρέπει ο βαθμός του πολυωνύμου $N(s)$ να είναι ***μικρότερος*** από το βαθμό του πολυωνύμου $D(s)$.

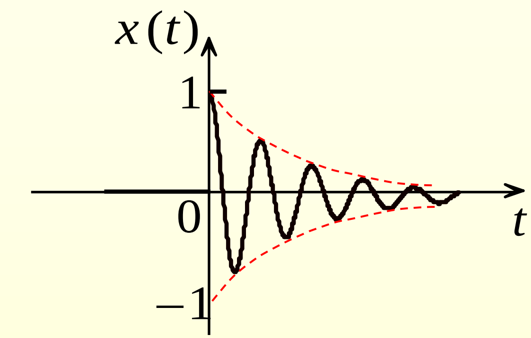
Για να είναι ένα σύστημα ***αιτιατό*** πρέπει η περιοχή σύγκλισης να είναι το ***δεξιό ημιεπίπεδο*** του μιγαδικού επιπέδου με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση $-\mathrm{Re}\{a_k\}|_{\max}$.

Η ***θέση των πόλων*** ενός σήματος στο μιγαδικό επίπεδο ***προσδιορίζει τη συμπεριφορά*** του σήματος.

Η ***θέση των πόλων*** ενός σήματος στο μιγαδικό επίπεδο ***προσδιορίζει τη συμπεριφορά*** του σήματος.

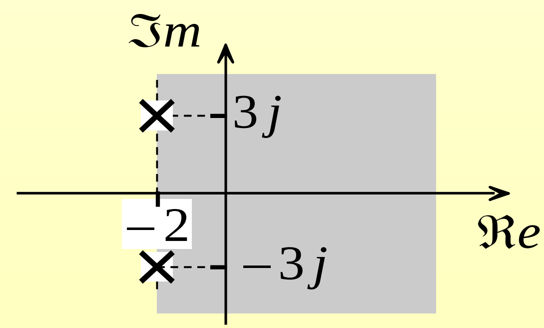
Παρατηρήσεις για την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace





$$x(t) = e^{-2t}\cos(3t)u(t)$$

$$X(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2}$$

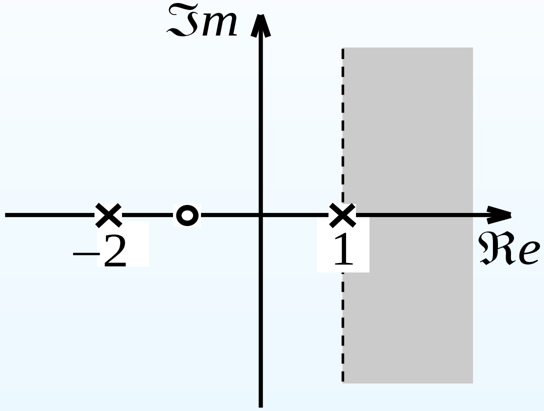


Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-1}$$

Απάντηση:

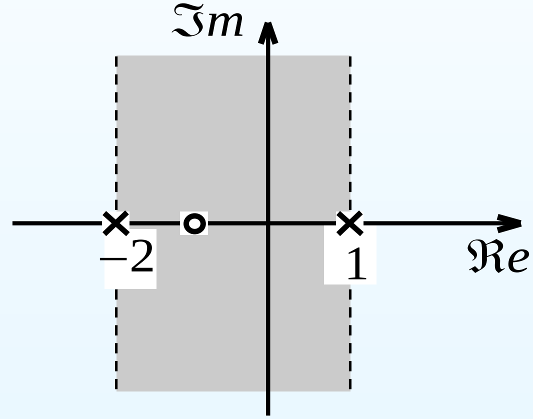
$$\Re e\{s\} > 1$$



Αιτιατό σύστημα

$$h(t) = \left[\tfrac{1}{3}e^{-2t} + \tfrac{2}{3}e^{t}\right]u(t)$$

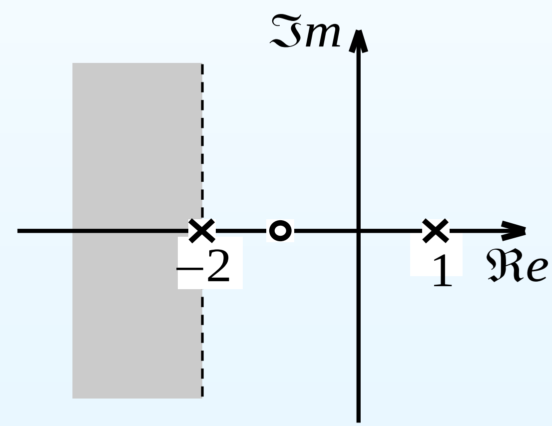
$$-2 < \Re e\{s\} < 1$$



Ευσταθές σύστημα

$$h(t) = \tfrac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \tfrac{2}{3}e^{t}u(-t)$$

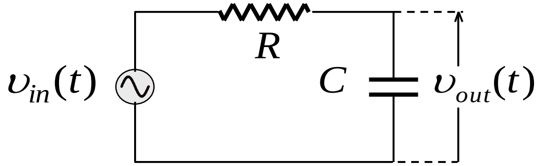
$$\Re e\{s\} < -2$$

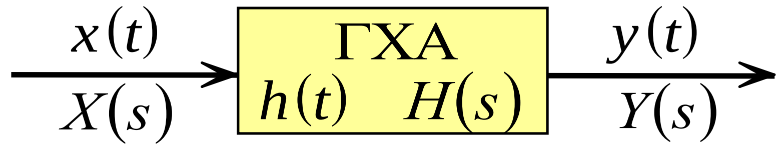


Μη αιτιατό μη ευσταθές σύστημα

$$h(t) = -\tfrac{1}{3}e^{-2t}u(-t) - \tfrac{2}{3}e^{t}u(-t)$$

Συστήματα Αναλογικού Χρόνου





Τα σήματα εισόδου-εξόδου συσχετίζονται με τη διαφορική εξίσωσης.

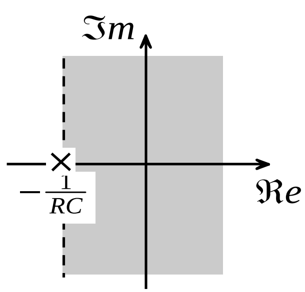
$$\frac{d\upsilon_{out}(t)}{dt} + \frac{1}{RC}\upsilon_{out}(t) = \frac{1}{RC}\upsilon_{in}(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

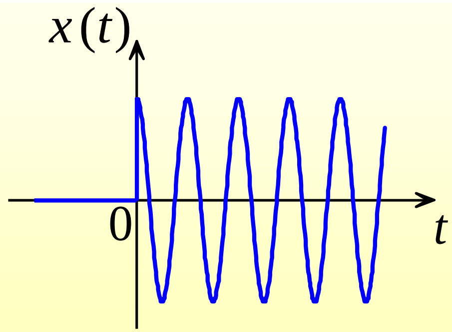


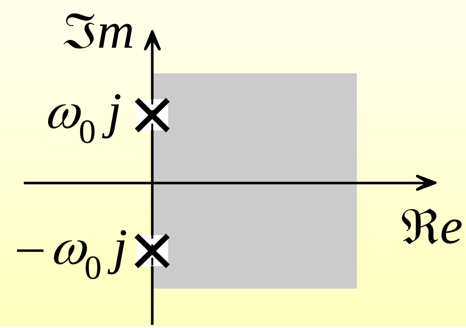
$$\Re e\{s\} > -\frac{1}{RC}$$

Η ευστάθεια και η αιτιατότητα προσδιορίζουν την περιοχή σύγκλισης

Στην περίπτωση που ο μετασχηματισμός Laplace έχει πόλους στο φανταστικό άξονα, όπως το σήμα

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$





Το σήμα έχει και μετασχηματισμό Fourier και είναι

$$X(\omega) = \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{1}{2}\pi\left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right]$$

Για την οριακή αυτή περίπτωση, στην οποία υπάρχουν πόλοι στο φανταστικό άξονα, είναι δυνατή η μετάβαση από το μετασχηματισμό Laplace στο μετασχηματισμό Fourier.

Η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως άθροισμα δύο συναρτήσεων της μεταβλητής s, όπου η μία είναι αναλυτική στο φανταστικό άξονα και η άλλη περιέχει τους πόλους, δηλαδή

$$X(s) = X_a(s) + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{s - j\omega_k}$$

και ο μετασχηματισμός Fourier βρίσκεται από τη σχέση

$$X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega} + \pi \sum_{k=1}^{N} b_k \, \delta(\omega - \omega_k)$$

δηλαδή στη συνάρτηση $X(s)|_{s\,=\,j\omega}$ προσθέτουμε τους κατάλληλους όρους κρουστικών συναρτή-σεων

Εφαρμογή

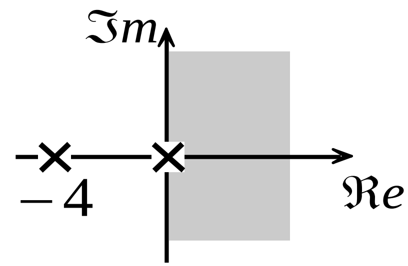
$$X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega} + \pi \sum_{k=1}^{N} b_k \delta(\omega - \omega_k)$$

Το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-4t}\right] u(t)$$

έχει μετασχηματισμό Laplace

$$H(s) = \frac{2}{s(s+4)}$$ με διάγραμμα πόλων μηδενικών και πεδίο σύγκλισης



Ο μετασχηματισμός Laplace γράφεται ως

$$H(s) = H_a(s) + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{s - j\omega_k}$$

$$H(s) = \frac{2}{s(s+4)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{s}$$

Από την οποία μεταβαίνουμε στο μετασχηματισμό Fourier

$$H(\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} + \frac{1}{2}\pi\delta(\omega) = \frac{2}{j\omega(j\omega+4)} + \frac{1}{2}\pi\delta(\omega)$$

ή ισοδύναμα ως

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] - \frac{1}{2}\frac{1}{j\omega+4}$$

Βαθυπερατά συστήματα πρώτης τάξης.

Τα βαθυπερατά ΓΧΑ σύστημα πρώτης τάξης περιγράφονται από τη διαφορική εξίσωση

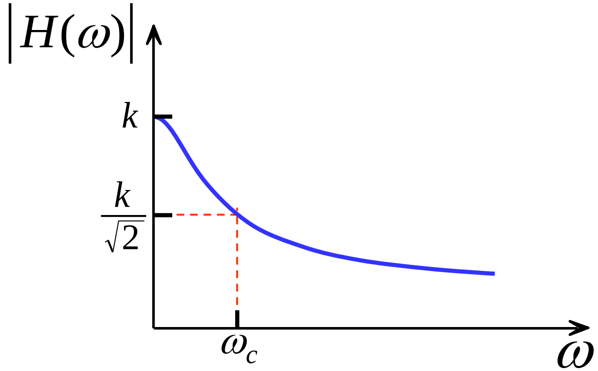
$$\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς των βαθυπερατών ΓΧΑ συστημάτων πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$H(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{k}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$$

Η απόκριση συχνότητας των βαθυπερατών ΓΧΑ συστημάτων πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$H(j\omega) = \frac{b}{j\omega + a} = \frac{k}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$



Απόκριση πλάτους βαθυπερατού συστήματος πρώτης τάξης

Υψιπερατά συστήματα πρώτης τάξης.

Τα υψιπερατά ΓΧΑ σύστημα πρώτης τάξης περιγράφονται από τη διαφορική εξίσωση

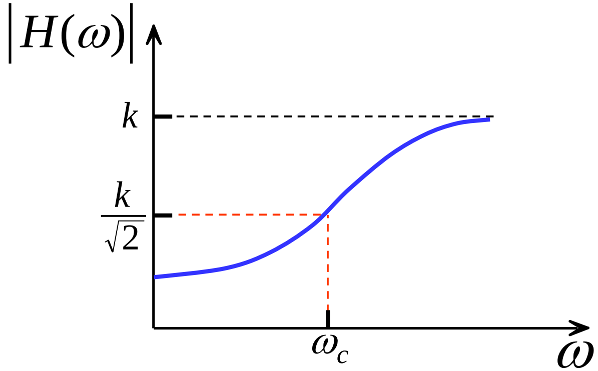
$$\frac{d\,y(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,\frac{d\,x(t)}{dt}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς των υψιπερατών ΓΧΑ συστημάτων πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$H(s) = \frac{bs}{s+a} = \frac{ks}{s+\omega_c}$$

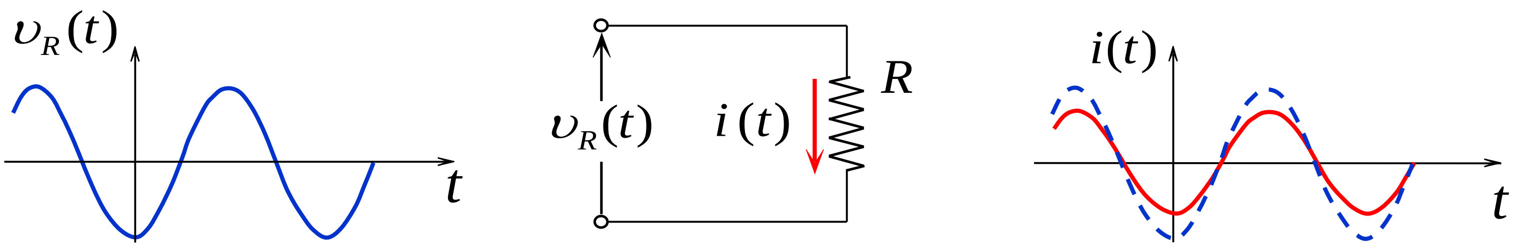
Η απόκριση συχνότητας των υψιπερατών ΓΧΑ συστημάτων πρώτης τάξης έχει τη μορφή

$$H(j\omega) = \frac{b\,s}{j\omega + a} = \frac{k}{1 - j\,\frac{\omega_c}{\omega}}$$



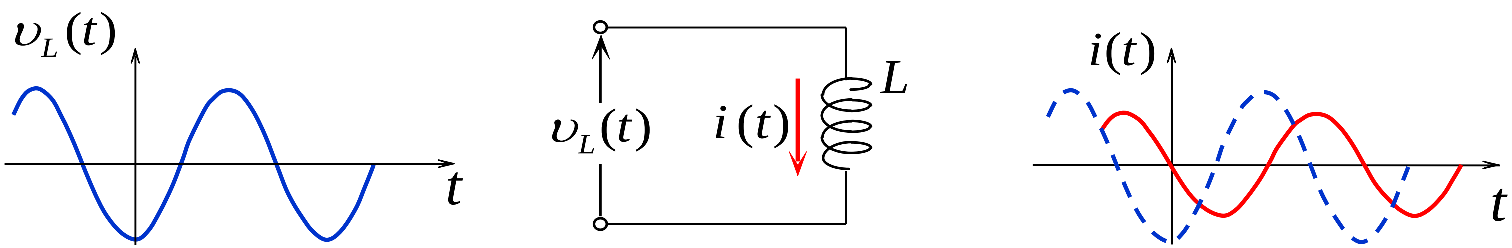
Απόκριση πλάτους υψιπερατού συστήματος πρώτης τάξης

α) Το ωμικό στοιχείο εμφανίζει ***αντίσταση R*** και η ένταση ρεύματος που τη διαρρέει βρίσκεται σε συμφωνία φάσης με την τάση στα άκρα της.



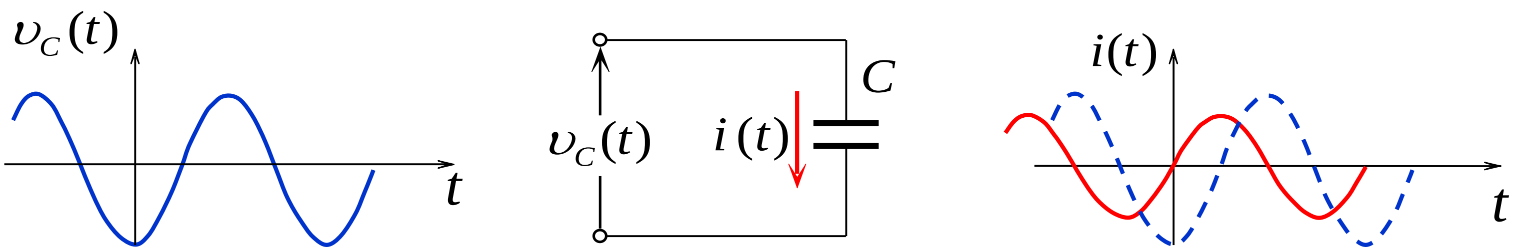
$$i(t) = \frac{\upsilon_R(t)}{R}$$

β) Το πηνίο εμφανίζει ***επαγωγική αντίσταση η εμπέδηση $Z_L = jL\omega$*** και η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει õóôåñåß ôçò ôÜóçò στα άκρα του êáôÜ ð/2.



$$i(t) = \frac{\upsilon_L(t)}{Z_L}$$

γ) Ο πυκνωτής εμφανίζει ***χωρητική αντίσταση 1/Cω*** και η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει βρίσκεται σε διαφορά φάσης – π/2 με την τάση στα άκρα του ***$Z_C = 1/\,jC\omega$***.

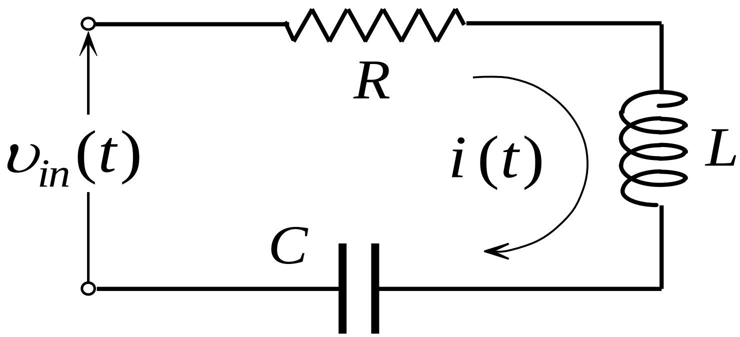


$$i(t) = \frac{\upsilon_C(t)}{Z_C}$$

δ) Η ***σύνθετη αντίσταση κυκλώματος*** είναι $Z(\omega) = U(\omega) / I(\omega)$.

Άσκηση

Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος RLC σε σειρά



$$H(\omega) = \frac{I(\omega)}{U_{in}(\omega)}$$

$$= \frac{j\omega}{L(j\omega)^2 + R(j\omega) + \frac{1}{C}}$$

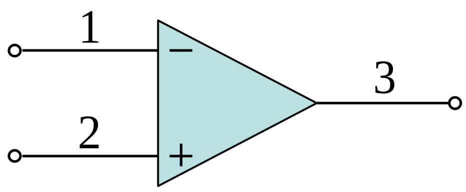
$$= \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} = R + \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

$$Z(\omega) = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2$$

Τελεστικός ενισχυτής

Το κυκλωματικό σύμβολο το οποίο χρησιμοποιούμε για την αναπαράσταση του τελεστικού ενισχυτή είναι

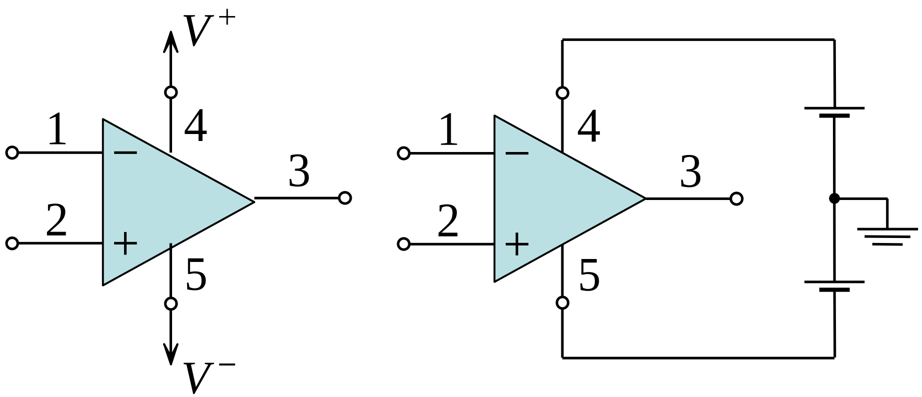


Σύμβολο τελεστικού ενισχυτή

Ο τελεστικός ενισχυτής είναι φτιαγμένος για να “αισθάνεται” τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημάτων τάσης που εφαρμόζονται στους ακροδέκτες εισόδου του $\upsilon_2(t) - \upsilon_1(t)$ και εμφανίζει τη διαφορά πολλαπλασιασμένη επί A στην έξοδό

$$\upsilon_o(t) = A\big(\upsilon_2(t) - \upsilon_1(t)\big) \quad = A\big(\upsilon_+(t) - \upsilon_-(t)\big)$$

Όταν αναφερόμαστε για τάση σε κάποιο ακροδέκτη εννοούμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ του ακροδέκτη και της γης.



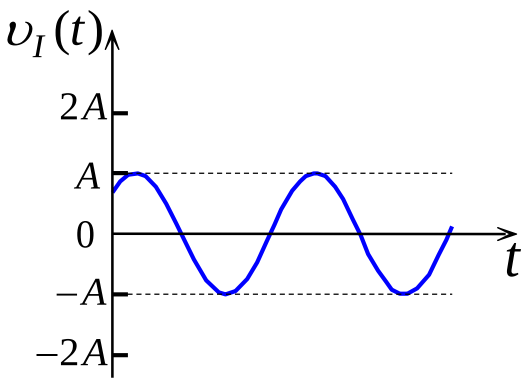
Τροφοδοσία τελεστικού ενισχυτή

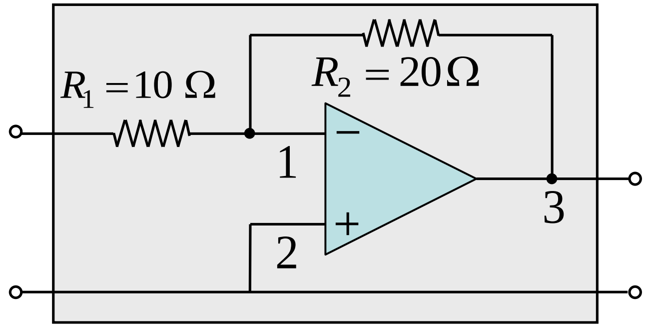
Ο τελεστικός ενισχυτής είναι ενισχυτής ***διαφορικής εισόδου – μονής εξόδου*** (*differential input – single output*).

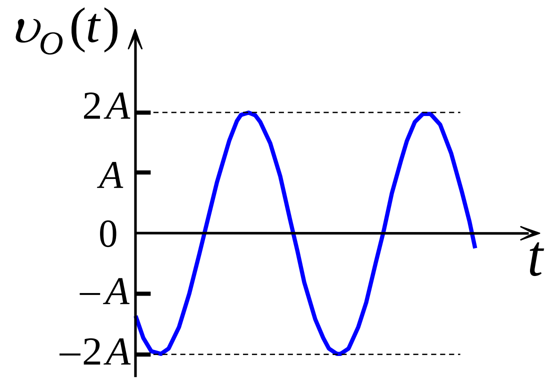
Το κέδρος A ονομάζεται ***διαφορικό κέρδος*** ή ***κέρδος ανοικτού κυκλώματος***

Εφαρμογές Αντιστρεπτός ενισχυτής τάσης (*Inverting amplifier*)

$$G \equiv \frac{\upsilon_O(t)}{\upsilon_I(t)} = -\frac{R_2}{R_1} = -2$$



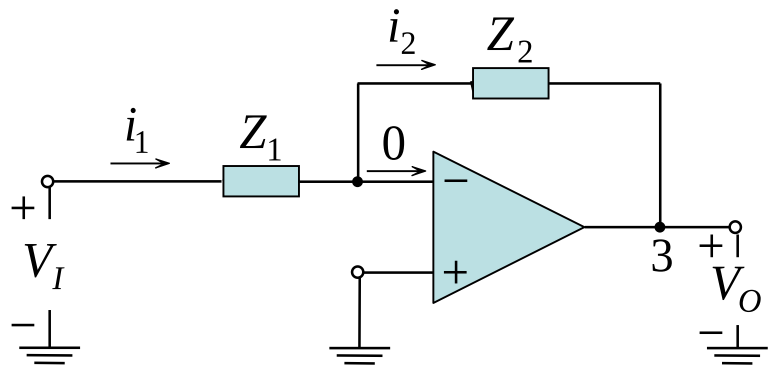




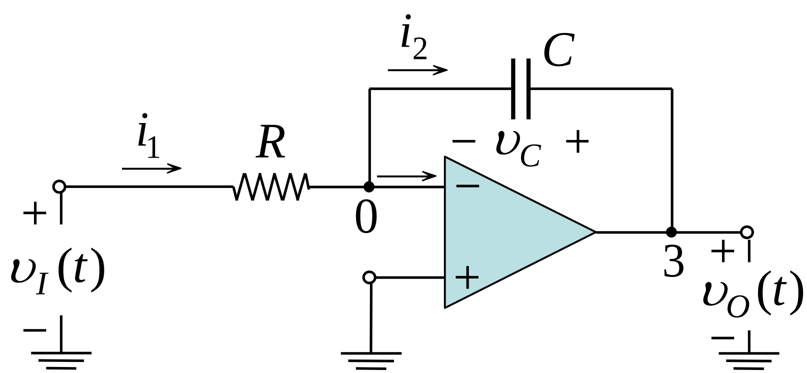
Στο παράδειγμα αρνητικής ανάδρασης αρχίσαμε με ένα τελεστικό ενισχυτή που έχει πολύ μεγάλο κέρδος A και εφαρμόζοντας αρνητική ανάδραση αποκτήσαμε ένα κέρδος κλειστού βρόχου R_2/R_1 που είναι σταθερό, προβλέψιμο και με όση ακρίβεια θέλουμε, επιλέγοντας παθητικά στοιχεία ανάλογης ακρίβειας.

Προσφορά κέρδους και αύξηση ακρίβειας.

Εφαρμογές Αντιστρεπτός ολοκληρωτής



Η αναστρέφουσα συνδεσμολογία με γενικευμένες σύνθετες αντιστάσεις στην ανάδραση και την είσοδο.



Αναστρέφων ολοκληρωτής (*Miller*).

Το κέρδος κλειστού βρόχου, η ποιο σωστά, η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου, είναι

$$\frac{V_O}{V_I} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Για την ιδική περίπτωση όπου $Z_1 = R$ και $Z_2 = 1/sC$, η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$\frac{V_O}{V_i} = -\frac{1}{s\,RC}$$

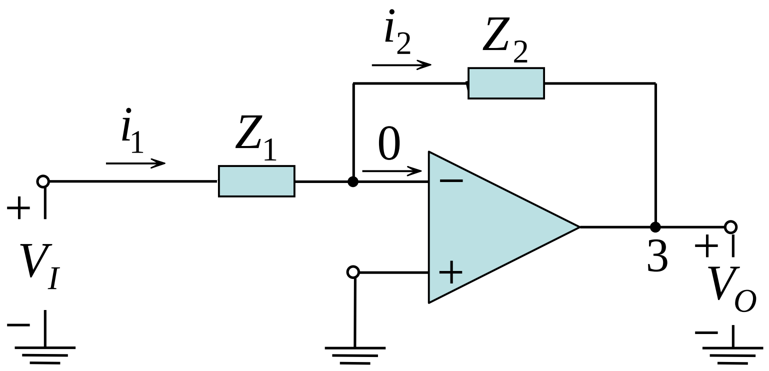
και η απόκριση συχνότητας είναι

$$\frac{V_O}{V_i} = -\frac{1}{j\omega RC}$$

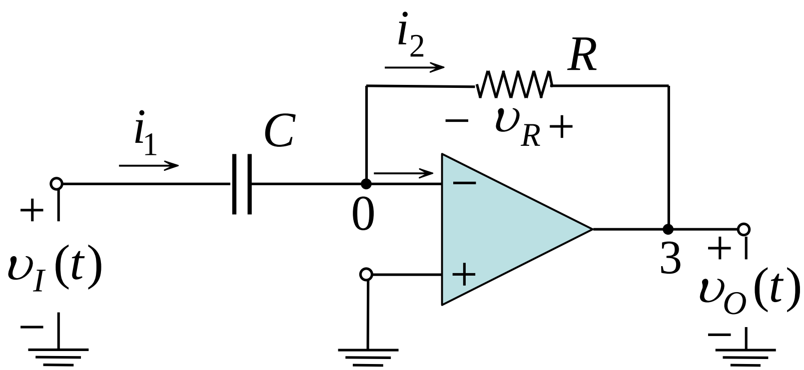
Η τάση εξόδου $\upsilon_O(t)$ είναι το ολοκλήρωμα της $\upsilon_I(t)$, δηλαδή,

$$\upsilon_O(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t \upsilon_I(\xi)\,d\xi$$

Εφαρμογές Αντιστρεπτός διαφοριστής



Η αναστρέφουσα συνδεσμολογία με γενικευμένες σύνθετες αντιστάσεις στην ανάδραση και την είσοδο.



Αναστρέφων διαφοριστής.

Το κέρδος κλειστού βρόχου, η ποιο σωστά, η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου, είναι

$$\frac{V_O}{V_I} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Για την ιδική περίπτωση όπου $Z_1 = R$ και $Z_2 = 1/sC$, η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$\frac{V_O}{V_i} = -s\,RC$$

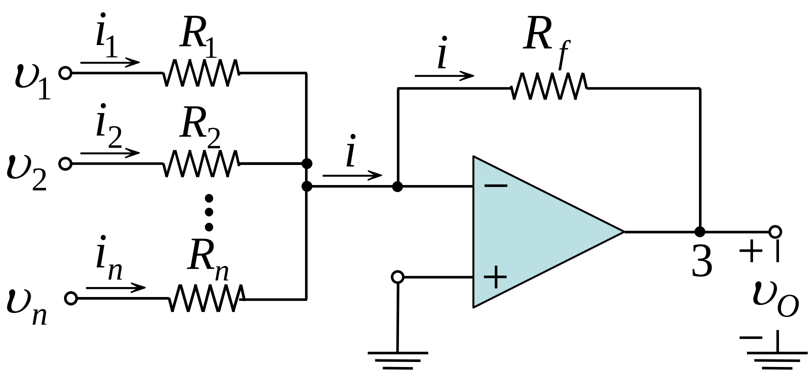
και η απόκριση συχνότητας είναι

$$\frac{V_O}{V_i} = -j\omega RC$$

Η τάση εξόδου $\upsilon_O(t)$ είναι το ολοκλήρωμα της $\upsilon_I(t)$, δηλαδή,

$$\upsilon_O(t) = -RC\,\frac{d\upsilon_I(t)}{dt}$$

Εφαρμογές Αθροιστής με βάρη



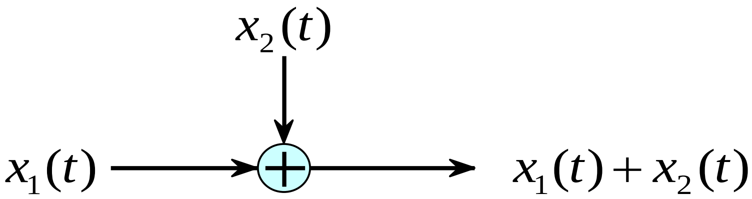
Αθροιστής με βάρη.

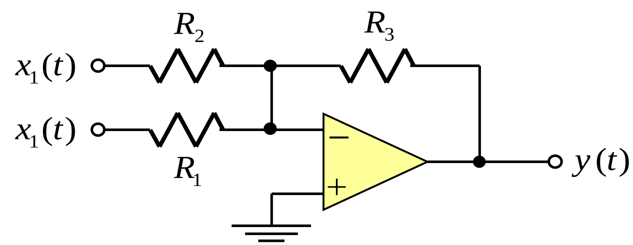
Η τάση εξόδου υ_O είναι

$$\upsilon_O = -\left(\frac{R_f}{R_1}\upsilon_1 + \frac{R_f}{R_2}\upsilon_2 +, \ldots, \; + \frac{R_f}{R_n}\upsilon_n\right)$$

Παρατηρούμε ότι η τάση εξόδου είναι ίση με το σταθμισμένο άθροισμα των τάσεων εισόδου, με ***βάρη*** ίσα με το λόγο $R_f \,/\, R_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

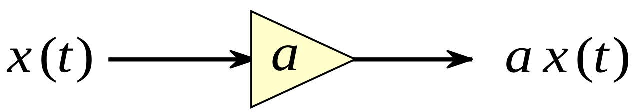
Βασικά στοιχεία υλοποίησης συστημάτων αναλογικού χρόνου

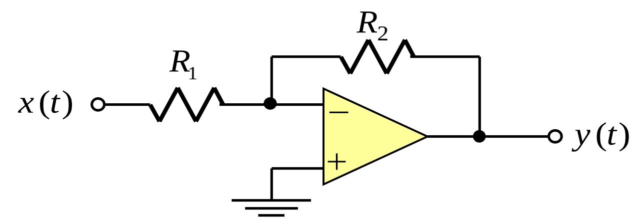




$R_3/R_1=1$ $R_3/R_2=1$

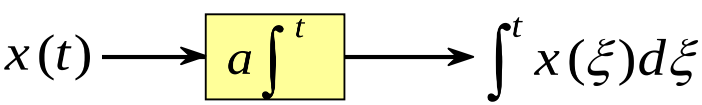
Αθροιστής

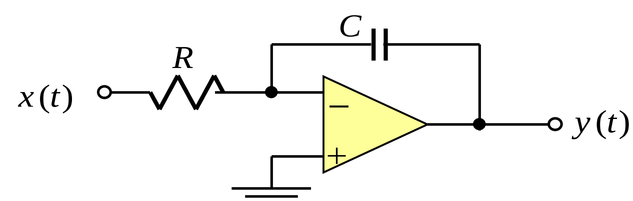




$-a=R_2/R_1$

Πολλαπλασιαστής





$-a=1/RC$

Ολοκληρωτής

Σύστημα πρώτης τάξης με πόλους και μηδενικά

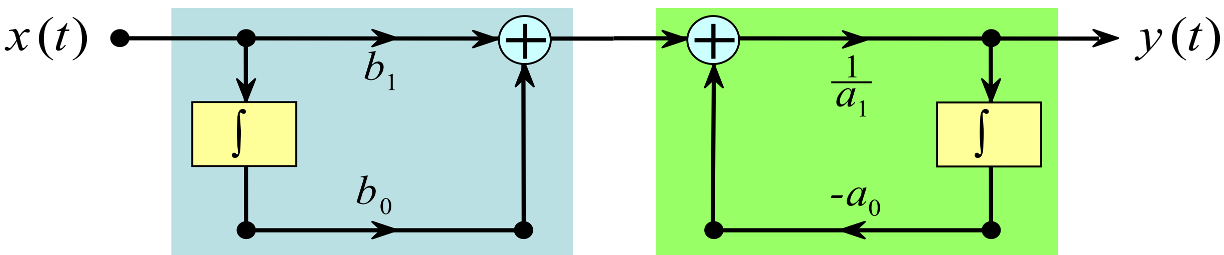
Η διαφορική εξίσωση και η συνάρτηση μεταφοράς για σύστημα πρώτης τάξης με πόλους και μηδενικά είναι

$$a_0\, y(t) + a_1 \frac{d\, y(t)}{dt} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} \qquad H(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s}$$

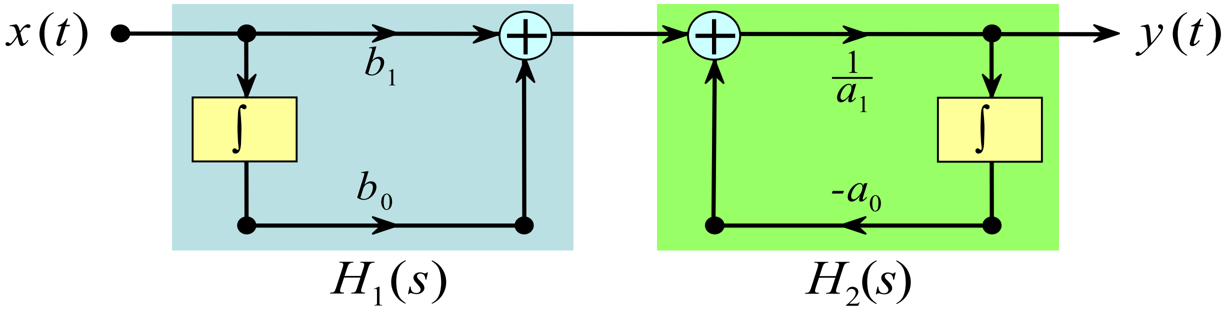
η διαφορική εξίσωση γράφεται ως

$$y(t) = \frac{1}{a_1}\left\{ -a_0 \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau + b_0 \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau + b_1\, x(t) \right\}$$

έτσι έχουμε την υλοποίηση

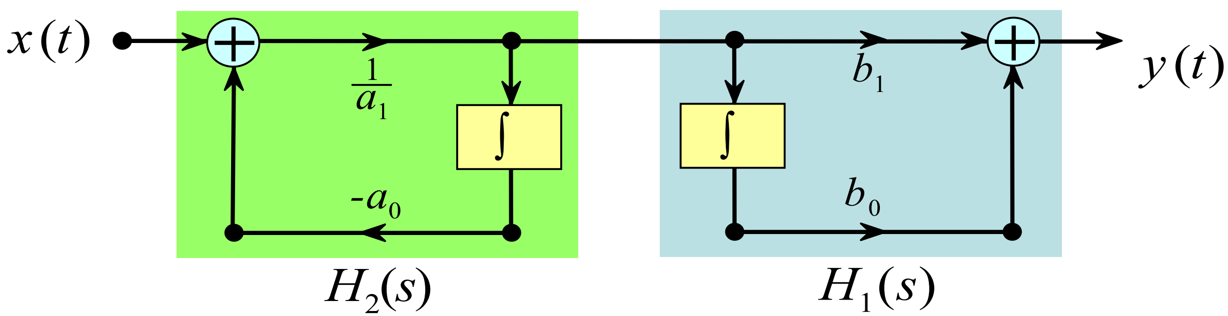


Άμεσο σχήμα Ι

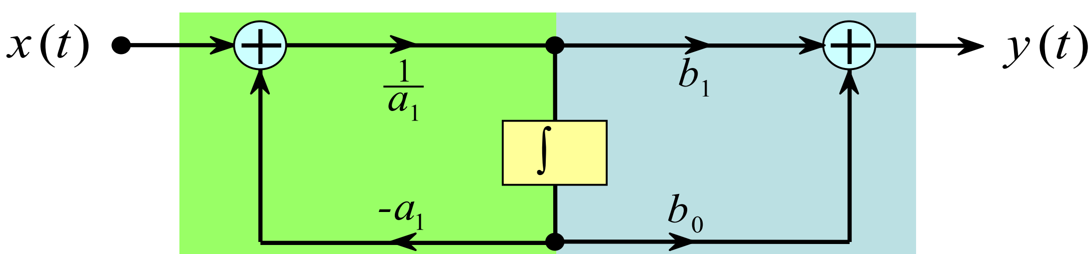


Άμεσο σχήμα Ι

Λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά σύνδεσης των συστημάτων και έτσι έχουμε τη συνδεσμολογία



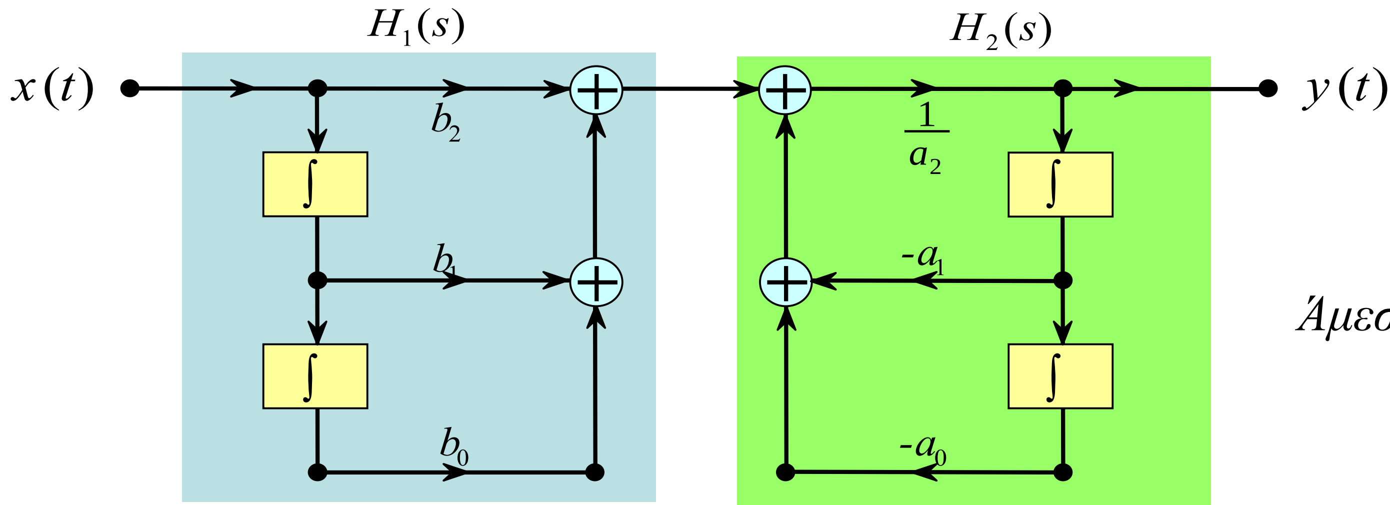
από την οποία έχουμε υλοποίηση



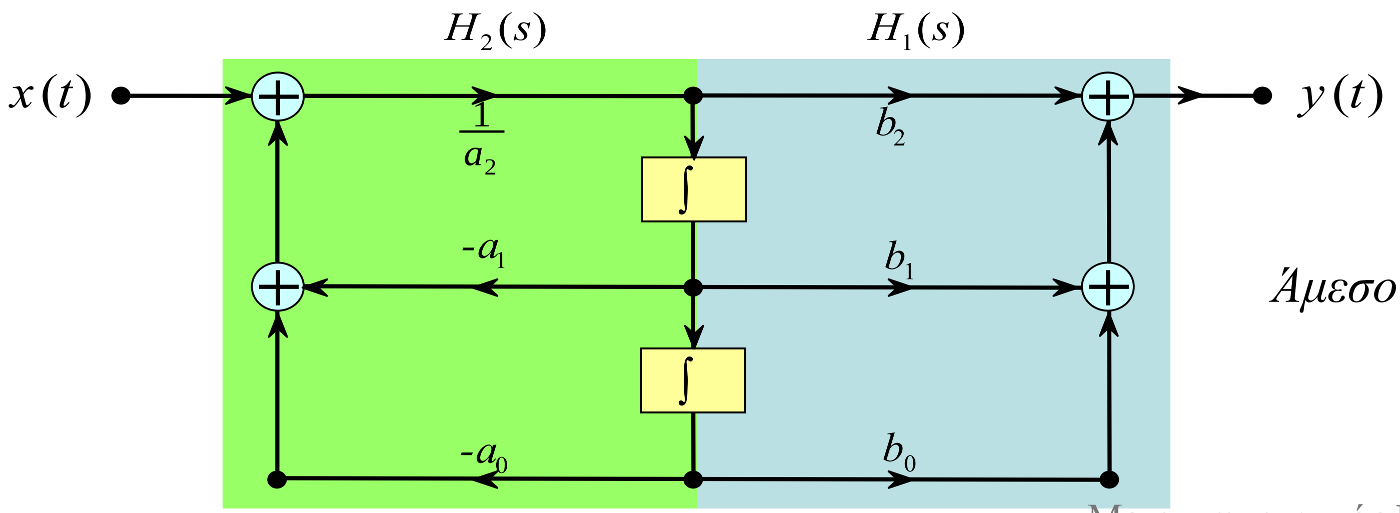
Άμεσο σχήμα Ι Ι

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$$

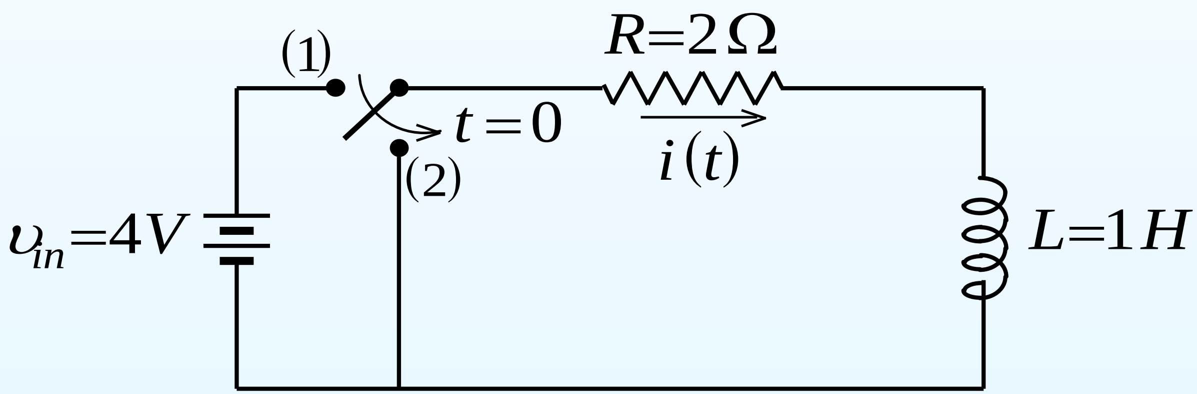


Άμεσο σχήμα I



Άμεσο σχήμα II

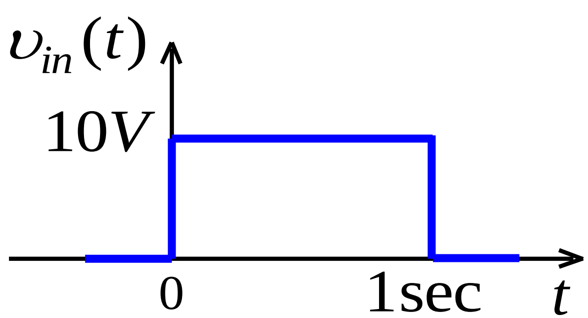
Δίνεται το κύκλωμα του Σχήματος. Αρχικά ο διακόπτης βρίσκεται σε επαφή στη θέση (1) και το σύστημα έχει αποκατασταθεί. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, την οποία θεωρούμε ως αρχή μετρήσεως του χρόνου, ο διακόπτης έρχεται σε επαφή στη θέση (2). Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος $i(t)$, από την οποία διαρρέεται το κύκλωμα, ως συνάρτηση του χρόνου.

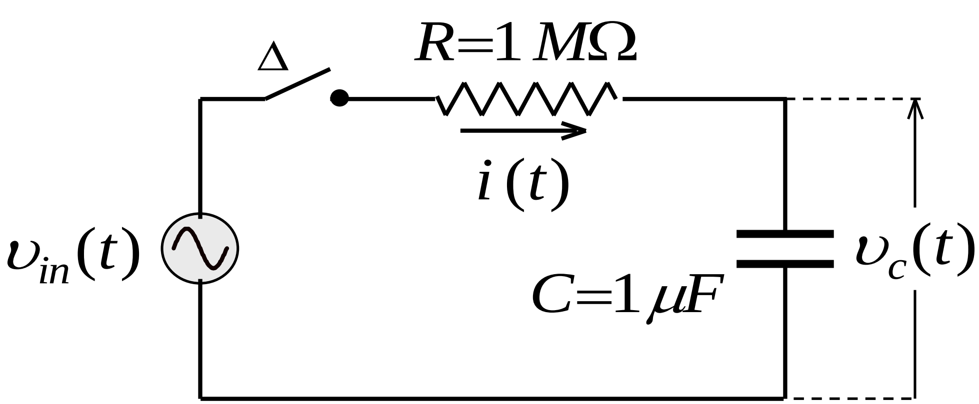


Απάντηση

$$I^{+}(s) = \frac{2}{s+2} \qquad i(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

Στο κύκλωμα του Σχήματος ο διακόπτης Δ κλείνει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Η είσοδος του κυκλώματος $\upsilon_{in}(t)$ έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα. Αν ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος, να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος $i(t)$, από την οποία διαρρέεται το κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο.





Απάντηση

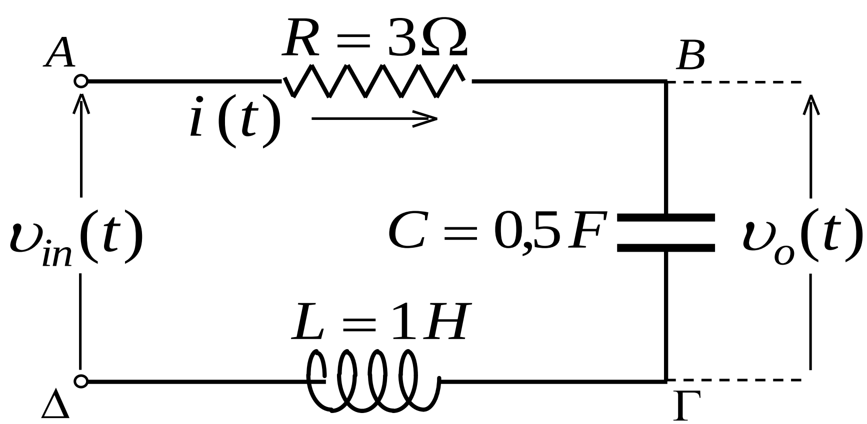
$$i(t) = 10^{-5}\left[e^{-t}u(t) - e^{-(t-1)}u(t-1)\right]$$

Για το κύκλωμα RLC που περιγράφεται στο Σχήμα

α) Να προσδιοριστεί η γραμμική διαφορική εξίσωση η οποία συνδέει την είσοδο του κυκλώματος $\upsilon_{in}(t)$ και την έξοδό του $\upsilon_o(t)$.

β) Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του συστήματος. Είναι το σύστημα ευσταθές;

γ) Αν η είσοδος του κυκλώματος είναι $\upsilon_{in}(t) = e^{-3t}\,u(t)$, με τη βοήθεια του MML να υπολογίσετε την έξοδο $\upsilon_o(t)$ για $t > 0$, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι $\upsilon_o(0^-) = 1$ και $d\upsilon_o(t)/dt|_{t=0} = 2$.



Απάντηση

α) Η γραμμική διαφορική εξίσωση είναι

$$\frac{d^2\upsilon_0(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{d\upsilon_0(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\upsilon_0(t)=\frac{1}{LC}\upsilon_{in}(t)$$

β) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s)=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}=\frac{2}{s^2+3s+2}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}$$

και η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$h(t)=L^{-1}\{H(s)\}=2\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]u(t)$$

γ) Η έξοδος του συστήματος είναι

$$\upsilon_0(t)=5e^{-t}u(t)-5e^{-2t}u(t)+e^{-3t}u(t)$$

Με τη βοήθεια του Μετασχηματισμού Laplace να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος που έχει κρουστική απόκριση

$$x(t) = u(t) - u(\mathrm{t} - 1)$$

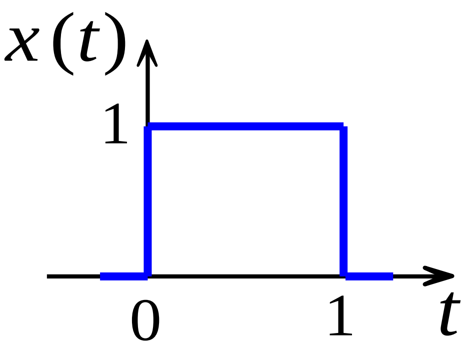
όταν η είσοδός του είναι το σήμα:

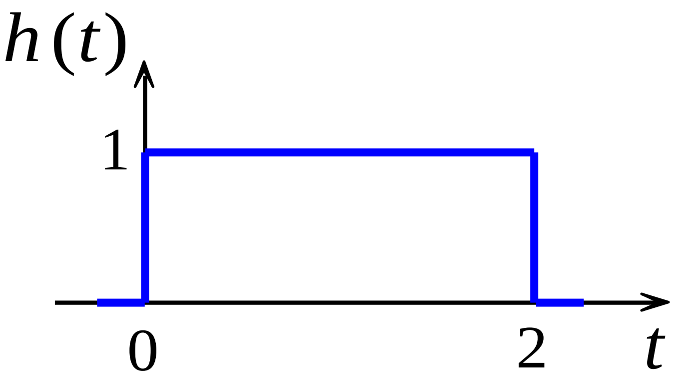
$$h(t) = u(t) - u(\mathrm{t} - 2)$$

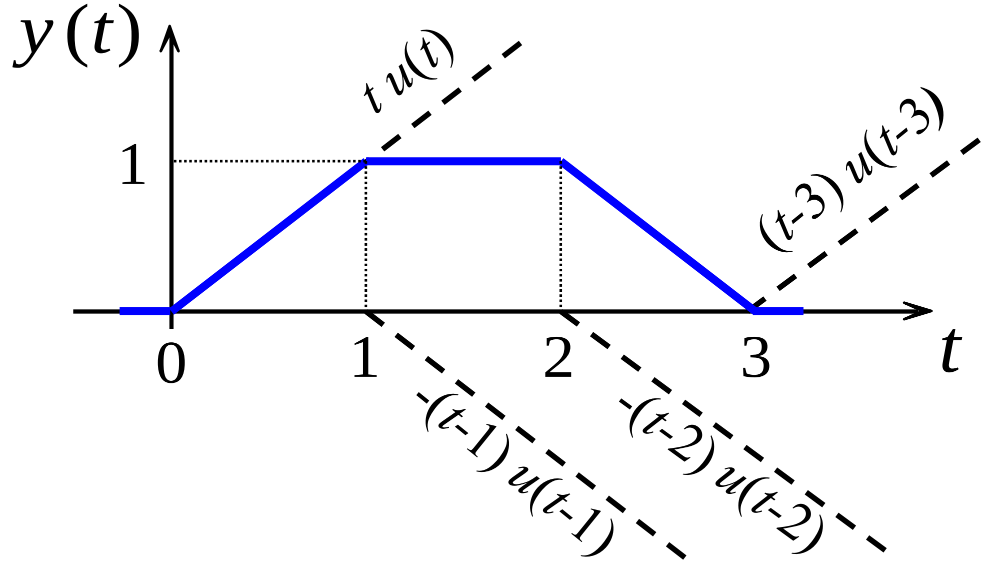
Απάντηση

$$y(t) = t\,u(t) - (t-1)\,u(t-1) - (t-2)\,u(t-2) + (t-3)\,u(t-3)$$

$$y(t)=t\,u(t)-(t-1)\,u(t-1)-(t-2)\,u(t-2)+(t-3)\,u(t-3)=\begin{cases} t, & 0\le t<1 \\ 1, & 1\le t<2 \\ 3-t, & 2\le t<3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$







Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση διαθέσιμη εδώ.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Σεραφείμ Καραμπογιάς 2015. Σεραφείμ Καραμπογιάς. «Σήματα και Συστήματα. Μετασχηματισμός Laplace.». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/DI45/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.