



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Αναλογικές και Ψηφιακές Επικοινωνίες

Ενότητα 3: Πιθανότητα σφάλματος στη φώραση
σήματος

Σεραφείμ Καραμπογιάς

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών

Ο Βέλτιστος Φωρατής

Ο φωρατής σήματος, με τη βοήθεια ενός **κανόνα απόφασης**, βασιζόμενος στην παρατήρηση του διανύσματος \mathbf{r} , λαμβάνει μία απόφαση ως προς το μεταδιδόμενο σύμβολο, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα σωστής απόφασης.

Απουσία της λαμβανόμενης πληροφορίας \mathbf{r} , η καλύτερη απόφαση είναι να επιλέξουμε το σήμα s_m που έχει τη μεγαλύτερη **εκ των προτέρων (a-priori) πιθανότητα** $P(s_m)$.

Μετά τη λήψη της πληροφορίας \mathbf{r} οι *a-priori* πληροφορίες $P(s_m)$ αντικαθίστανται από τις **εκ των υστέρων (a - posteriori) πιθανότητες**

$$P(\text{σήμα } s_m \text{ στάλθηκε} | \mathbf{r}), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad P(s_m | \mathbf{r})$$

Το **κριτήριο απόφασης** το οποίο βασίζεται στην επιλογή του σήματος που αντιστοιχεί στο μέγιστο του συνόλου των *a-posteriori* πιθανοτήτων ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος.

Αυτό το κριτήριο απόφασης καλείται κριτήριο **μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας** (*maximum a posteriori probability* – MAP)

Οι *a-posteriori* πιθανότητες μπορούν να εκφραστούν ως

$$P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r}) = \frac{f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) P(\mathbf{s}_m)}{f(\mathbf{r})}$$

επίσης ισχύει

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^M f(\mathbf{r} / \mathbf{s}_k) P(\mathbf{s}_k)$$

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός των *a-posteriori* πιθανοτήτων $P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r})$ απαιτεί γνώση των *a-priori* πιθανοτήτων $P(\mathbf{s}_m)$ και των υποσυνθήκη PDF $f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)$ για $m = 1, 2, \dots, M$.

Αν τα M σήματα είναι ισοπίθανα τότε η μεγιστοποίηση της πιθανότητας $P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r})$ οδηγεί στη μεγιστοποίηση της υπό συνθήκη πυκνότητας πιθανότητας $f(\mathbf{r} / \mathbf{s}_m)$.

Η υπό συνθήκη PDF ή οποιαδήποτε μονότονη συνάρτηση αυτής καλείται **συνάρτηση πιθανοφάνειας** (*likelihood function*)

Το κριτήριο απόφασης που βασίζεται στη μεγιστοποίηση της $f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)$ πάνω σε όλα τα δυνατά M σήματα καλείται **κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας** (*Maximum-Likelihood (ML) criterion*)

Ένας φωρατής ο οποίος βασίζεται στο MAP κριτήριο και ένας άλλος ο οποίος βασίζεται στο ML κριτήριο παίρνουν τις ίδιες αποφάσεις όταν οι *a-priori* πιθανότητες είναι όλες ίσες.

Για ένα AWGN κανάλι είναι

$$f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left[- \sum_{k=1}^N \frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0} \right], \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Αν επιλέξουμε το φυσικό λογάριθμο του $f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)$ έχουμε

$$\ln f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) = -\frac{N}{2} \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2$$

Η **μεγιστοποίηση** του $\ln f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)$ ως προς s_m ισοδυναμεί με την εύρεση του σήματος s_m το οποίο **ελαχιστοποιεί** την Ευκλείδεια απόσταση

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2$$

Οι ποσότητες $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$, καλούνται **μετρικές απόστασης** (*distance metrics*).

Για AWGN κανάλι, ο κανόνας απόφασης ο οποίος βασίζεται στο κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας (ML), απλοποιείται στην εύρεση του σήματος s_m το οποίο είναι το πλησιέστερο στο λαμβανόμενο διάνυσμα \mathbf{r} . Ο κανόνας αυτός απόφασης χαρακτηρίζεται ως **φώραση ελάχιστης απόστασης** (*minimum distance detection*)

Μία άλλη ερμηνεία του βέλτιστου κανόνα απόφασης.

Οι Ευκλείδειες αποστάσεις γράφονται και ως

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) &= \sum_{n=1}^N (r_n - s_{mn})^2 \\ &= \sum_{n=1}^N r_n^2 - 2 \sum_{n=1}^N r_n \cdot s_{mn} + \sum_{n=1}^N s_{mn}^2 \\ &= \|\mathbf{r}\|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m + \|\mathbf{s}_m\|^2, \quad m = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

Αν αμεληθεί ο κοινός όρος $\|\mathbf{r}\|^2$ που είναι κοινός σε όλες τις μετρικές έχουμε ένα σύνολο **τροποποιημένων μετρικών αποστάσεων**

$$D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = -2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m + \|\mathbf{s}_m\|^2, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Το κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας επιλέγει το σήμα $s_m(t)$ το οποίο **μεγιστοποιεί** την $f(\mathbf{r} | s_m)$ ή το $\ln f(\mathbf{r} | s_m)$ πάνω σε όλα τα δυνατά M σήματα $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$.

Το κριτήριο είναι ισοδύναμο με την **ελαχιστοποίηση** της Ευκλείδειας απόστασης $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$.

Είναι επίσης ισοδύναμο με τη **μεγιστοποίηση** της τροποποιημένης μετρικής απόστασης.

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m - \|\mathbf{s}_m\|^2$$

η οποίες αποτελούν τις **μετρικές συσχέτισης**.

Ο όρος $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m$ αντιπροσωπεύει την προβολή του λαμβανόμενου διανύσματος πάνω σε κάθε ένα από τα M δυνατά μεταδιδόμενα διανύσματα σήματος.

Η τιμή κάθε μίας από αυτές τις προβολές είναι ένα μέτρο της **συσχέτισης** μεταξύ του λαμβανόμενου διανύσματος και του m -στου σήματος

Για το λόγο αυτό τα $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$ καλούνται **μετρικές συσχέτισης** για τη λήψη απόφασης του σήματος που μεταδόθηκε.

Οι όροι $\|\mathbf{s}_m\|^2 = \mathcal{E}_m$, $m = 1, 2, \dots, M$ μπορούν να θεωρηθούν ως όροι αντιστάθμισης σε περιπτώσεις συνόλου σημάτων με άνισες ενέργειες.

Αν τα σήματα δεν είναι ισοπίθανα, ο βέλτιστος MAP φωρατής βασίζει την απόφασή του στις πιθανότητες $P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r})$, $m = 1, 2, \dots, M$,

$$P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r}) = \frac{f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) P(\mathbf{s}_m)}{f(\mathbf{r})}$$

η, ισοδύναμα, στις **μετρικές a-posteriori πιθανότητες**

$$\text{PM}(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) P(\mathbf{s}_m)$$

Παράδειγμα

Δυαδικά αντίποδα σήματα χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση πληροφορίας μέσα από AWGN κανάλι. Οι *a-priori* πιθανότητες των δύο συμβόλων (bits) είναι $p = 1 - p = 1/2$.

α) Καθορίστε το βέλτιστο κανόνα απόφασης μέγιστης πιθανοφάνειας του φωρατή.

β) Βρείτε τη πιθανότητα σφάλματος συναρτήσει του λόγου \mathcal{E}_b/N_0 .

Λύση

Σύμφωνα με το κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας (*Maximum-Likelihood (ML) criterion*) επιλέγεται από τα M πιθανά μεταβιβαζόμενα σήματα αυτό το οποίο μεγιστοποιεί την $f(\mathbf{r} | s_m)$.

Για $M = 2$ το κριτήριο έχει τη μορφή.

$$\frac{f(\mathbf{r} | s_1)}{f(\mathbf{r} | s_2)} \underset{s_2}{\overset{s_1}{>}} 1$$

$$\frac{f(\mathbf{r} | s_1)}{f(\mathbf{r} | s_2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(r-\sqrt{\mathcal{E}_b})^2/2\sigma_n^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(r+\sqrt{\mathcal{E}_b})^2/2\sigma_n^2}} = e^{-\frac{(r+\sqrt{\mathcal{E}_b})^2 - (r-\sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2}} = e^{\frac{r\sqrt{\mathcal{E}_b}}{\sigma_n^2}} \underset{s_2}{\overset{s_1}{>}} 1$$

Λογαριθμίζοντας την σχέση το κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας είναι

$$r \underset{s_2}{\overset{s_1}{>}} 0$$

Παράδειγμα

Θεωρείστε την περίπτωση σημάτων δυαδικού PAM κατά την οποία τα δύο δυνατά σημεία σήματος είναι $s_1 = -s_2 = \sqrt{\mathcal{E}_b}$, όπου \mathcal{E}_b είναι η ενέργεια ανά bit. Οι *a-priori* πιθανότητες είναι $P(s_1) = p$ και $P(s_2) = 1 - p$.

Καθορίστε τις μετρικές για το βέλτιστο MAP φωρατή εάν το μεταδιδόμενο σήμα διαβρώνεται από AWGN θόρυβο.

Λύση

Το λαμβανόμενο σήμα είναι

$$r = \pm \sqrt{\mathcal{E}_b} + y_n(T)$$

Οι δύο υπό συνθήκη PDF του r είναι

$$f(r | s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / 2\sigma_n^2} \quad f(r | s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(r + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / 2\sigma_n^2}$$

Οι δύο υπό συνθήκη PDF του r είναι

$$f(r | s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(r-\sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / 2\sigma_n^2} \quad f(r | s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(r+\sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / 2\sigma_n^2}$$

Οι μετρικές *a-posteriori* πιθανότητας $PM(r, s_m) = P(s_m) \cdot f(r | s_m)$, $m = 1, 2$ είναι

$$PM(r, s_1) = p \cdot f(r | s_1) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(r-\sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / 2\sigma_n^2}$$

$$PM(r, s_2) = (1-p) \cdot f(r | s_2) = \frac{1-p}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-(r+\sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / 2\sigma_n^2}$$

Ο κανόνας απόφασης εκφράζεται ως

$$\frac{PM(r, s_1)}{PM(r, s_2)} \underset{s_2}{\overset{s_1}{>}} 1$$

Αλλά

$$\frac{PM(r, s_1)}{PM(r, s_2)} = \frac{p}{1-p} \exp \left[\frac{(r + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 - (r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2} \right] \underset{s_2}{\overset{s_1}{>}} 1$$

λαμβάνοντας το λογάριθμο έχουμε

$$\frac{(r + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 - (r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma_n^2} = \frac{4r\sqrt{\mathcal{E}_b}}{2\sigma_n^2} \underset{s_2}{\overset{s_1}{>}} \ln \frac{1-p}{p}$$

ή ισοδύναμα

$$r\sqrt{\mathcal{E}_b} \underset{s_2}{\overset{s_1}{>}} \frac{\sigma_n^2}{2} \ln \frac{1-p}{p} = \frac{N_0}{4} \ln \frac{1-p}{p}$$

Ο βέλτιστος φωρατής υπολογίζει το μέτρο συσχέτισης $C(\mathbf{r}, s_1) = r\sqrt{\mathcal{E}_b}$ και το συγκρίνει με το κατώφλι $(N_0/4) \ln(1-p)/p$

Παρατηρούμε αν $p = 1/2$, το κατώφλι είναι ίσο με μηδέν και δεν απαιτείται γνώση του N_0 στο φωρατή. Στην περίπτωση των άνισων a-priori πιθανοτήτων, για τον υπολογισμό του κατωφλίου είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε όχι μόνο τις τιμές των a-priori πιθανοτήτων αλλά και την τιμή της φασματικής πυκνότητα ισχύος N_0 .

Αν R_m είναι η περιοχή του N -διάστατου χώρου για την οποία αποφασίζουμε ότι μεταδόθηκε το σήμα $s_m(t)$ όταν λαμβάνεται το διάνυσμα $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$. Η υποσυνθήκη πιθανότητα εσφαλμένης απόφασης, δεδομένου ότι μεταδόθηκε το $s_m(t)$, είναι

$$P(e | \mathbf{s}_m) = \int_{R_m^c} f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) dr$$

όπου R_m^c είναι το συμπλήρωμα του R_m .

Η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι

$$\begin{aligned} P(e) &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} P(e | \mathbf{s}_m) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \int_{R_m^c} f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) dr \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \left[1 - \int_{R_m} f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) dr \right] \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η πιθανότητα $P(e)$ ελαχιστοποιείται επιλέγοντας το \mathbf{s}_m , εάν η υποσυνθήκη πιθανότητα $f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m)$ είναι μεγαλύτερη από $f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_k)$ για όλα τα $m \neq k$.

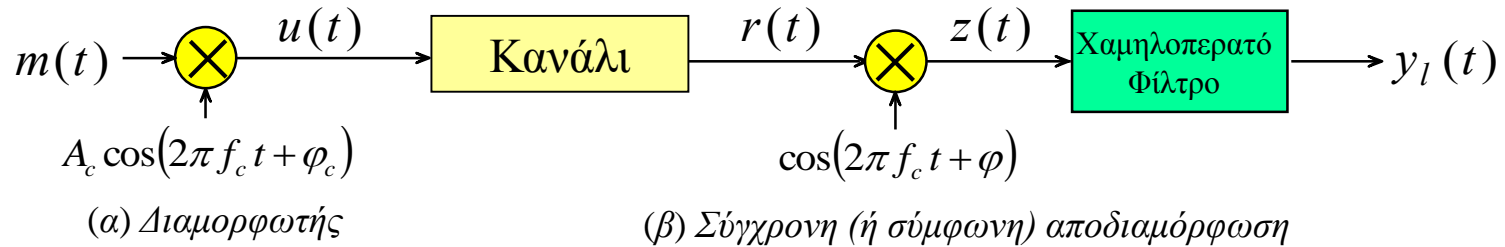
Όμοια, στην περίπτωση χρήσης του MAP κριτηρίου, εάν τα M σήματα δεν είναι ισοπίθανα, η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P(e) = 1 - \sum_{m=1}^M \int_{R_m} P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Το $P(e)$ ελαχιστοποιείται όταν τα σημεία που θα συμπεριληφθούν σε κάθε περιοχή R_m είναι αυτά για τα οποία το $P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r})$ υπερβαίνει όλες τις άλλες a-posteriori πιθανότητες.

Η διαμόρφωση και η αποδιαμόρφωση στη μετάδοση σήματος.

Η διαμόρφωση χρησιμοποιεί το σήμα πληροφορίας $m(t)$ για να μεταβάλλει το πλάτος ενός ημιτονοειδούς φέροντος $A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$.



Το διαμορφωμένο σήμα είναι

$$u(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

Το λαμβανόμενο σήμα απουσία θορύβου μέσω ιδανικού καναλιού είναι

$$r(t) = u(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

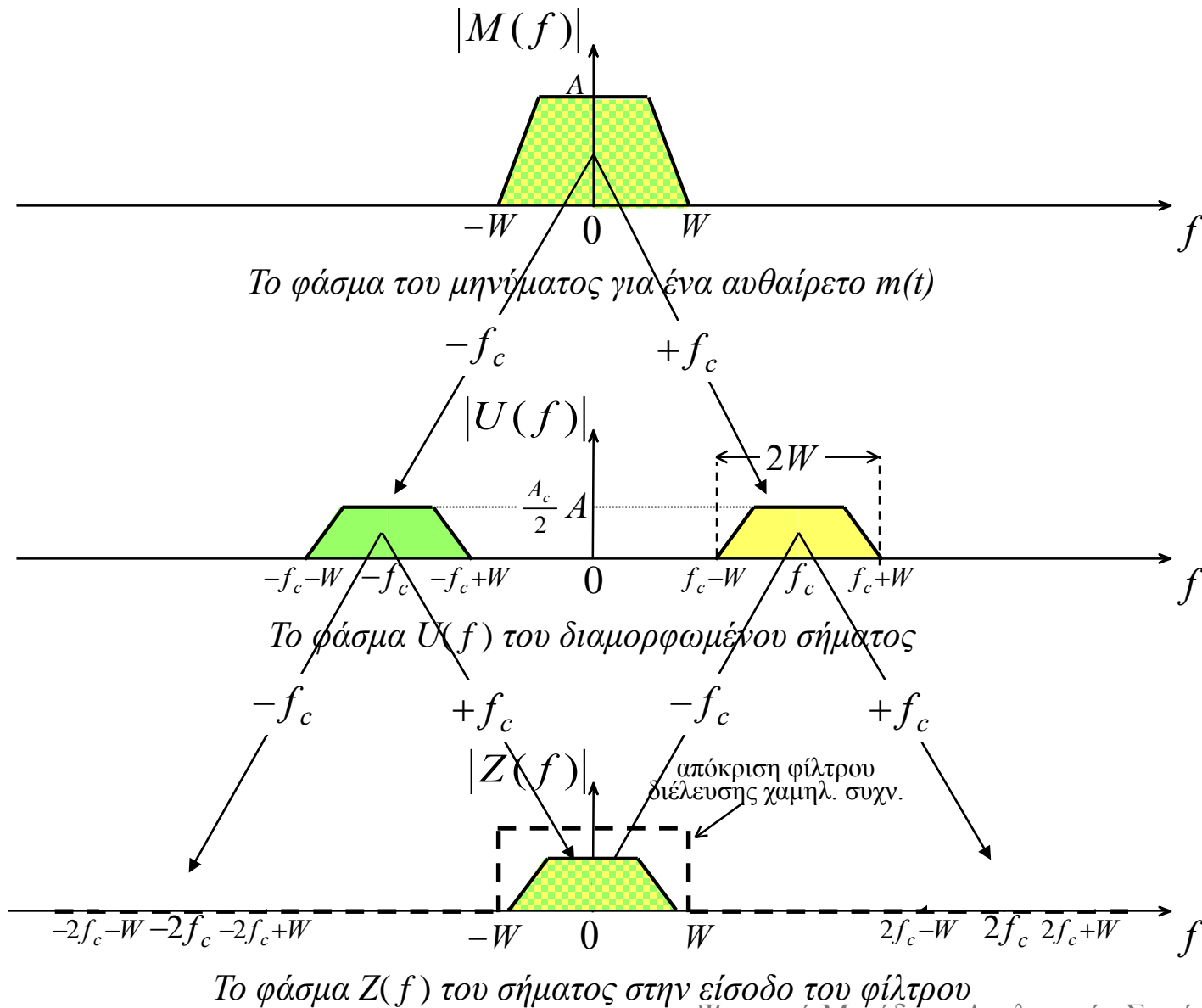
Ο πολλαπλασιασμός του $r(t)$ με ένα τοπικά παραγόμενο ημιτονοειδές σήμα δίνει

$$\begin{aligned} r(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) &= A_c m(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \cdot \cos(2\pi f_c t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(\varphi_c - \varphi) + \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(4\pi f_c t + \varphi + \varphi_c) \end{aligned}$$

Το σήμα αυτό διέρχεται μέσα από ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο με εύρος-ζώνης W . Η έξοδος του φίλτρου είναι

$$y_l(t) = \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(\varphi_c - \varphi)$$

Μελέτη της διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης στο πεδίο συχνότητας



Δομή αποδιαμορφωτή-φωρατή για τους διάφορους τύπους ψηφιακής διαμόρφωσης

Η αποδιαμόρφωση ενός μονοδιάστατου ζωνοπερατού ψηφιακού PAM σήματος μπορεί να επιτευχθεί μέσω συσχέτισης ή μέσω χρήσης προσαρμοσμένων φίλτρων.

Η παρουσία φέροντος εισάγει μία πρόσθετη επιπλοκή κατά την αποδιαμόρφωση.

Αποδιαμόρφωση και φώραση σημάτων διαμορφωμένων κατά πλάτος φέροντος

Το μεταδιδόμενο PAM σήμα σε ένα διάστημα σηματοδοσίας έχει τη μορφή

$$u_m(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Το λαμβανόμενο σήμα είναι

$$r(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

όπου $n(t)$ είναι ζωνοπερατή διαδικασία θορύβου η οποία αναπαρίσταται ως

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Η συσχέτιση του λαμβανόμενου σήματος $r(t)$ με τη συνάρτηση βάσης

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t)$$

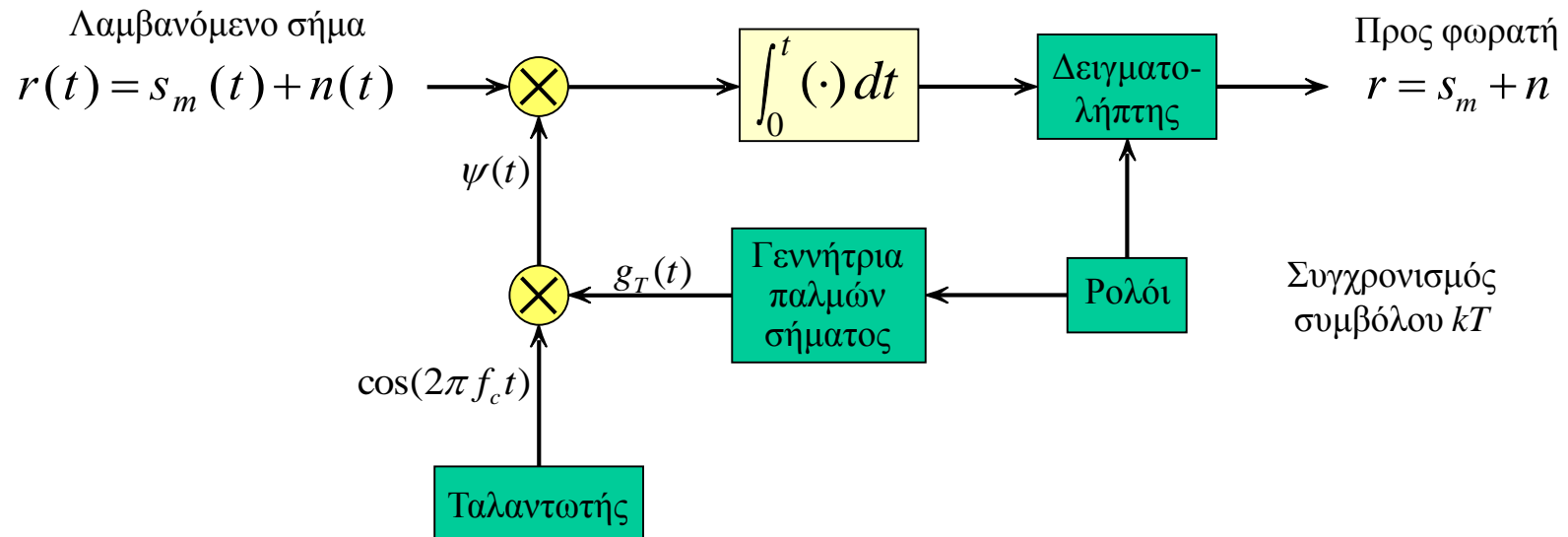
δίνει

$$\int_0^T r(t) \psi(t) dt = A_m \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} \int_0^T g_T^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt + \int_0^T n(t) \psi(t) dt = A_m \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} + n$$

όπου n είναι η συνιστώσα του προσθετικού θορύβου στην έξοδο του συσχετιστή.

Ανάκτηση Φάσης-Φέροντος

Στην πιο πάνω ανάλυση υποθέσαμε ότι η συνάρτηση $\psi(t)$ είναι τέλεια συγχρονισμένη με τη συνιστώσα σήματος του $r(t)$ τόσο χρονικά όσο και κατά τη φάση του φέροντος για το PAM.



Ιδανική αποδιαμόρφωση ζωνοπερατού ψηφιακού PAM σήματος.

Η αποδιαμόρφωση του ζωνοπερατού PAM σήματος, όπως περιγράφεται στο παραπάνω σχήμα είναι ιδανική, αλλά όχι εφικτή.

Στην πράξη όμως, αυτές οι ιδανικές συνθήκες δεν ισχύουν.

Πρώτα από όλα, η καθυστέρηση διάδοσης, που συναντάται στη μετάδοση ενός σήματος μέσα από ένα κανάλι, έχει ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση φάσης του φέροντος στο λαμβανόμενο σήμα το οποίο έχει τη μορφή

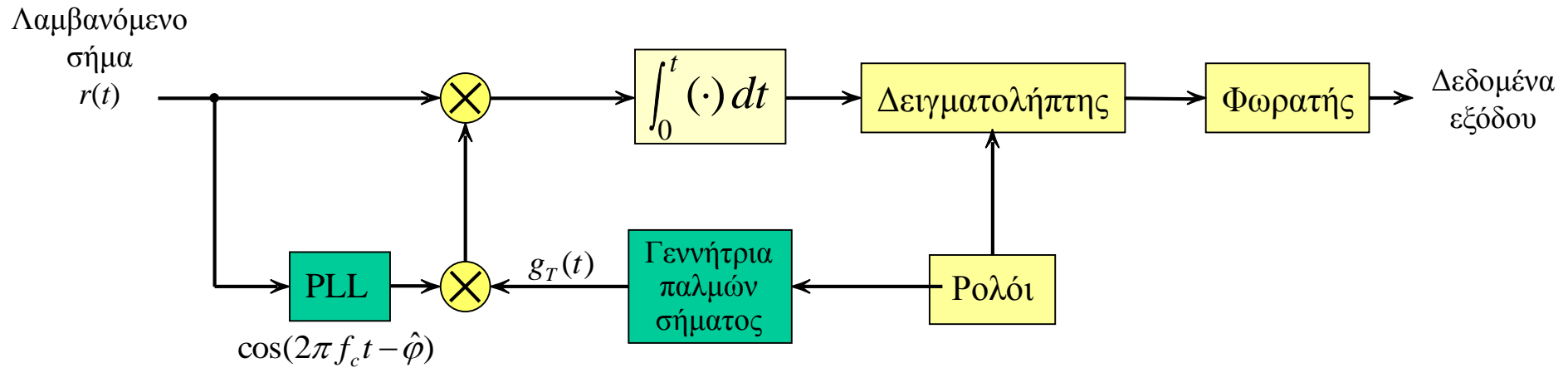
$$r(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Δεύτερον, ο ταλαντωτής, ο οποίος δημιουργεί το φέρον σήμα $\cos(2\pi f_c t)$ στο δέκτη, δεν είναι ενγένει κλειδωμένος σε φάση με τον ταλαντωτή που χρησιμοποιείται στον πομπό. Στην πράξη οι ταλαντωτές συνήθως ολισθαίνουν σε συχνότητα και φάση με αποτέλεσμα η συνάρτηση βάσης να είναι

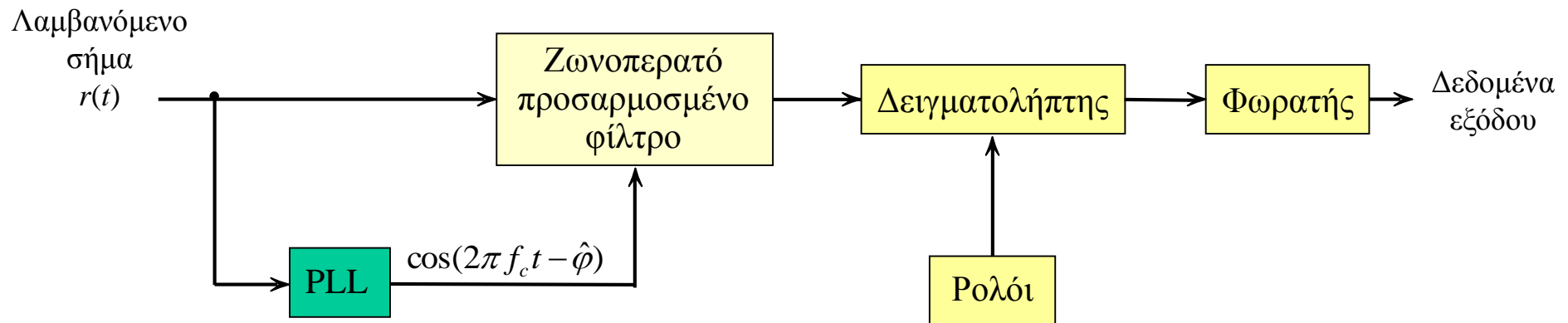
$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g_T(t) \cos [2\pi(f_c + \Delta f)t + \hat{\varphi}]$$

Η συσχέτιση του λαμβανόμενου σήματος $r(t)$ με τη συνάρτηση βάσης δίνει

$$\int_0^T r(t)\psi(t)dt = A_m \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \cos(2\pi\Delta f t + \varphi - \hat{\varphi}) + n$$



Αποδιαμόρφωση ζωνοπερατού ψηφιακού (ASK) PAM σήματος με τη χρήση ζωνοπερατής συσχέτισης



Αποδιαμόρφωση ζωνοπερατού ψηφιακού (ASK) PAM σήματος με τη χρήση ζωνοπερατού προσαρμοσμένου φίλτραρίσματος.

Βέλτιστος φωρατής

Στην περίπτωση ιδανικής (χωρίς απόκλιση) εκτίμησης φάσης του φέροντος έχουμε $\hat{\varphi} = \varphi$, και η είσοδος στον φωρατή είναι το άθροισμα σήματος και θορύβου που δίδεται από την

$$\int_0^T r(t)\psi(t)dt = A_m \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} + n$$

Όπως και στην περίπτωση PAM βασικής ζώνης, για ισοπίθανα σύμβολα, ο βέλτιστος φωρατής βασίζει την απόφασή του στις μετρικές απόστασης

$$D(r, s_m) = (r - s_m)^2, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

ή, ισοδύναμα, στις μετρικές συσχέτισης

$$C(r, s_m) = 2rs_m - s_m^2, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Αποδιαμόρφωση και Φώραση Σημάτων

Διαμορφωμένων κατά Φάση-Φέροντος

Το λαμβανόμενο ζωνοπερατό σήμα στην έξοδο του AWGN καναλιού στο διάστημα σηματοδοσίας $0 \leq t \leq T$, μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned} r(t) &= u_m(t) + n(t) \\ &= [A_{mc} \cdot g_T(t) + n_c(t)] \cos(2\pi f_c t) - [A_{ms} \cdot g_T(t) + n_s(t)] \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

όπου $n(t)$ είναι ζωνοπερατός προσθετικός Gaussian θόρυβος και A_{mc} , A_{ms} είναι οι συνιστώσες του σήματος που φέρει την πληροφορία και οι οποίες συσχετίζονται με την μεταδιδόμενη φάση φέροντος σύμφωνα με τις

$$A_{mc} = \cos\left(\frac{2\pi}{M} m\right) \quad \text{και} \quad A_{ms} = \sin\left(\frac{2\pi}{M} m\right) \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

Το λαμβανόμενο σήμα συσχετίζεται με τις

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \text{και} \quad \psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g_T(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Οι έξοδοι των δύο συσχετιστών παρέχουν τις δύο διαβρωμένες με θόρυβο συνιστώσες του σήματος

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n} = \left[\sqrt{\mathcal{E}_s} \cos\left(\frac{2\pi}{M} m\right) + n_c, \sqrt{\mathcal{E}_s} \sin\left(\frac{2\pi}{M} m\right) + n_s \right]$$

όπου

$$n_c = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_g}} \int_0^T g_T(t) n_c(t) dt \quad \text{και} \quad n_s = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_g}} \int_0^T g_T(t) n_s(t) dt$$

οι ορθογώνιες συνιστώσες του θορύβου $n_c(t)$ και $n_s(t)$ έχουν μηδενική μέση τιμή $E[n_c] = E[n_s] = 0$ και $E[n_c n_s] = 0$ και διακύμανση

$$\begin{aligned} E[n_c^2] = E[n_s^2] &= \frac{1}{2\mathcal{E}_g} \int_0^T \int_0^T g_T(t) g_T(\tau) E[n_c(t) n_c(\tau)] dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2\mathcal{E}_g} \int_0^T g_T^2(t) dt \\ &= \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

Ο βέλτιστος φωρατής προβάλλει το λαμβανόμενο διάνυσμα \mathbf{r} σε κάθε ένα από τα M δυνατά μεταδιδόμενα διανύσματα σήματος $\{s_m\}$ και επιλέγει το διάνυσμα που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη προβολή, δηλαδή, υπολογίζει τα μέτρα συσχέτισης

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1$$

και επιλέγει το διάνυσμα σήματος που δίνει τη μεγαλύτερη συσχέτιση.

Επειδή όλα τα σήματα (σύμβολα) έχουν την ίδια ενέργεια, μία ισοδύναμη μετρική φώρασης για ψηφιακή διαμόρφωση κατά φάση είναι ο υπολογισμός της φάσης του λαμβανόμενου διανύσματος $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$

$$\Theta_r = \tan^{-1} \frac{r_1}{r_2}$$

και η επιλογή εκείνου του σήματος από το σύνολο $\{s_m\}$ του οποίου η φάση είναι πλησιέστερη στο Θ_r .

Εκτίμηση της Φάσης Φέροντος

Δεδομένου ότι σε οποιοδήποτε σύστημα διαμόρφωσης φέροντος οι ταλαντωτές που χρησιμοποιούνται στον πομπό και στο δέκτη δεν είναι ενγένει κλειδωμένοι σε φάση στο δέκτη το λαμβανόμενο σήμα έχει τη μορφή

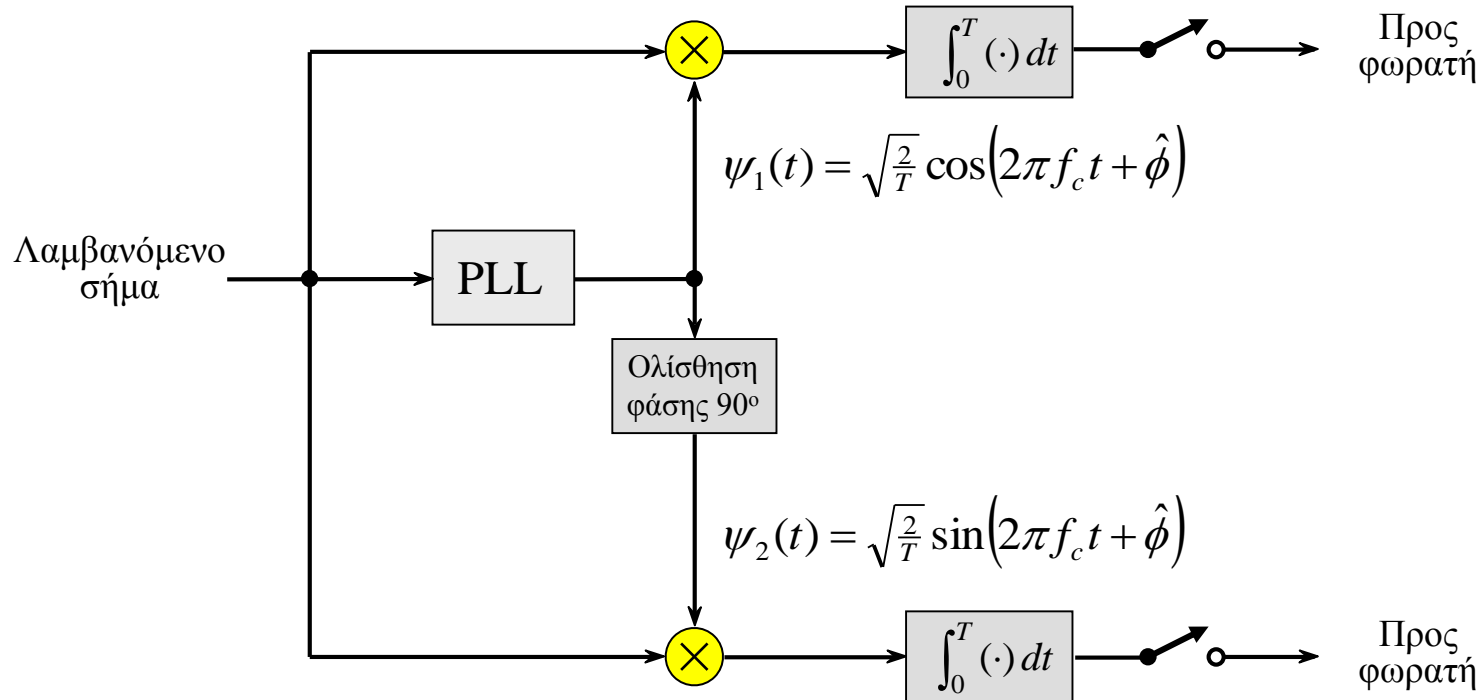
$$r(t) = A_{mc} \cdot g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) - A_{ms} \cdot g_T(t) \sin(2\pi f_c t + \phi) + n(t)$$

όπου ϕ είναι η απόκλιση φάσης του φέροντος. Αυτή η απόκλιση φάσης πρέπει να υπολογιστεί στο δέκτη (με τη βοήθεια ενός PLL) και να χρησιμοποιηθεί στην αποδιαμόρφωση του λαμβανόμενου σήματος.

Επομένως το λαμβανόμενο σήμα πρέπει να συσχετισθεί με τις ορθογώνιες συναρτήσεις βάσης

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\phi}) \quad \text{και} \quad \psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g_T(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\phi})$$

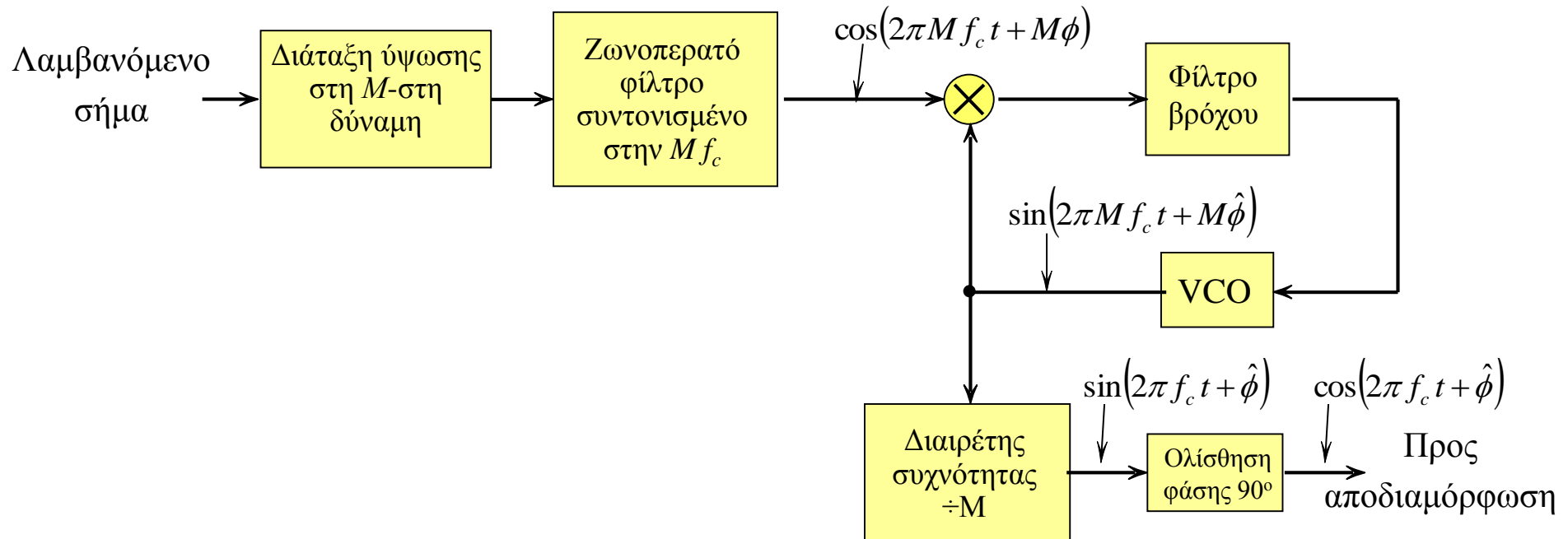
όπου $\hat{\phi}$ είναι η εκτίμηση της φάσης του λαμβανόμενου σήματος.



Αποδιαμόρφωση σημάτων PSK (για ορθογώνιο παλμό $g_T(t)$).

Εάν η ψηφιακή πληροφορία διαβιβάζεται με χρήση διαμόρφωσης φέροντος M -φάσεων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα PLL για την εκτίμηση της απόκλισης φάσης του φέροντος. Για $M = 2$, το PLL τετραγωνισμού ή ο βρόχος Costas είναι άμεσα εφαρμόσιμοι.

Για $M > 2$, το λαμβανόμενο σήμα μπορεί πρώτα να υψωθεί στη M -στη δύναμη.



Εκτίμηση φάσης φέροντος M -αδικών σημάτων PSK

Αν το λαμβανόμενο σήμα $r(t)$ έχει τη μορφή

$$r(t) = s_m(t) + n(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \phi + \frac{2\pi}{M} m\right) + n(t)$$

και περάσουμε το $r(t)$ μέσα από μία διάταξη ύψωσης στη M -στη δύναμη, το σήμα εξόδου θα περιέχει αρμονικές του φέροντος f_c . Η αρμονική την οποία επιθυμούμε να επιλέξουμε για την οδήγηση του PLL είναι η $\cos(2\pi M f_c t + M \phi)$.

Διαφορικά Σύμφωνο PSK (Differentially Coherent PSK)

Η επίδοση της ιδανικής διαμόρφωσης/αποδιαμόρφωσης σύμφωνης-φάσης επιτυγχάνεται σε μεγάλο βαθμό σε τηλεπικοινωνιακά συστήματα τα οποία μεταδίδουν και ένα σήμα φέροντος ταυτόχρονα με το σήμα πληροφορίας.

Όταν δεν μεταδίδεται ξεχωριστό σήμα-φέροντος, ο δέκτης πρέπει να εκτιμήσει τη φάση του φέροντος από το λαμβανόμενο σήμα.

Η φάση στην έξοδο του εκτιμητή (PLL) έχει ασάφειες σε πολλαπλάσια του $2\pi/M$.

Το **διαφορικό σύμφωνο PSK (DPSK)** παρακάμπτει τη ανάγκη σύμφωνου σήματος αναφοράς στο δέκτη.

Η διαφορική κωδικοποίηση, η οποία γίνεται στον πομπό, επιτρέπει την αποκωδικοποίηση των δεδομένων στο φωρατή ακόμη και απουσία ασαφειών φάσης.

Στη διαφορική κωδικοποίηση, η πληροφορία που διαβιβάζεται στο διάστημα ενός συμβόλου αποτυπώνεται στη διαφορά φάσης του συμβόλου αυτού με το προηγούμενό του.

Τα διαμορφωμένα κατά φάση σήματα, τα οποία προκύπτουν από αυτήν τη διαδικασία κωδικοποίησης, καλούνται **διαφορικά κωδικοποιημένα σήματα**. Η κωδικοποίηση εκτελείται μ' ένα σχετικά απλό λογικό κύκλωμα που προηγείται του διαμορφωτή.

Η αποδιαμόρφωση και φώραση του διαφορικά κωδικοποιημένου διαμορφωμένου κατά φάση σήματος μπορεί να επιτευχθεί όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα, χρησιμοποιώντας δηλαδή την έξοδο ενός PLL για την αποδιαμόρφωση. Η φάση του λαμβανόμενου σήματος στο φωρατή, $\Theta_r = \tan^{-1}(r_2/r_1)$, απεικονίζεται σε μία από τις M δυνατές φάσεις του σήματος $\{\theta_m\}$, η οποία είναι πλησιέστερη προς την Θ_r .

Ένας απλός συγκριτής ο οποίος ακολουθεί το φωρατή, συγκρίνει τις φάσεις του σήματος σε δύο διαδοχικά διαστήματα για να εξάγει τη μεταδιδόμενη πληροφορία. Συνεπώς, οι ασάφειες φάσης $2\pi/M$ καθίστανται αβλαβείς για την ανάκτηση πληροφορίας.

Ένα, διαφορικά κωδικοποιημένο, διαμορφωμένο κατά φάση σήμα επιτρέπει επίσης έναν άλλο τύπο αποδιαμόρφωσης, που δεν απαιτεί τον υπολογισμό της φάσης του φέροντος. Αντ' αυτού, η φάση του λαμβανόμενου σήματος σε οποιοδήποτε διάστημα σηματοδοσίας συγκρίνεται με τη φάση του λαμβανόμενου σήματος στο προηγούμενο διάστημα σηματοδοσίας.

Αποδιαμορφώνουμε το διαφορικά κωδικοποιημένο σήμα πολλαπλασιάζοντας το $r(t)$ επί $\cos(2\pi f_c t)$ και $\sin(2\pi f_c t)$ και ολοκληρώνοντας τα δύο γινόμενα πάνω στο διάστημα T . Η έξοδος του αποδιαμορφωτή για το k -στο διάστημα σηματοδοσίας είναι

$$r_k = \sqrt{\mathcal{E}_s} e^{j(\theta_k - \phi)} + n_k$$

όπου θ_k είναι η φάση του μεταδιδόμενου σήματος στο k -στο διάστημα σηματοδοσίας, ϕ είναι η φάση του φέροντος και $n_k = n_{kc} + jn_{ks}$ είναι το διάνυσμα θορύβου.

Όμοια, το λαμβανόμενο διάνυσμα σήματος στην έξοδο του αποδιαμορφωτή στο προηγούμενο διάστημα σηματοδοσίας είναι

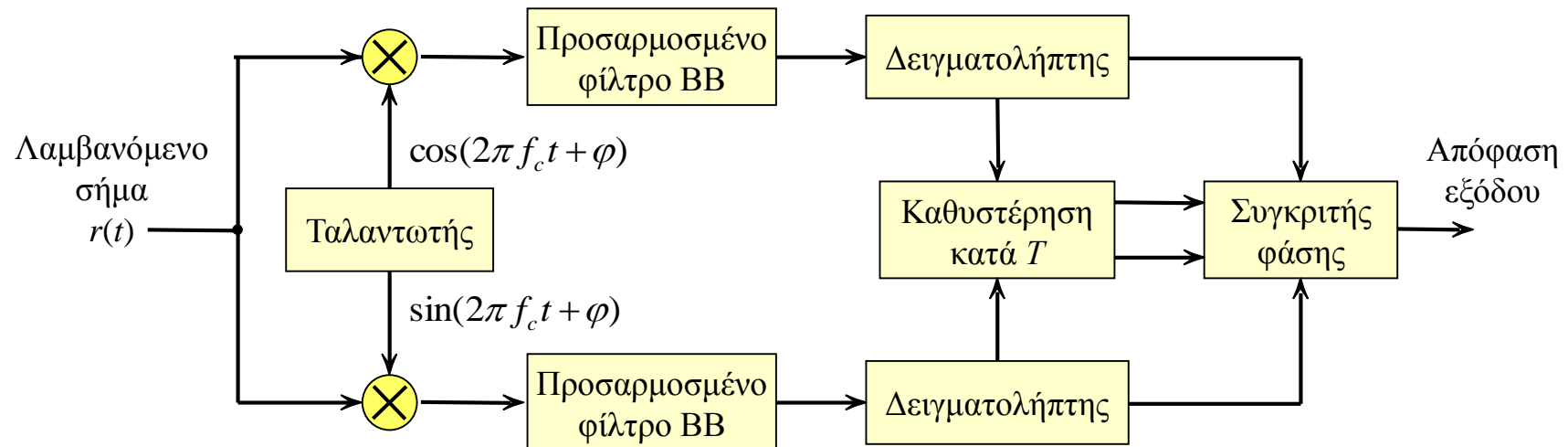
$$r_{k-1} = \sqrt{\mathcal{E}_s} e^{j(\theta_{k-1} - \phi)} + n_{k-1}$$

Η μεταβλητή απόφασης για τον ανιχνευτή φάσης είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο αυτών μιγαδικών αριθμών. Ισοδύναμα, μπορούμε να προβάλλουμε το r_k πάνω στο r_{k-1} και να χρησιμοποιήσουμε τη φάση του μιγαδικού αποτελέσματος, δηλαδή,

$$r_k \cdot r_{k-1}^* = \mathcal{E}_s e^{j(\theta_k - \theta_{k-1})} + \sqrt{\mathcal{E}_s} e^{j(\theta_k - \phi)} n_{k-1}^* + \sqrt{\mathcal{E}_s} e^{j(\theta_{k-1} - \phi)} n_k^* + n_k n_{k-1}^*$$

$$r_k \cdot r_{k-1}^* = \mathcal{E}_s e^{j(\theta_k - \theta_{k-1})} + \sqrt{\mathcal{E}_s} e^{j(\theta_k - \phi)} n_{k-1}^* + \sqrt{\mathcal{E}_s} e^{j(\theta_{k-1} - \phi)} n_k + n_k n_{k-1}^*$$

το οποίο απουσία θορύβου, δίδει τη διαφορά φάσης $\theta_k - \theta_{k-1}$. Επομένως, η αναμενόμενη τιμή του $r_k \cdot r_{k-1}^*$ είναι ανεξάρτητη της φάσης του φέροντος. Η διαφορικά κωδικοποιημένη PSK σηματοδοσία, για την οποία χρησιμοποιείται η αποδιαμόρφωση και φώραση που περιγράφηκε πιο πάνω καλείται **διαφορικό PSK (DPSK)**.



Διάγραμμα βαθμίδων αποδιαμορφωτή DPSK.

Εάν ο παλμός $g_T(t)$ είναι ορθογώνιος, τα προσαρμοσμένα φίλτρα μπορούν να αντικατασταθούν με ολοκληρωτές, και καλούνται φίλτρα **ολοκλήρωσης-και-μηδενισμού** (*integrate and dump filters*).

Αποδιαμόρφωση και φώραση σημάτων QAM

Ας υποθέσουμε ότι κατά τη μετάδοση ενός σήματος QAM μέσα από ένα κανάλι η φάση του φέροντος υφίσταται μία μετατόπιση φ . Επιπρόσθετα, το μεταδιδόμενο σήμα διαβρώνεται από προσθετικό Gaussian θόρυβο. Επομένως, το $r(t)$ εκφράζεται ως

$$r(t) = A_{mc} \cdot g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) - A_{ms} \cdot g_T(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi) + n(t)$$

Μία εκτίμηση της φάσης του φέροντος $\hat{\varphi}$ είναι διαθέσιμη στον αποδιαμορφωτή. Τότε, το λαμβανόμενο σήμα μπορεί να συσχετισθεί με τις δύο συναρτήσεις βάσης

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\varphi}) \quad \text{και} \quad \psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} g_T(t) \sin(2\pi f_c t + \hat{\varphi})$$

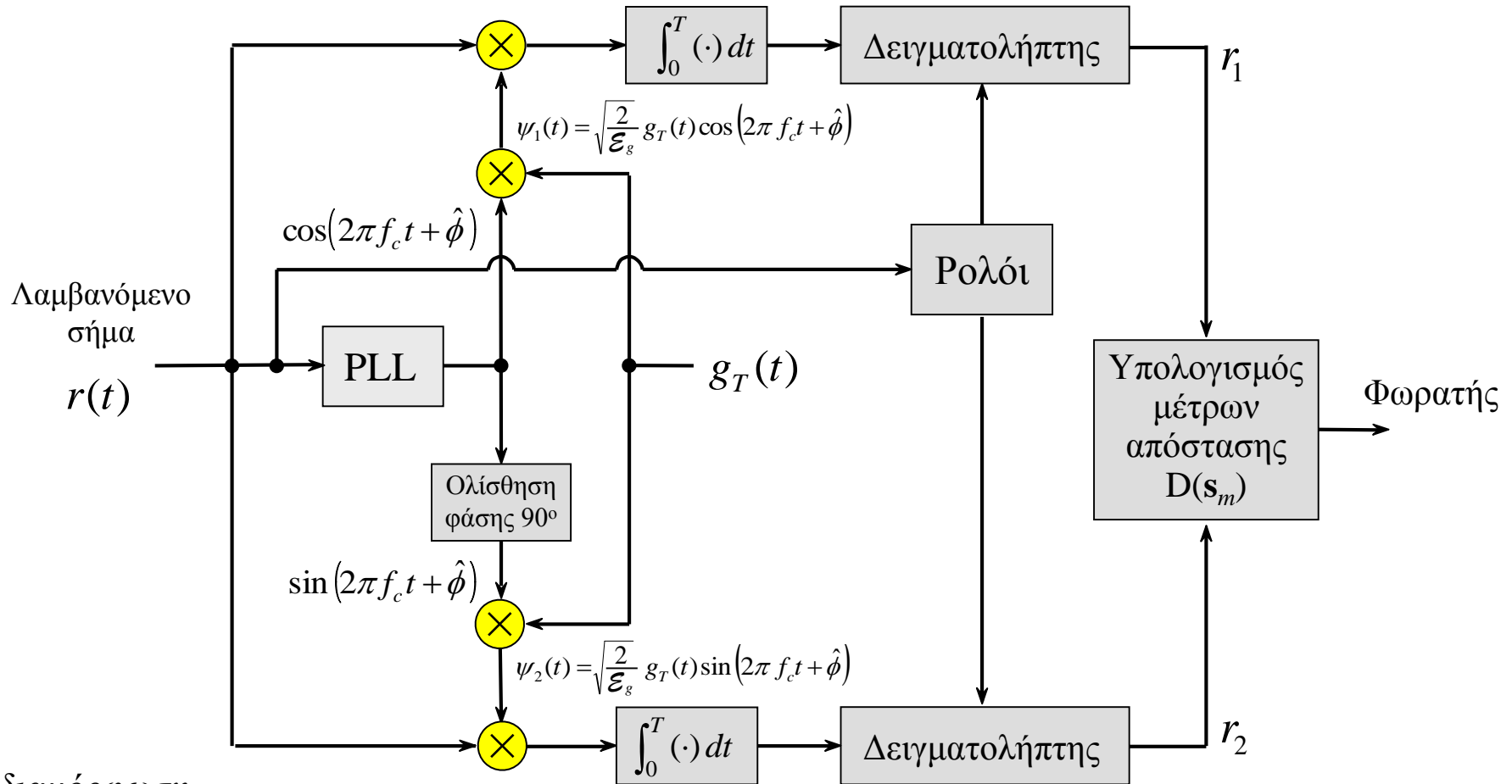
και οι έξοδοι των συσχετιστών δειγματοληπτούνται και οδηγούνται στο φωρατή.

$$r_1 = A_{mc} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \cos(\varphi - \hat{\varphi}) + A_{ms} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \sin(\varphi - \hat{\varphi}) + n_c \sin(\hat{\varphi}) - n_s \cos(\hat{\varphi})$$

$$r_2 = A_{mc} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \sin(\varphi - \hat{\varphi}) + A_{ms} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \cos(\varphi - \hat{\varphi}) + n_c \sin(\hat{\varphi}) - n_s \cos(\hat{\varphi})$$

Σημειώνεται ότι $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_g / 2$

$$r_1 = A_{mc} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_g}{2}} \cos(\varphi - \hat{\varphi}) + A_{ms} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_g}{2}} \sin(\varphi - \hat{\varphi}) + n_c \sin(\hat{\varphi}) - n_s \cos(\hat{\varphi})$$



Αποδιαμόρφωση και φώραση QAM σημάτων.

$$r_2 = A_{mc} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_g}{2}} \sin(\varphi - \hat{\varphi}) + A_{ms} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_g}{2}} \cos(\varphi - \hat{\varphi}) + n_c \sin(\hat{\varphi}) - n_s \cos(\hat{\varphi})$$

και οι έξοδοι των συσχετιστών δειγματοληπτούνται και οδηγούνται στο φωρατή είναι

$$r_1 = A_{mc} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \cos(\varphi - \hat{\varphi}) + A_{ms} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \sin(\varphi - \hat{\varphi}) + n_c \sin(\hat{\varphi}) - n_s \cos(\hat{\varphi})$$

$$r_2 = A_{mc} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \sin(\varphi - \hat{\varphi}) + A_{ms} \cdot \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} \cos(\varphi - \hat{\varphi}) + n_c \sin(\hat{\varphi}) - n_s \cos(\hat{\varphi})$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της ατελούς εκτίμησης φάσης είναι **διπλό**.

Πρώτον, το πλάτος των επιθυμητών συνιστωσών σήματος στα r_1 και r_2 ελαττώνεται κατά ένα παράγοντα $\cos(\varphi - \hat{\varphi})$ με αποτέλεσμα, το SNR να ελαττώνεται κατά ένα παράγοντα $\cos^2(\varphi - \hat{\varphi})$

Δεύτερον, υπάρχει μία διαρροή μεταξύ των ορθογώνιων συνιστωσών σήματος στο επιθυμητό σήμα. Αυτή η διαρροή σήματος, η οποία είναι ανάλογη με τον παράγοντα $\sin(\varphi - \hat{\varphi})$, προκαλεί σημαντική υποβάθμιση της επίδοσης του συστήματος εκτός εάν η διαφορά $\varphi - \hat{\varphi}$ είναι πολύ μικρή.

Τα σχόλια αυτά δείχνουν πόσο σημαντική είναι η ακριβής εκτίμηση της φάσης του φέροντος στην αποδιαμόρφωση QAM σημάτων.

Ο βέλτιστος φωρατής υπολογίζει τα μέτρα απόστασης

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2$$

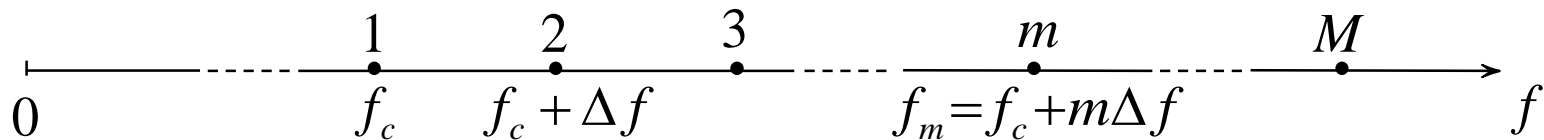
και επιλέγει το σήμα το οποίο αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή του $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$. Εάν χρησιμοποιηθεί μετρική συσχέτισης αντί μετρικής απόστασης, δεν θα πρέπει να αγνοηθεί το γεγονός ότι οι μετρικές συσχέτισης πρέπει να χρησιμοποιήσουν διόρθωση απόκλισης δεδομένου ότι τα QAM σήματα δεν έχουν ίση ενέργεια.

Αποδιαμόρφωση και Φώραση Σημάτων FSK

Ας υποθέσουμε ότι τα FSK σήματα μεταδίδονται μέσω καναλιού προσθετικού λευκού Gaussian θορύβου. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι κάθε σήμα καθυστερεί κατά τη μετάδοση μέσα από το κανάλι. Συνεπώς, το φιλτραρισμένο λαμβανόμενο m -στο ($m = 0, 1, \dots, M - 1$) σήμα στην είσοδο του αποδιαμορφωτή μπορεί να εκφρασθεί ως

$$r(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t + \varphi_m) + n(t)$$

όπου φ_m δηλώνει την ολίσθηση φάσης του m -στου σήματος (εξαιτίας της καθυστέρησης διάδοσης) και $n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$ αντιπροσωπεύει τον προσθετικό ζωνοπερατό θόρυβο.

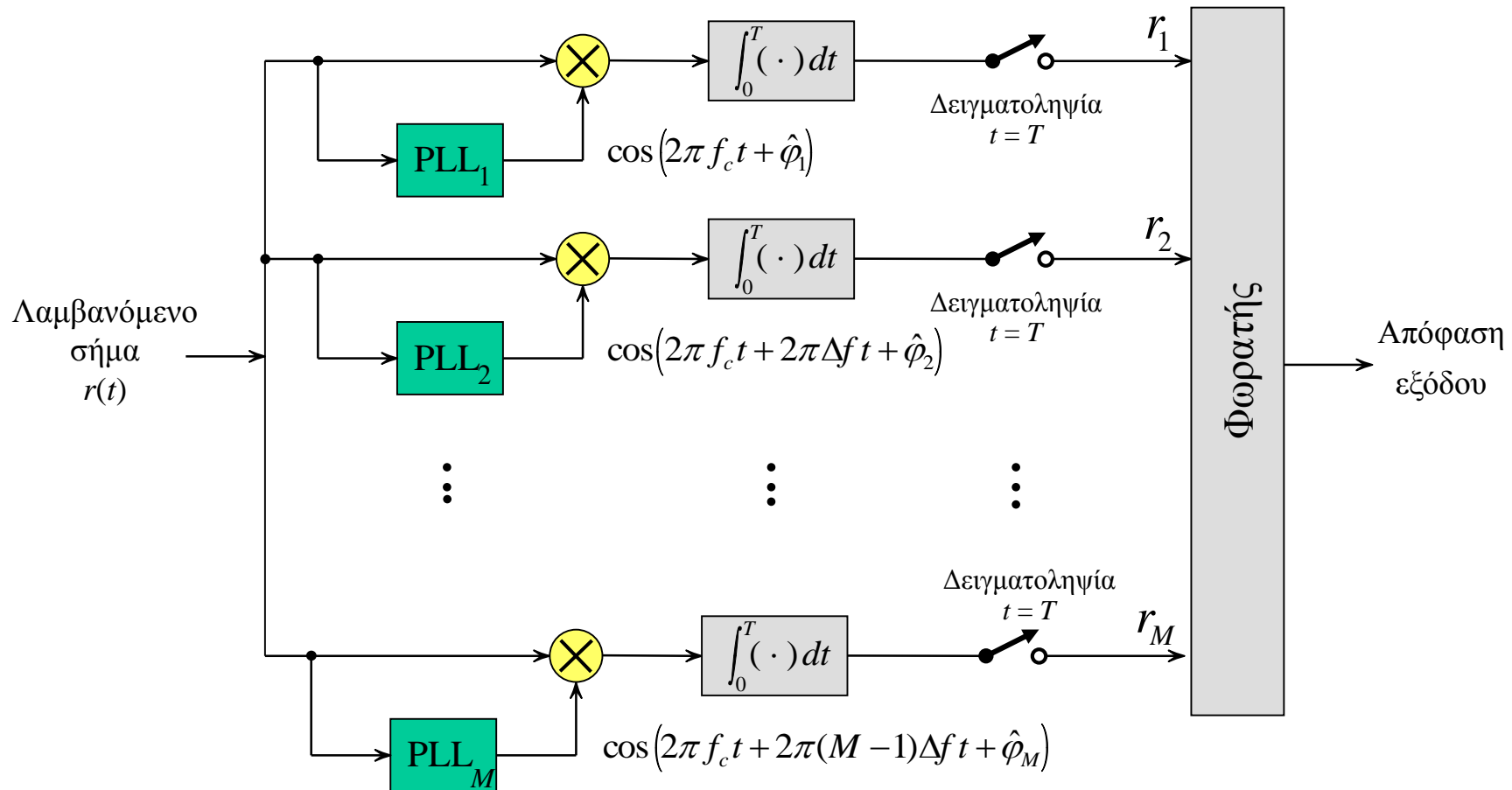


Η αποδιαμόρφωση και φώραση των M -αδικών FSK σημάτων μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους.

Μία τεχνική είναι να εκτιμήσουμε τις M ολισθήσεις φάσης $\{\varphi_m\}$ και να εκτελέσουμε *αποδιαμόρφωση και φώραση σύμφωνης-φάσης* (*phase-coherent demodulation and detection*).

Η άλλη τεχνική είναι να αγνοηθούν οι φάσεις στην αποδιαμόρφωση και φώραση των FSK σημάτων. Η μέθοδος αυτή καλείται *ασύμφωνη αποδιαμόρφωση και φώραση* (*noncoherent demodulation and detection*).

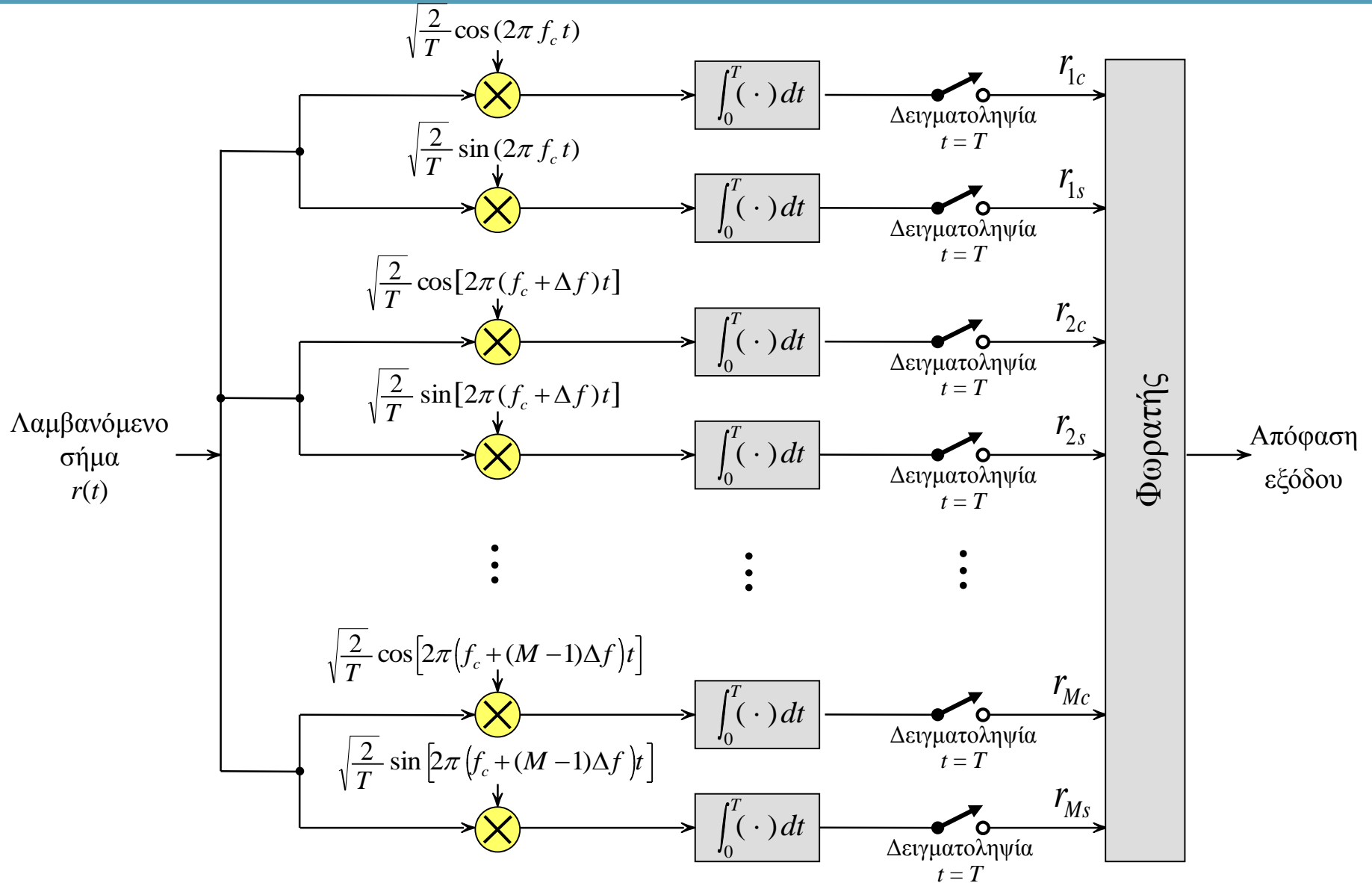
Κατά την αποδιαμόρφωση σύμφωνης-φάσης, το λαμβανόμενο σήμα $r(t)$ συσχετίζεται με κάθε ένα από τα M δυνατά σήματα $\cos(2\pi f_c t + 2\pi m\Delta f t + \hat{\varphi}_m)$, $m = 0, 1, \dots, M-1$, όπου $\{\hat{\varphi}_m\}$ είναι οι εκτιμήσεις της φάσης φέροντος.



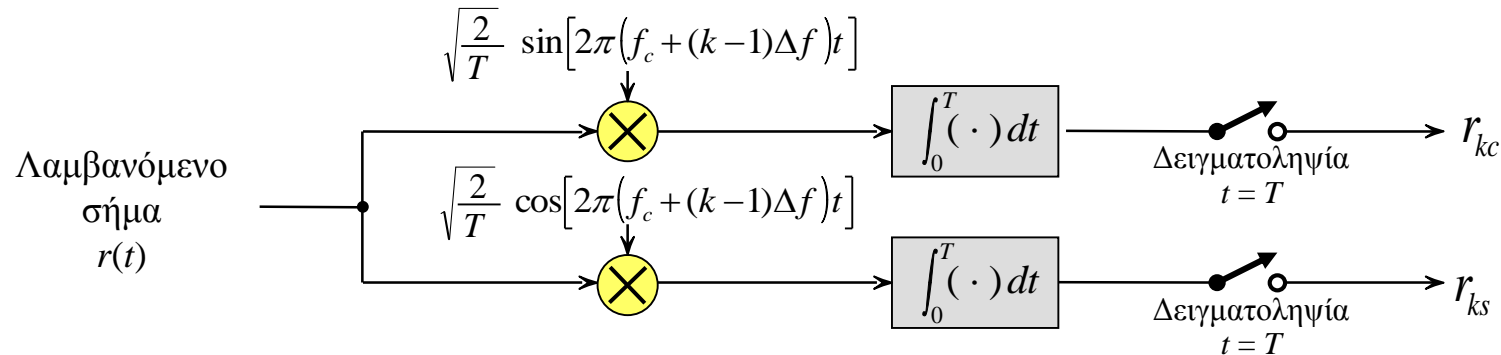
Αποδιαμόρφωση σύμφωνης-φάσης M -αδικών FSK σημάτων.

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι εάν $\varphi_m \neq \hat{\varphi}_m$, $m = 1, 2, \dots, M-1$ (ατελείς εκτιμήσεις φάσης), η συχνοτική απόσταση που απαιτείται για τη διατήρηση της ορθογωνιότητας στον αποδιαμορφωτή, είναι $\Delta f = 1/T$, η οποία είναι διπλάσια της ελάχιστης απόστασης για ορθογωνιότητα όταν $\varphi_m = \hat{\varphi}_m$.

Η απαίτηση της εκτίμησης των M φάσεων καθιστά τη σύμφωνη αποδιαμόρφωση των FSK σημάτων εξαιρετικά πολύπλοκη και μη πρακτική, ιδιαίτερα όταν ο αριθμός των συμβόλων είναι μεγάλος. Επομένως, δεν θα ασχοληθούμε με τη σύμφωνη αποδιαμόρφωση FSK σημάτων.



Αποδιαμόρφωση M -αδικών FSK σημάτων για ασύμφωνη φώραση.



$$r_{kc} = \sqrt{\mathcal{E}_s} \left[\frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos(\varphi_m) - \frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T - 1)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin(\varphi_m) \right] + n_{kc}$$

$$r_{ks} = \sqrt{\mathcal{E}_s} \left[\frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T - 1)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos(\varphi_m) + \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin(\varphi_m) \right] + n_{ks}$$

όπου n_{kc} και n_{ks} δηλώνουν τις συνιστώσες του Gaussian θορύβου στις δειγματοληπτημένες εξόδους του αποδιαμορφωτή.

Παρατηρούμε ότι για $k = m$, οι δειγματοληπτημένες τιμές στο φωρατή είναι

$$r_{kc} = \sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\varphi_k) + n_{kc} \qquad r_{ks} = \sqrt{\mathcal{E}_s} \sin(\varphi_k) + n_{ks}$$

ενώ για $k \neq m$, οι δειγματοληπτημένες τιμές στο φωρατή είναι (όταν $\Delta f = 1/T$)

$$r_{kc} = n_{kc} \qquad r_{ks} = n_{ks}$$

Η συνδυασμένη PDF των r_{mc} και r_{ms} δεδομένου του φ είναι

$$f_{\mathbf{r}_m}(r_{mc}, r_{ms} | \varphi_m) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(r_{mc} - \sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\varphi_m))^2 + (r_{ms} - \sqrt{\mathcal{E}_s} \sin(\varphi_m))^2}{2\sigma^2}}$$

και για $k \neq m$ έχουμε

$$f_{\mathbf{r}_k}(r_{kc}, r_{ks}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r_{kc}^2 + r_{ks}^2}{2\sigma^2}}$$

Δεδομένων των $2M$ τιμών των τυχαίων μεταβλητών $\{r_{kc}, r_{ks}, k = 1, 2, \dots, M\}$, ο βέλτιστος φωρατής επιλέγει το σύμβολο το οποίο αντιστοιχεί στο μέγιστο από τις *a-posteriori* πιθανότητες

$$P(\mathbf{s}_m \text{ μεταδόθηκε} | \mathbf{r}) \equiv P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r}), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

όπου το \mathbf{r} είναι ένα $2M$ -διάστατο διάνυσμα με στοιχεία $\{r_{kc}, r_{ks}\}, k = 1, 2, \dots, M$.

Βέλτιστος Φωρατής για Δυαδικό FSK

Στο δυαδικό ορθογώνιο FSK (BFSK), οι δύο *a-posteriori* πιθανότητες είναι

$$P(\mathbf{s}_1 | \mathbf{r}) = \frac{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1) P(\mathbf{s}_1)}{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})} \quad P(\mathbf{s}_2 | \mathbf{r}) = \frac{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2) P(\mathbf{s}_2)}{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})}$$

ο βέλτιστος κανόνας απόφασης μπορεί να εκφρασθεί ως

$$P(\mathbf{s}_1 | \mathbf{r}) \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} P(\mathbf{s}_2 | \mathbf{r})$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1) P(\mathbf{s}_1)}{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} \frac{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2) P(\mathbf{s}_2)}{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})} \Rightarrow \frac{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1)}{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2)} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} \frac{P(\mathbf{s}_1)}{P(\mathbf{s}_2)}$$

όπου \mathbf{r} είναι το τετραδιάστατο διάνυσμα $\mathbf{r} = (r_{1c}, r_{1s}, r_{2c}, r_{2s})$.

Ο *λόγος πιθανοφάνειας*, δηλώνεται ως $\Lambda(\mathbf{r})$ και είναι ίσος με

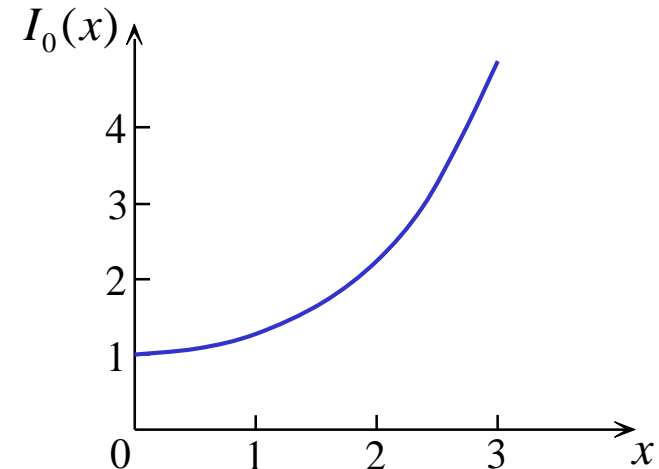
$$\Lambda(\mathbf{r}) = \frac{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1)}{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2)}$$

Αποδεικνύεται ότι βέλτιστος κανόνας απόφασης αποκτά τη μορφή

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \frac{I_0\left(\sqrt{\mathcal{E}_s}(r_{1c}^2 + r_{1s}^2)/\sigma^2\right)}{I_0\left(\sqrt{\mathcal{E}_s}(r_{2c}^2 + r_{2s}^2)/\sigma^2\right)} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} \frac{P(\mathbf{s}_1)}{P(\mathbf{s}_2)}$$

όπου $I_0(x)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης. Η συνάρτηση αυτή είναι μία μονότονα αύξουσα συνάρτηση. Η $I_0(x)$ έχει το ακόλουθο ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$$



Γραφική παράσταση της $I_0(x)$.

Επομένως, ο βέλτιστος φωρατής υπολογίζει τις δύο περιβάλλουσες

$$r_1 = \sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2} \quad r_2 = \sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}$$

και τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης Bessel

$$I_0\left(\sqrt{\mathcal{E}_s} r_1^2 / \sigma^2\right) \quad I_0\left(\sqrt{\mathcal{E}_s} r_2^2 / \sigma^2\right)$$

για να βρει το λόγο πιθανοφάνειας. Στη συνέχεια ο λόγος πιθανοφάνειας συγκρίνεται με το κατώφλι

$$\frac{P(\mathbf{s}_1)}{P(\mathbf{s}_2)}$$

για να καθορισθεί ποιο σύμβολο μεταδόθηκε.

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός αυτός απαιτεί γνώση της διακύμανσης θορύβου σ^2 και της ενέργειας του συμβόλου $\sqrt{\mathcal{E}_s}$

Εάν τα δύο σήματα είναι ισοπίθανα τότε είναι δυνατή μία σημαντική απλοποίηση της υλοποίησης του βέλτιστου φωρατή. Στην περίπτωση αυτή, το κατώφλι είναι ίσο με μονάδα και δεδομένης της μονοτονίας της συνάρτησης Bessel, ο κανόνας απόφασης του βέλτιστου φωρατή απλοποιείται στον

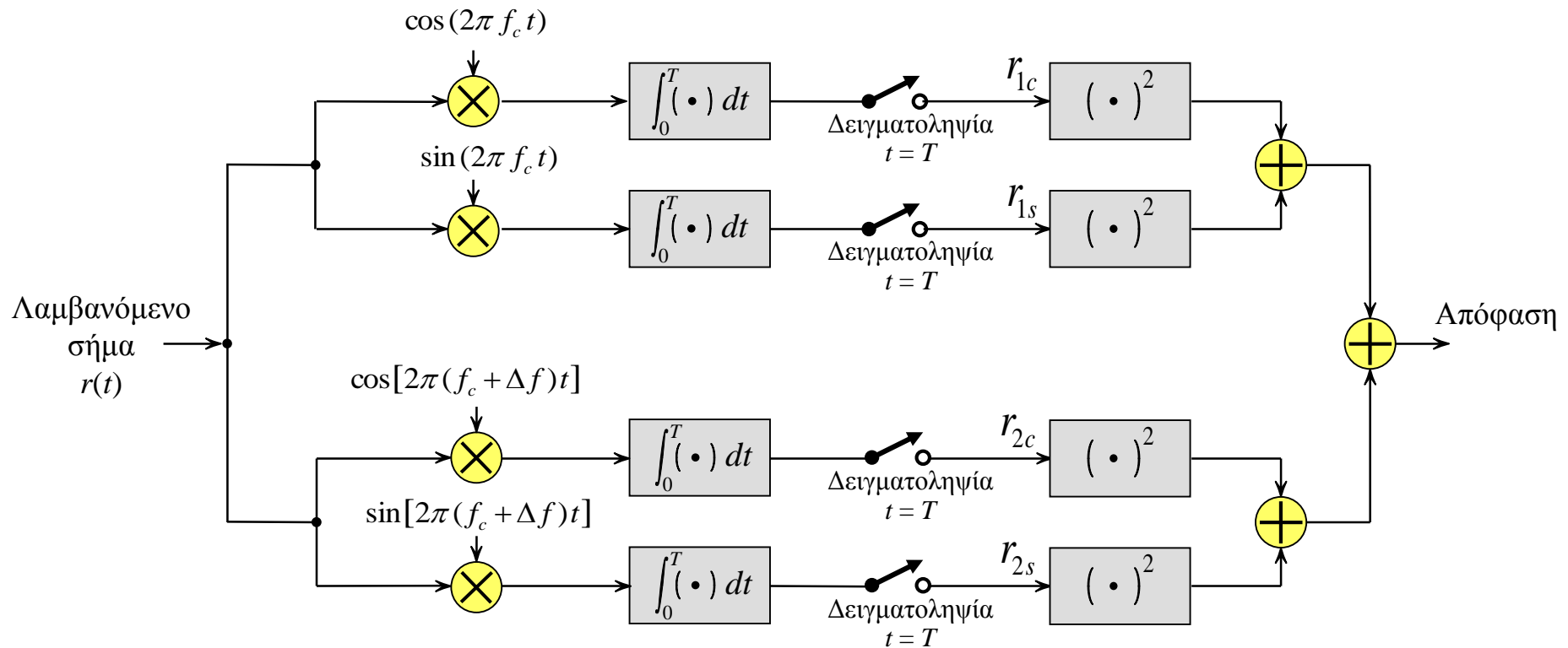
$$r_1 = \sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2} \quad \stackrel{S_1}{\approx} \quad r_2 = \sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}$$

Επομένως, ο βέλτιστος φωρατής βασίζει την απόφασή του στις δύο περιβάλλουσες

$$r_1 = \sqrt{r_{1c}^2 + r_{1s}^2} \quad r_2 = \sqrt{r_{2c}^2 + r_{2s}^2}$$

και γι' αυτό καλείται **φωρατής περιβάλλουσας** (*envelope detector*).

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός των περιβαλλουσών των λαμβανόμενων δειγμάτων στην έξοδο του αποδιαμορφωτή καθιστά τις φάσεις φέροντος $\{\varphi_m\}$ αδιάφορες σχετικά με το ποιο σήμα μεταδόθηκε. Ισοδύναμα, η απόφαση μπορεί να βασισθεί στον υπολογισμό των τετραγώνων των περιβαλλουσών r_1^2 και r_2^2 , περίπτωση κατά την οποία ο φωρατής καλείται **φωρατής νόμου-τετραγώνων** (*square-law detector*).



Ασύμφωνη αποδιαμόρφωση και φώραση νόμου τετραγώνου για δυαδικά FSK σήματα.

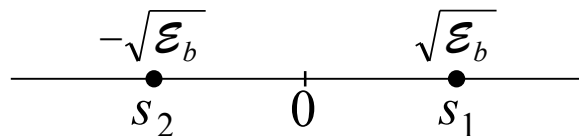
Η γενίκευση του βέλτιστου αποδιαμορφωτή και φωρατή για την περίπτωση M -αδικών ορθογώνιων FSK σημάτων είναι εύκολη.

Πιθανότητα Σφάλματος στη Δυαδική Διαμόρφωση

Ας θεωρήσουμε δυαδικά PAM σήματα βασικής ζώνης, όπου οι δύο κυματομορφές σήματος είναι η $s_1(t) = g_T(t)$ και $s_2(t) = -g_T(t)$.

όπου $g_T(t)$ είναι ένας οποιοσδήποτε παλμός ο οποίος είναι μη μηδενικός στο διάστημα $0 \leq t \leq T$ και έχει ενέργεια ίση με \mathcal{E}_b .

Τα δύο δυνατά σημεία σήματος είναι $s_1 = -s_2 = \sqrt{\mathcal{E}_b}$, τα σήματα αυτά καλούνται *αντίποδα*.



Σημεία σήματος για αντίποδα σύμβολα

Οι *a-priori* πιθανότητες είναι $P(s_1) = p$ και $P(s_2) = 1 - p$.

Ας υποθέσουμε ότι μεταδόθηκε το $s_1(t)$. Το λαμβανόμενο σήμα είναι

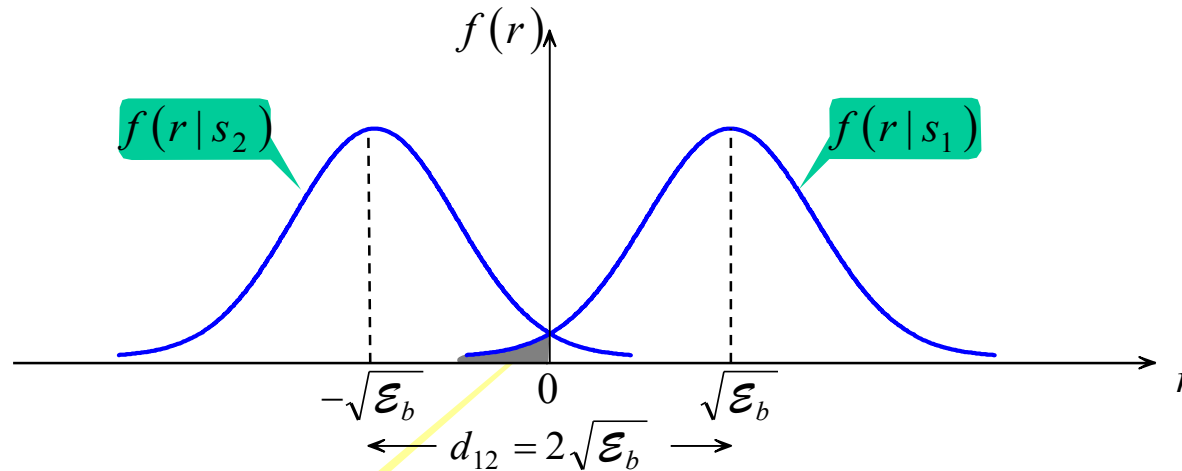
$$r = s_1 + n = \sqrt{\mathcal{E}_b} + n$$

όπου $n = y_n(T)$ είναι μία μηδενικής μέσης τιμής Gaussian τυχαία διαδικασία με διακύμανση $\sigma_n^2 = N_0 / 2$

Οι δύο υπό συνθήκη PDF του r είναι

$$f(r | s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / N_0}$$

$$f(r | s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r + \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / N_0}$$



Υποσυνθήκη PDF των δύο λαμβανομένων σημάτων, όταν τα δύο σήματα είναι ισοπίθανα

Δεδομένου ότι μεταδόθηκε το $s_1(t)$ η πιθανότητα σφάλματος είναι να λάβουμε $r < 0$, δηλαδή,

$$P(e | s_1) = \int_{-\infty}^0 f(r | s_1) dr = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / N_0} dr$$

$$P(e | s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 e^{-(r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2 / N_0} dr$$

με αλλαγή μεταβλητής $\frac{x^2}{2} = \frac{(r - \sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{N_0}$ έχουμε

$$P(e | s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}} e^{-x^2/2} dx$$

ή λόγω της συμμετρίας της συνάρτησης

$$P(e | s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

Με τη βοήθεια της συνάρτησης Q έχουμε

$$P(e | s_1) = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

Η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_b = p \cdot P(e | s_1) + (1 - p) \cdot P(e | s_2) \stackrel{p = \frac{1}{2}}{=} Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} \right)$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα σφάλματος εξαρτάται μόνο από το λόγο \mathcal{E}_b/N_0 και όχι από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των σημάτων και του θορύβου.

Ο λόγος $2\mathcal{E}_b/N_0$ είναι επίσης και το SNR εξόδου του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένου φίλτρου (ή τύπου συσχέτισης).

Ο λόγος \mathcal{E}_b/N_0 συνήθως καλείται **λόγος σήματος-προς-θόρυβο** (SNR) ή SNR/bit.

Η απόσταση των δύο σημείων σήματος είναι $d_{12} = 2\sqrt{\mathcal{E}_b}$. Η μέση πιθανότητα σφάλματος εκφράζεται με τη βοήθεια της απόστασης ως

$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}} \right)$$

Αποδεικνύεται ότι η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος οποιουδήποτε δυαδικού συστήματος το οποίο χρησιμοποιεί δύο ισοπίθانا σήματα.

Παράδειγμα

Ένα σύστημα δυαδικού PAM χρησιμοποιεί ορθογώνιους παλμούς διάρκειας T και πλατών $\pm A$ για τη μετάδοση ψηφιακής πληροφορίας σε ρυθμό $R_b = 10^5$ bps. Εάν η φασματική πυκνότητα ισχύος του προσθετικού Gaussian θορύβου είναι $N_0 / 2$, όπου $N_0 = 10^{-2}$ W/Hz, καθορίστε την τιμή του A που απαιτείται για να επιτύχουμε πιθανότητα σφάλματος $P_b = 10^{-6}$.

Λύση

Δεδομένου ότι ο ρυθμός μετάδοσης είναι $R_b = 10^5$ bits/sec η χρονική διάρκεια του bit είναι $T_b = 10^{-5}$ sec.

Η μέση πιθανότητα σφάλματος για δυαδικό PAM σύστημα είναι

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

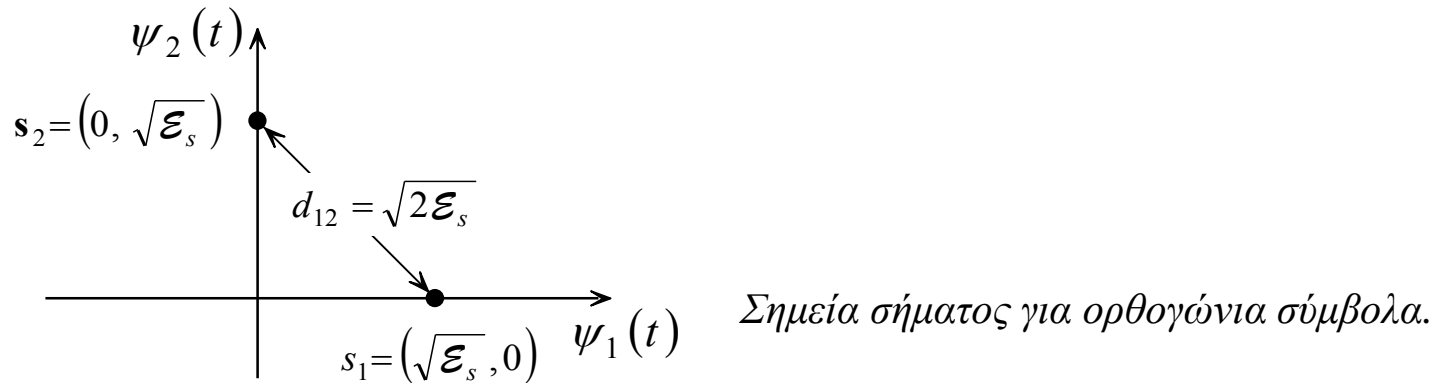
όπου η ενέργεια bit είναι $\mathcal{E}_b = A^2 T_b$. Για $P(e) = 10^{-6}$ έχουμε

$$\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}} = 4,75 \Rightarrow \mathcal{E}_b = \frac{(4,75)^2 N_0}{2} = 0,1128$$

επομένως

$$A^2 T_b = 0,1128 \Rightarrow A = 106,21$$

Πιθανότητα Σφάλματος για Δυαδικά Ορθογώνια Σήματα



Ας υποθέσουμε ότι μεταδόθηκε το s_1 . Το λαμβανόμενο διάνυσμα είναι

$$\mathbf{r} = \left[\sqrt{\mathcal{E}_b} + n_1, n_2 \right]$$

Οι μετρικές συσχέτισης είναι

$$C(\mathbf{r}, s_1) = 2\mathbf{r} \cdot s_1 - \|\mathbf{s}_1\|^2 \qquad C(\mathbf{r}, s_2) = 2\mathbf{r} \cdot s_2 - \|\mathbf{s}_2\|^2$$

Η πιθανότητα σφάλματος είναι η πιθανότητα να έχουμε $C(\mathbf{r}, s_2) > C(\mathbf{r}, s_1)$. Επομένως

$$P(e | s_1) = P(C(\mathbf{r}, s_2) > C(\mathbf{r}, s_1)) = P(n_2 - n_1 > \sqrt{\mathcal{E}_b})$$

Τα n_1 και n_2 είναι μηδενικής μέσης τιμής στατιστικά ανεξάρτητες Gaussian τυχαίες μεταβλητές, η κάθε μία με διακύμανση $N_0/2$,

Η τυχαία μεταβλητή $n = n_2 - n_1$ είναι Gaussian με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση N_0 .

Συνεπώς

$$\begin{aligned} P(n_2 - n_1 > \sqrt{\mathcal{E}_b}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{\sqrt{\mathcal{E}_b}}^{\infty} e^{-x^2/2N_0} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\mathcal{E}_b/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι αν μεταδοθεί το s_2 , τότε δεδομένης της συμμετρίας, λαμβάνουμε την ίδια πιθανότητα σφάλματος.

Η μέση πιθανότητα σφάλματος για δυαδικά ορθογώνια σήματα είναι

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

Η μέση πιθανότητα σφάλματος για δυαδικά αντίποδα σήματα είναι

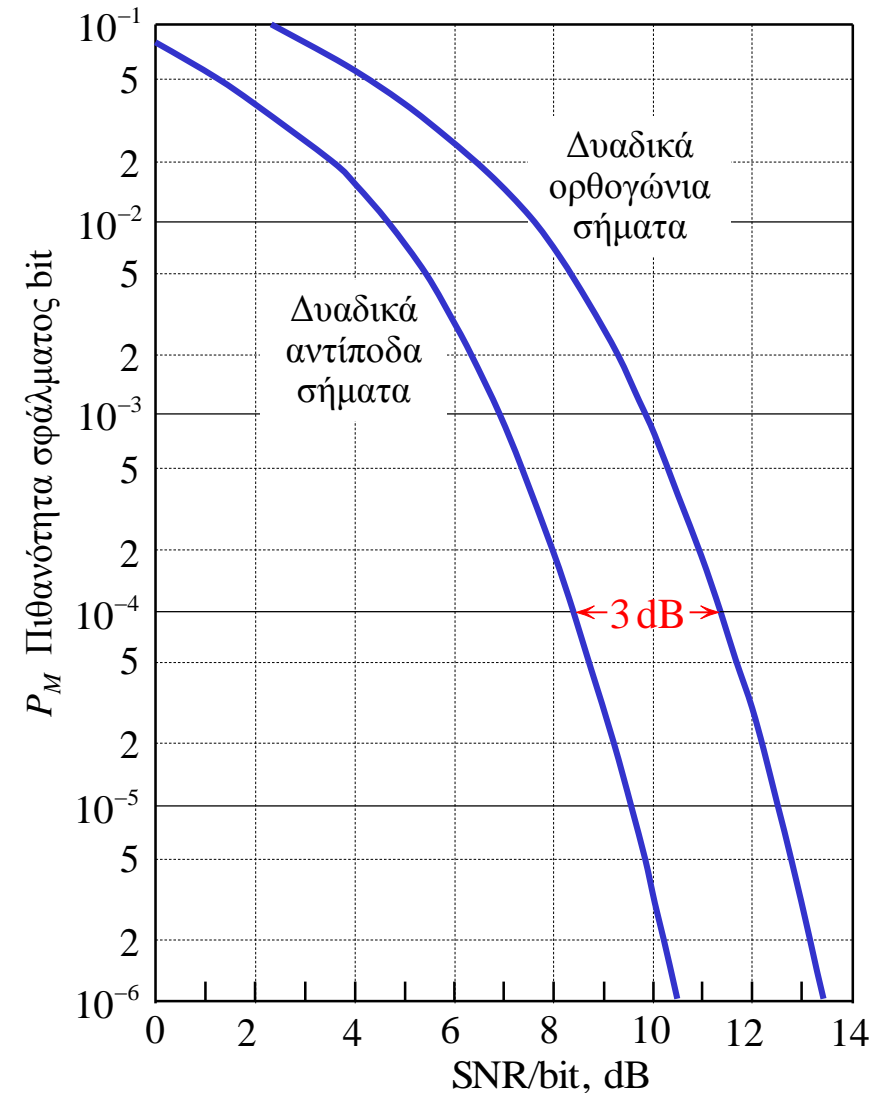
$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

Η μέση πιθανότητα σφάλματος για δυαδικά ορθογώνια σήματα είναι

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

Παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια σήματα απαιτούν διπλάσια ενέργεια για να επιτύχουν την ίδια πιθανότητα σφάλματος με τα αντίποδα σήματα.

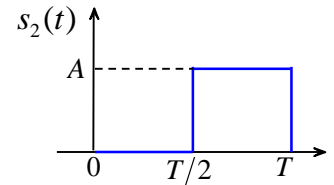
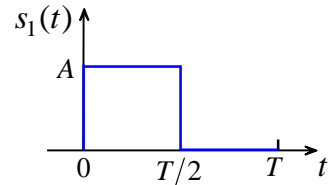
Επειδή $10\log_{10}2 = 3\text{ dB}$, λέμε ότι τα ορθογώνια σήματα είναι υποδεέστερα κατά 3 dB των αντίποδων σημάτων. Η διαφορά των 3 dB οφείλεται στην απόσταση μεταξύ των δύο σημείων σήματος, το τετράγωνο της οποίας είναι $d_{12}^2 = 2\mathcal{E}_b$ για τα ορθογώνια σήματα ενώ $d_{12}^2 = 4\mathcal{E}_b$ για τα αντίποδα σήματα.



Πιθανότητα σφάλματος για δυαδικά ισοπίθανα σήματα

Πρόβλημα

Ένα ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα βασικής ζώνης, χρησιμοποιεί τα σήματα



για τη μετάδοση δύο ισοπίθανων μηνυμάτων. Θεωρούμε ότι το τηλεπικοινωνιακό πρόβλημα που μελετούμε είναι ένα πρόβλημα “μίας μόνον ευκαιρίας”, δηλαδή, τα μηνύματα μεταδίδονται μία μόνο φορά και μετά δεν ακολουθεί καμία μετάδοση. Το κανάλι δεν εισάγει εξασθένηση και ο θόρυβος είναι AWGN με φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$.

1. Βρείτε ένα κατάλληλο σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης για την αναπαράσταση των σημάτων.

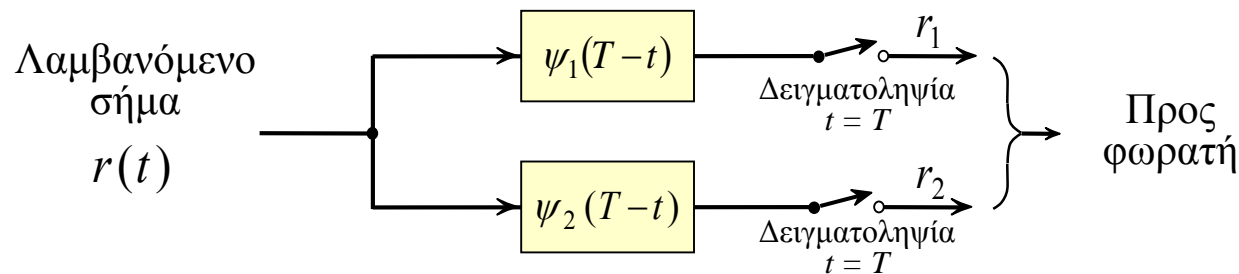
Η διάσταση του σήματος είναι 2. Μία ορθογώνια βάση για το χώρο σήματος αποτελείται από τα σήματα

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}}, & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}}, & T/2 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

2. Με ένα διάγραμμα βαθμίδων, δώστε τις ακριβείς προδιαγραφές του βέλτιστου δέκτη που χρησιμοποιεί προσαρμοσμένα φίλτρα. Τοποθετείστε προσεκτικά τους τίτλους των βαθμίδων του διαγράμματος.

Ο βέλτιστος δέκτης είναι αυτός του σχήματος



3. Βρείτε την πιθανότητα σφάλματος του βέλτιστου δέκτη.

Υποθέτοντας ότι μεταδόθηκε το σήμα $s_1(t)$, το διάνυσμα λήψης στην έξοδο του δειγματολήπτη είναι

$$\mathbf{r} = \left[\sqrt{\frac{A^2 T}{2}} + n_1, n_2 \right]$$

Όπου n_1 και n_2 είναι μηδενικής μέσης τιμής Gaussian τυχαίες διαδικασίες με διακύμανση $N_0/2$.

Η πιθανότητα σφάλματος $P(e | s_1)$ είναι

$$\begin{aligned}
 P(e | s_1) &= P\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2}} + n_1 > n_2\right) = P\left(n_2 - n_1 > \sqrt{\frac{A^2 T}{2}}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{A^2 T / 2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2N_0}} dx \stackrel{\xi = \frac{x}{\sqrt{N_0}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A^2 T / 2N_0}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2N_0}}\right)
 \end{aligned}$$

Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές n_1 και n_2 είναι μηδενικής μέσης τιμής στατιστικά ανεξάρτητες Gaussian τυχαίες μεταβλητές, η κάθε μία με διακύμανση $N_0/2$, Η τυχαία μεταβλητή $n = n_2 - n_1$ είναι επίσης Gaussian τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση N_0 .

Όμοια βρίσκεται και

$$P(e | s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2N_0}}\right)$$

Έτσι έχουμε για τη μέση πιθανότητα σφάλματος

$$P(e) = \frac{1}{2} P(e | s_1) + \frac{1}{2} P(e | s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2N_0}}\right)$$

Παράδειγμα

Σε ένα κανάλι προσθετικού λευκού θορύβου με φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$, μεταδίδονται δύο ισοπίθανα μηνύματα χρησιμοποιώντας τα σήματα

$$s_1(t) = \begin{cases} \frac{At}{2}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Καθορίστε τη δομή του βέλτιστου δέκτη και βρείτε την πιθανότητα σφάλματος.

1. Τα δύο ισοπίθανα σήματα έχουν την ίδια ενέργεια και έτσι ο βέλτιστος δέκτης είναι δυνατό να βασίζεται στον κανόνα απόφασης

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(t) \cdot s_1(t) dt \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \cdot s_2(t) dt \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \cdot (s_1(t) - s_2(t)) dt \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} 0$$

2. Αν μεταδόθηκε το σήμα $s_1(t)$, τότε $r(t) = s_1(t) + n(t)$ και ο κανόνας απόφασης γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (s_1(t) + n(t)) \cdot (s_1(t) - s_2(t)) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot (s_1(t) - s_2(t)) dt + \int_{-\infty}^{\infty} n(t) \cdot (s_1(t) - s_2(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot (s_1(t) - s_2(t)) dt + y_n \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} 0 \end{aligned}$$

όπου $y_n = \int_{-\infty}^{\infty} n(t) \cdot (s_1(t) - s_2(t)) dt$ είναι τυχαία διαδικασία.

Η τυχαία διαδικασία θορύβου $y_n = \int_{-\infty}^{\infty} n(t) \cdot (s_1(t) - s_2(t)) dt$ έχει μέση τιμή.

$$E[Y_n] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} n(t) \cdot (s_1(t) - s_2(t)) dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E[n(t)] \cdot (s_1(t) - s_2(t)) dt = 0$$

και διακύμανση

$$\begin{aligned} \sigma_{Y_n}^2 &= E\left[\int_0^T (s_1(\tau) - s_2(\tau))n(\tau) d\tau \cdot \int_0^T (s_1(\nu) - s_2(\nu))n(\nu) d\nu\right] \\ &= \int_0^T \int_0^T (s_1(\tau) - s_2(\tau)) \cdot (s_1(\nu) - s_2(\nu)) E[n(\tau)n(\nu)] d\tau d\nu \\ &= \int_0^T \int_0^T (s_1(\tau) - s_2(\tau)) \cdot (s_1(\nu) - s_2(\nu)) \frac{N_0}{2} \delta(\tau - \nu) d\tau d\nu \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T (s_1(\tau) - s_2(\tau))^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \int_0^T \left(\frac{2A\tau}{T} - A\right)^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \frac{A^2 T}{3} \end{aligned}$$

τελικά

$$\sigma_{Y_n}^2 = \frac{N_0}{2} \frac{A^2 T}{3} = \frac{A^2 T N_0}{6}$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας διαδικασίας είναι

$$f_{Y_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(A^2 T N_0/6)}} e^{-\frac{x^2}{2(A^2 T N_0/6)}}$$

Η είσοδος στο συγκριτή η οποία οφείλεται στο σήμα $s_1(t)$ είναι

$$y_{s_1}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)(s_1(t) - s_2(t))dt = \int_0^T \frac{At}{T} \left(\frac{2At}{T} - A \right) dt = \frac{A^2T}{6}$$

Η πιθανότητα σφάλματος $P(e|s_1)$ δίνεται από

$$P(e|s_1) = P\left(\frac{A^2T}{6} + y_n < 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(A^2TN_0)/6}} \int_{-\infty}^{-\frac{A^2T}{6}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(A^2TN_0)/6}\right) dx = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{6N_0}}\right)$$

Όμοια βρίσκεται και

$$P(e|s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{6N_0}}\right)$$

και επειδή τα δύο σήματα είναι ισοπίθανα, η μέση πιθανότητα σφάλματος δίνεται από

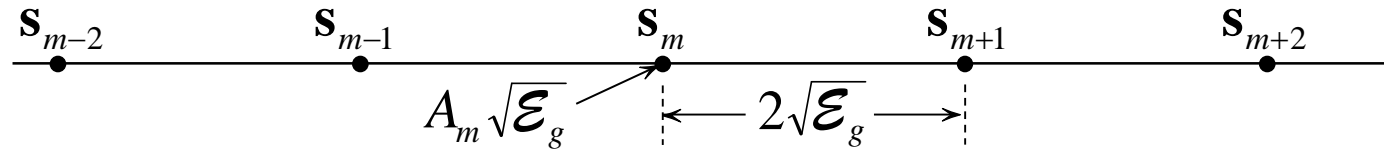
$$P(e) = \frac{1}{2}P(e|s_1) + \frac{1}{2}P(e|s_2) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{6N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2N_0}}\right)$$

Όπου \mathcal{E}_s είναι η ενέργεια του μεταβιβαζόμενου σήματος.

Πιθανότητα σφάλματος για M -αδικό PAM

Τα M -αδικά PAM σήματα βασικής ζώνης αναπαρίστανται γεωμετρικά με M μονοδιάστατα διανύσματα με τιμές

$$s_m = \sqrt{\mathcal{E}_g} A_m, \quad m = 1, 2, \dots, M$$



όπου \mathcal{E}_g είναι η ενέργεια του βασικού παλμού σήματος $g_T(t)$. Οι τιμές πλάτους των σημάτων, για την περίπτωση ίσων αποστάσεων μεταξύ διαδοχικών $2\sqrt{\mathcal{E}_g}$ πλατών και συμμετρικών ως προς την αρχή των αξόνων, μπορούν να εκφραστούν ως

$$A_m = (2m - 1 - M), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

όπου η απόσταση μεταξύ διαδοχικών σημείων σήματος είναι $2\sqrt{\mathcal{E}_g}$ τα σήματα PAM έχουν διαφορετικές ενέργειες

$$\mathcal{E}_m = s_m^2 = \mathcal{E}_g A_m^2, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Για ισοπίθانا σήματα, η μέση ενέργεια είναι

$$\mathcal{E}_{av} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{E}_g}{M} \sum_{m=1}^M A_m^2 \stackrel{A_m=(2m-1-M)}{=} \frac{\mathcal{E}_g}{M} \sum_{m=1}^M (2m-1-M)^2 = \mathcal{E}_g \frac{M^2 - 1}{3}$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα σήματα αυτά σύμφωνα με τη μέση τους ισχύ, η οποία είναι

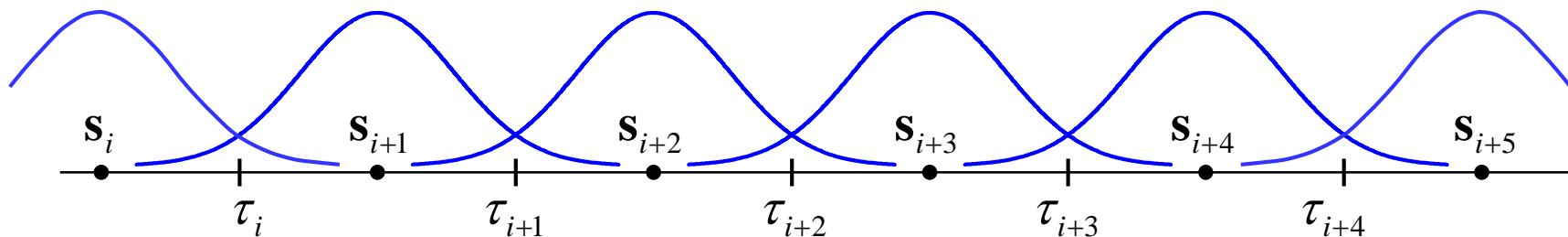
$$P_{av} = \frac{\mathcal{E}_{av}}{T} = \left(\frac{M^2 - 1}{3} \right) \frac{\mathcal{E}_g}{T}$$

Η μέση πιθανότητα σφάλματος για το M -αδικό PAM μπορεί να καθορισθεί από τον κανόνα απόφασης που μεγιστοποιεί τα μέτρα συσχέτισης

$$PM(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) P(\mathbf{s}_m)$$

εάν τα σήματα δεν είναι ισοπίθανα.

Ισοδύναμα, ο φωρατής συγκρίνει την έξοδο του αποδιαμορφωτή r μ' ένα σύνολο $M-1$ κατωφλίων, τα οποία τοποθετούνται στα μέσα των διαδοχικών σταθμών πλάτους.



Τοποθέτηση των κατωφλίων τ στα μέσα διαδοχικών σταθμών πλάτους.

Επομένως, η απόφαση λαμβάνεται ευνοϊκά για τη στάθμη πλάτους, η οποία βρίσκεται πλησιέστερα στο r . Εάν μεταδοθεί το m -στο σήμα, η έξοδος του αποδιαμορφωτή θα είναι

$$r = s_m + n = \sqrt{\mathcal{E}_g} A_m + n$$

Η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου είναι

$$\begin{aligned}
 P_M &= \frac{M-1}{M} P\left(|r - s_m| > \sqrt{\mathcal{E}_g}\right) = \frac{M-1}{M} \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\sqrt{\mathcal{E}_g}}^{\infty} e^{-x^2/N_0} dx \\
 &= \frac{M-1}{M} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\mathcal{E}_g/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\
 &= \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_g}{N_0}}\right)
 \end{aligned}$$

Αν λάβουμε υπόψη την $P_{av} = \frac{\mathcal{E}_{av}}{T} = \left(\frac{M^2-1}{3}\right) \frac{\mathcal{E}_g}{T} \Rightarrow \mathcal{E}_g = \frac{3}{M^2-1} P_{av} T$

Η πιθανότητα σφάλματος μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει της μέσης μεταδιδόμενης ισχύος ως

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{(M^2-1)N_0}}\right) \quad P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\mathcal{E}_{av}}{(M^2-1)N_0}}\right)$$

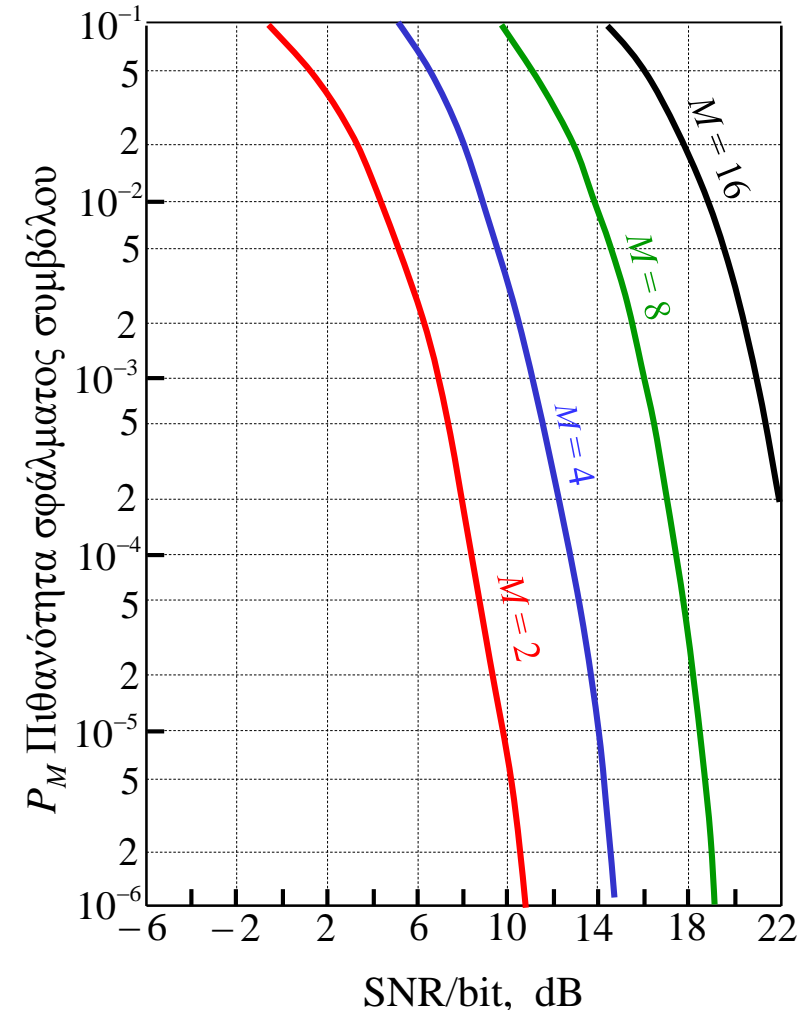
όπου $\mathcal{E}_{av} = P_{av} T$ είναι η μέση ενέργεια συμβόλου.

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{(M^2-1)N_0}}\right)$$

Επειδή $T = kT_b$ με $k = \log_2 M$, η πιθανότητα σφάλματος μπορεί να εκφρασθεί ως

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6(\log_2 M)\mathcal{E}_{bav}}{(M^2-1)N_0}}\right)$$

όπου $\mathcal{E}_{bav} = P_{bav} T_b$ είναι η μέση ενέργεια ανά bit και \mathcal{E}_{bav}/N_0 είναι το μέσο SNR/bit.



Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για σήματα PAM

Ζωνοπερατά PAM σήματα

Η είσοδος του φωρατή είναι

$$\int_0^T r(t)\psi(t)dt = A_m \sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_g}} \int_0^T g_T^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt + \int_0^T n(t)\psi(t)dt = A_m \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}} + n = s_m + n$$

όπου η Gaussian τυχαία μεταβλητή n έχει μέση τιμή $E[n] = 0$ και διακύμανση $\sigma_n^2 = N_0/2$.

Η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου είναι

$$P_M = \frac{M-1}{M} P\left(|r - s_m| > \sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{2}}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_g}{N_0}}\right)$$

Για τη μέση μεταδιδόμενη ενέργεια \mathcal{E}_{av} έχουμε

$$\mathcal{E}_{av} = P_{av}T = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathcal{E}_m = \frac{1}{M} \frac{\mathcal{E}_g}{2} \sum_{m=1}^M (2m-1-M)^2 = \frac{M^2-1}{6} \mathcal{E}_g \longrightarrow \mathcal{E}_g = \frac{6P_{av}T}{M^2-1}$$

έτσι η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου γράφεται ως

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{(M^2-1)N_0}}\right)$$

Πιθανότητα Σφάλματος PSK με Αποδιαμόρφωση Σύμφωνης-Φάσης

Αν η φάση του μεταδιδόμενου σήματος $u_0(t)$ είναι 0 το διάνυσμα αναπαράστασης του μεταδιδόμενου σήματος είναι

$$\mathbf{s}_0 = (\sqrt{\mathcal{E}_s}, 0)$$

και το διάνυσμα \mathbf{r} του λαμβανόμενου σήματος έχει συνιστώσες

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2) = (\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_c, n_s)$$

Επειδή οι n_c και n_s είναι συνδυασμένα Gaussian τυχαίες μεταβλητές προκύπτει ότι οι r_1 και r_2 είναι συνδυασμένα Gaussian τυχαίες μεταβλητές με $E[r_1] = \sqrt{\mathcal{E}_s}$, $E[r_2] = 0$ και $\sigma_{r_1}^2 = \sigma_{r_2}^2 = N_0/2 = \sigma_r^2$. Η συνδυασμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (*joint PDF*) είναι

$$f_{\mathbf{r}}(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_r^2} e^{-[(r_1 - \sqrt{\mathcal{E}_s})^2 + r_2^2]/2\sigma_r^2}$$

Η μετρική φάσης η οποία χρησιμοποιείται από το φωρατή είναι $\theta_r = \tan^{-1}(r_2/r_1)$. Η συνδυασμένη PDF των τυχαίων μεταβλητών V και Θ_r λαμβάνεται με την αλλαγή των μεταβλητών από (r_1, r_2) σε

$$v = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad \theta_r = \tan^{-1} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

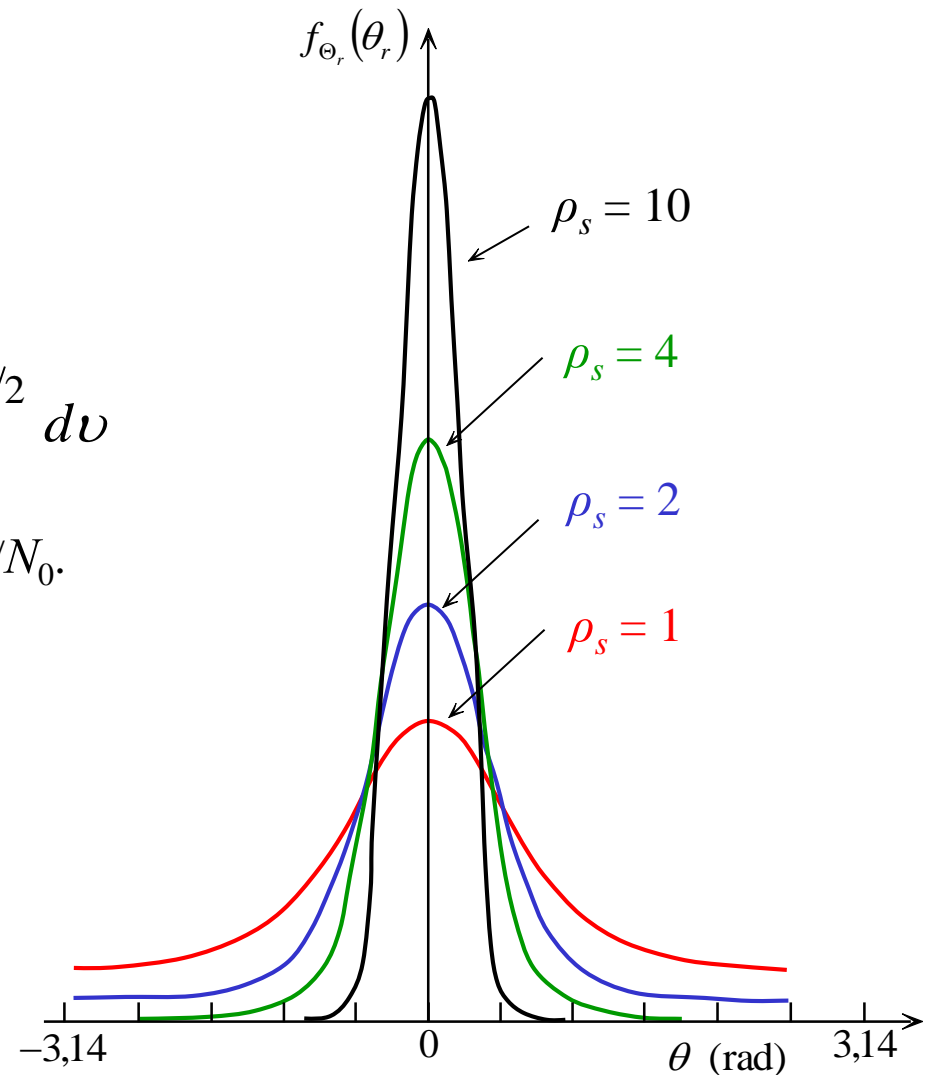
$$f_{V,\Theta_r}(v,\theta_r) = \frac{v}{2\pi\sigma_r^2} e^{-(v^2 + \mathcal{E}_s - 2\sqrt{\mathcal{E}_s}v \cos\theta_r)/2\sigma_r^2}$$

Η PDF της τυχαίας μεταβλητής Θ_r είναι

$$\begin{aligned} f_{\Theta_r}(\theta_r) &= \int_0^\infty f_{V,\Theta_r}(v,\theta_r) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\rho_s \sin^2(\theta_r)} \int_0^\infty v e^{-(v^2 - \sqrt{2\rho_s} \cos\theta_r)^2/2} dv \end{aligned}$$

όπου έχουμε ορίσει το **SNR συμβόλου** ως $\rho_s = \mathcal{E}_s/N_0$.

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{\Theta_r}(\theta_r)$
για $\rho_s = 1, 2, 4, 10$.



Όταν μεταδίδεται το $u_0(t)$, λαμβάνουμε λανθασμένη απόφαση εάν η φάση, εξαιτίας του θορύβου, λάβει τιμές εκτός του διαστήματος $-\pi/M \leq \Theta_r \leq \pi/M$

$$P_M = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} f_{\Theta_r}(\theta_r) d\theta_r$$

Για δυαδική διαμόρφωση κατά φάση, τα δύο σήματα $u_0(t)$ και $u_1(t)$ είναι αντίποδα η πιθανότητα σφάλματος είναι

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

Όταν $M = 4$ έχουμε ουσιαστικά δύο δυαδικά διαμορφωμένα κατά φάση σήματα σε δύο ορθογώνια φέροντα. Η πιθανότητα σωστής απόφασης P_c για το σύμβολο των 2-bits, λόγω της στατιστικής ανεξαρτησίας του θορύβου στις δύο ορθογώνιες φέρουσες, είναι

$$P_c = (1 - P_2)^2 = \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)\right]^2$$

Η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για $M = 4$ είναι

$$P_4 = 1 - P_c = 2Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \left[1 - \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)\right]$$

Για $M > 4$, η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου P_M υπολογίζεται με αριθμητική ολοκλήρωση της

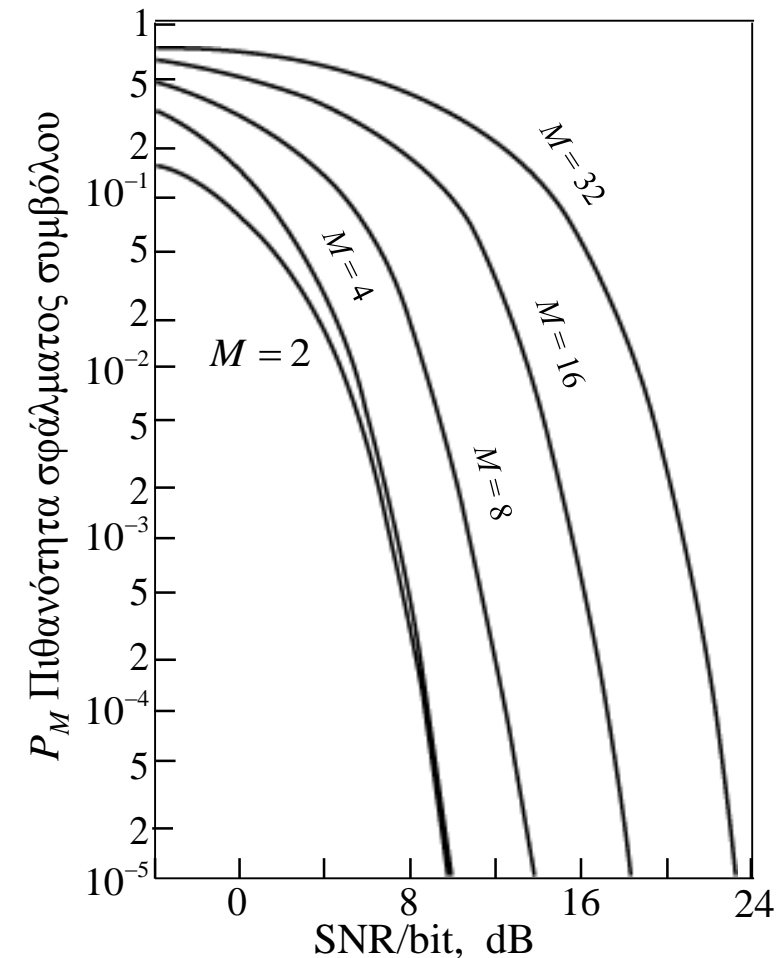
$$P_M = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} f_{\Theta_r}(\theta_r) d\theta_r$$

Στο Σχήμα είναι οι γραφικές παραστάσεις της πιθανότητας σφάλματος συναρτήσει του SNR/bit για $M = 2, 4, 8, 16$ και 32 .

Τα γραφήματα δείχνουν καθαρά το τίμημα σε SNR/bit καθώς το M αυξάνει πέραν του $M = 4$.

Για παράδειγμα, όταν $P_M = 10^{-5}$, η διαφορά επίδοσης μεταξύ του $M = 4$ και $M = 8$ είναι περίπου 4 dB, και η διαφορά μεταξύ του $M = 8$ και $M = 16$ είναι περίπου 5 dB.

Για μεγάλες τιμές του M , ο διπλασιασμός του αριθμού των φάσεων απαιτεί επιπρόσθετα 6 dB/bit για την επίτευξη της ίδιας επίδοσης.



Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου P_M για σήματα PSK

Μία προσέγγιση της πιθανότητας σφάλματος για μεγάλες τιμές του M και του SNR μπορεί να επιτευχθεί δίνοντας μια πρώτη προσέγγιση της $f_{\Theta_r}(\theta_r)$. Για $\mathcal{E}_s/N_0 \gg 1$ και $|\Theta_r| \leq \pi/2$, η $f_{\Theta_r}(\theta_r)$ προσεγγίζεται καλά ως

$$f_{\Theta_r}(\theta_r) \approx \sqrt{\frac{\rho_s}{\pi}} \cos(\theta_r) e^{-\rho_s \sin^2(\theta_r)}$$

και η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου P_M είναι

$$P_M = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} f_{\Theta_r}(\theta_r) d\theta_r \approx 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sqrt{\frac{\rho_s}{\pi}} \cos(\theta_r) e^{-\rho_s \sin^2(\theta_r)} d\theta_r$$

$$\begin{aligned} u = \sqrt{2\rho_s} \sin(\theta_r) \\ \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\rho_s} \sin(\pi/M)}^{\infty} e^{-u^2/2} du \end{aligned}$$

$$P_M \approx 2Q\left(\sqrt{2k\rho_b} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$

όπου $M = 2^k$ και $\rho_s = \mathcal{E}_s/N_0 = k \mathcal{E}_b/N_0 = k \rho_b$.

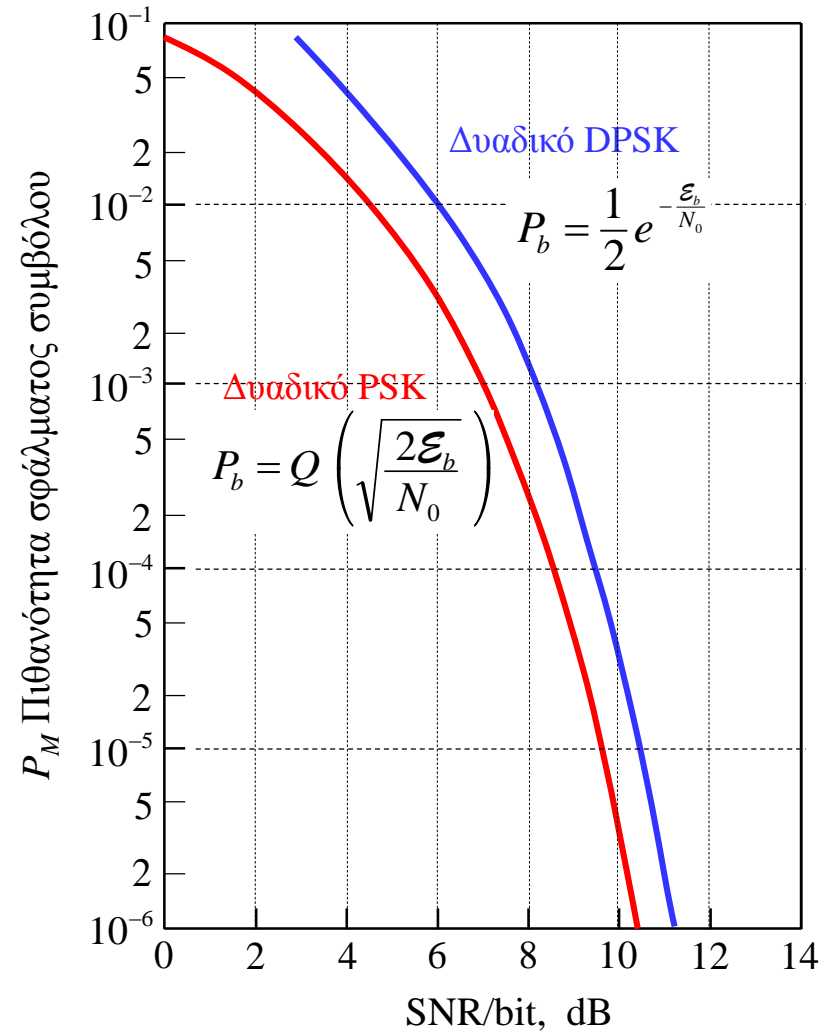
Εάν χρησιμοποιείται κώδικας Gray, η ισοδύναμη πιθανότητα σφάλματος bit στην M -αδική διαμόρφωση κατά φάση, προσεγγίζεται πολύ καλά ως

$$P_b \approx \frac{1}{k} P_M$$

Πιθανότητα σφάλματος για το DPSK

Η πιθανότητα σφάλματος δυαδικού DPSK είναι

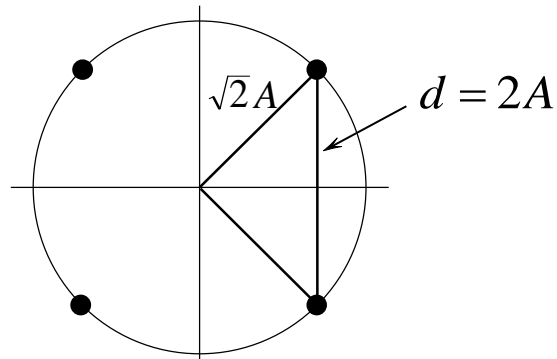
$$P_2 = \frac{1}{2} e^{-\rho_s}$$



Πιθανότητα σφάλματος δυαδικού PSK και DPSK

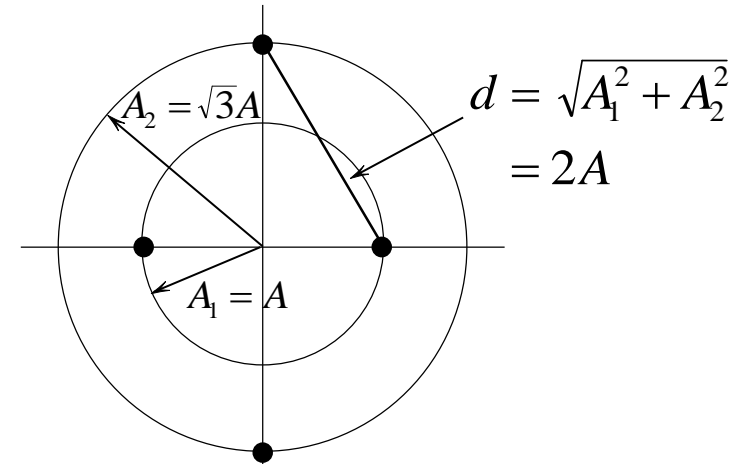
Πιθανότητα σφάλματος για το QAM

► Σύνολα σημάτων QAM $M = 4$ σημείων.



Αστερισμός σήματος 4-σημείων αντιστοιχεί σε διαμόρφωση κατά φάση.

$$P_{av} = \frac{1}{4} \left[(4) \frac{(\sqrt{2}A)^2}{2} \right] = A^2$$

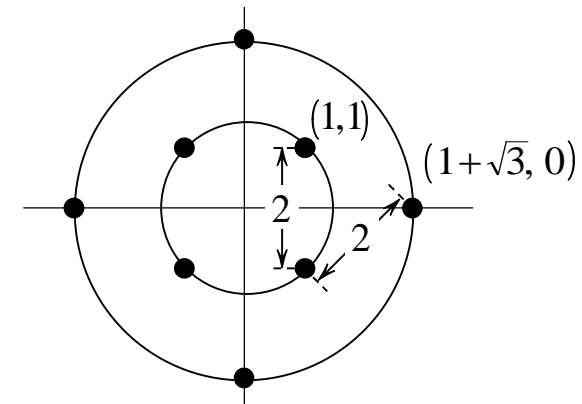
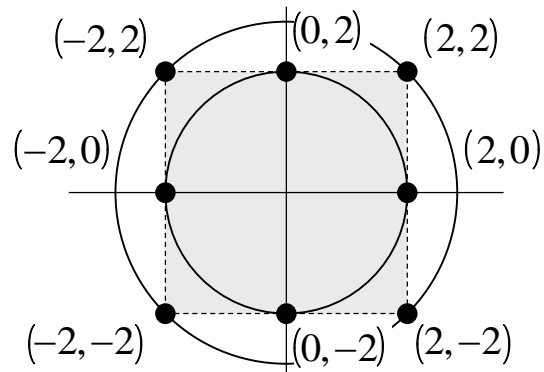
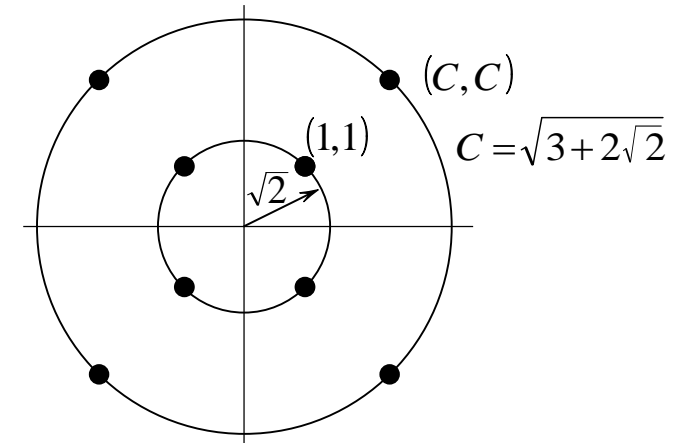
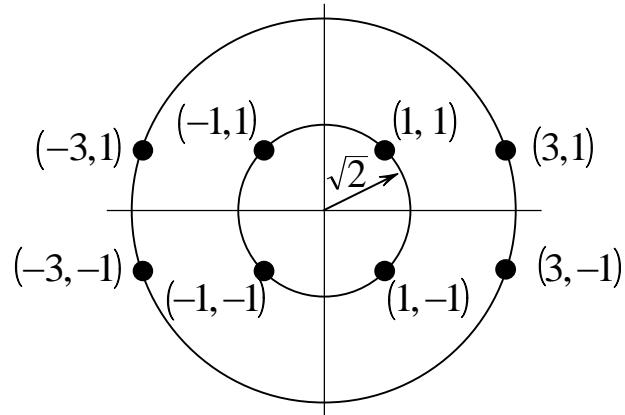


Αστερισμός σήματος 4-σημείων αντιστοιχεί σε σήμα QAM δύο πλατών, τεσσάρων φάσεων.

$$P_{av} = \frac{1}{4} \left[(2) \left(\frac{(\sqrt{3}A)^2}{2} \right) + (2) \left(\frac{A^2}{2} \right) \right] = A^2$$

η επίδοση ως προς το ρυθμό σφαλμάτων των δύο συνόλων σήματος είναι ίδια. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει κάποιο πλεονέκτημα του συνόλου σημάτων QAM των δύο σταθμών πλάτους σε σχέση μ' αυτό των τεσσάρων φάσεων.

Σύνολα σημάτων QAM $M = 8$ σημείων.



Τέσσερις QAM αστερισμοί σήματος των 8 σημείων με ελάχιστη απόσταση ίση με 2A

Αυτός ο αστερισμός σήματος είναι γνωστός ως ο καλύτερος QAM αστερισμός 8-σημείων επειδή απαιτεί τη μικρότερη ισχύ για δεδομένη ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων.

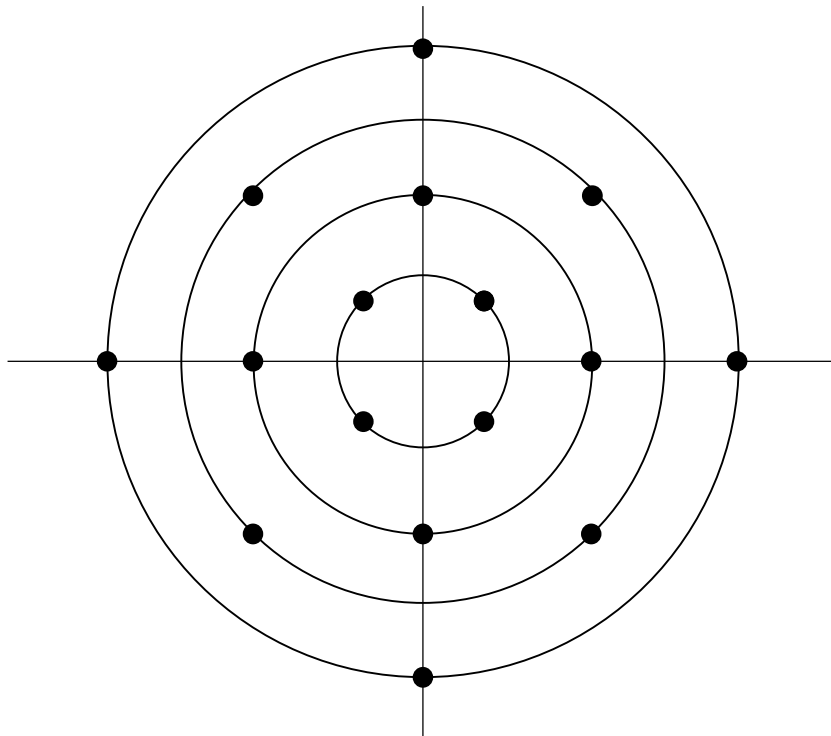
Τα δύο πρώτα σύνολα του Σχήματος περιέχουν σημεία σήματος τα οποία ανήκουν σ' ένα ορθογώνιο πλέγμα και έχουν $P_{av} = 3A^2$.

Το τρίτο σύνολο απαιτεί μέση μεταδιδόμενη ισχύ $P_{av} = 3,41A^2$ ενώ το τέταρτο σύνολο $P_{av} = 2,36A^2$.

Επομένως, το τέταρτο σύνολο απαιτεί προσεγγιστικά 1-dB λιγότερο ισχύ από τα δύο πρώτα και 1,6-dB λιγότερο ισχύ από το τρίτο για να επιτύχει την ίδια πιθανότητα σφάλματος.

Αυτός ο αστερισμός σήματος είναι γνωστός ως ο καλύτερος QAM αστερισμός 8-σημείων επειδή απαιτεί τη μικρότερη ισχύ για δεδομένη ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων.

► Σύνολα σημάτων QAM $M = 16$ σημείων.



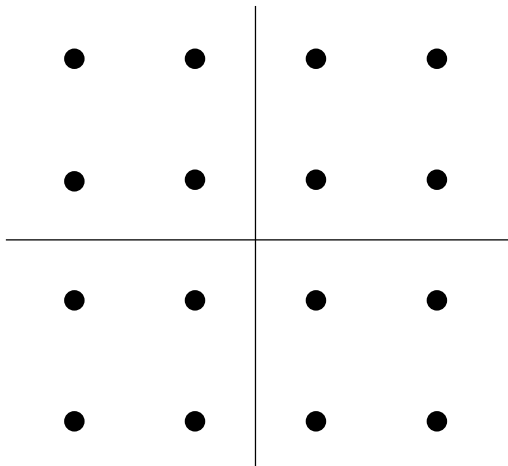
Κυκλικός QAM αστερισμός σήματος των 16-σημείων.

Τα σημεία σήματος σε κάποιο δεδομένο πλάτος είναι ολισθημένα σε φάση κατά $\pi/4$ σχετικά με τα σημεία σε γειτονικά πλάτη.

Αυτός ο 16-QAM αστερισμός είναι μία γενίκευση του βέλτιστου 8-QAM αστερισμού.

Όμως, ο κυκλικός 16-QAM αστερισμός δεν είναι ο βέλτιστος QAM αστερισμός 16-σημείων για μετάδοση μέσα από AWGN κανάλι.

▶ Ορθογώνιοι QAM αστερισμοί



Τετραγωνικός αστερισμός σήματος $M = 16$ QAM.

Τα σήματα των ορθογώνιων QAM αστερισμών έχουν το ξεχωριστό πλεονέκτημα να δημιουργούνται εύκολα ως δύο PAM σήματα τα οποία αποτυπώνονται σε ορθογώνιες φέρουσες.

Επιπρόσθετα, αποδιαμορφώνονται εύκολα. Αν και για $M \geq 16$ δεν είναι οι βέλτιστοι M -αδικοί QAM αστερισμοί, η μέση μεταδιδόμενη ισχύς η οποία απαιτείται για δεδομένη ελάχιστη απόσταση είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από αυτήν που απαιτείται από το βέλτιστο M -αδικό QAM αστερισμό.

Για τους λόγους αυτούς, οι ορθογώνιοι M -αδικοί QAM αστερισμοί είναι οι πλέον χρησιμοποιούμενοι στην πράξη.

Τα QAM σήματα με ορθογώνιους αστερισμούς των $M = 2^k$ σημείων, όπου το k είναι άρτιος, ισοδυναμούν με δύο PAM σήματα σε ορθογώνιες φέρουσες ο αστερισμός των οποίων αποτελείται από $\sqrt{M} = 2^{k/2}$ σημεία.

Επειδή τα σήματα στις ορθογώνιες συνιστώσες διαχωρίζονται πλήρως με τη σύμφωνη φάραση όταν $\varphi = \hat{\varphi}$, η πιθανότητα σφάλματος για το QAM καθορίζεται εύκολα από την πιθανότητα σφάλματος για το PAM.

Η πιθανότητα σωστής (*correct*) απόφασης για το M -αδικό QAM σύστημα είναι

$$P_c = \left(1 - P_{\sqrt{M}}\right)^2$$

όπου $P_{\sqrt{M}}$ είναι η πιθανότητα σφάλματος ενός \sqrt{M} -αδικού PAM συστήματος με μέση ισχύ το μισό αυτής του ισοδύναμου QAM συστήματος, δηλαδή,

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\mathcal{E}_{av}}{(M^2-1)N_0}}\right) \implies P_{\sqrt{M}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{\mathcal{E}_{av}}{N_0}}\right)$$

πιθανότητα σφάλματος M -αδικού PAM

όπου \mathcal{E}_{av}/N_0 είναι το μέσο SNR/σύμβολο.

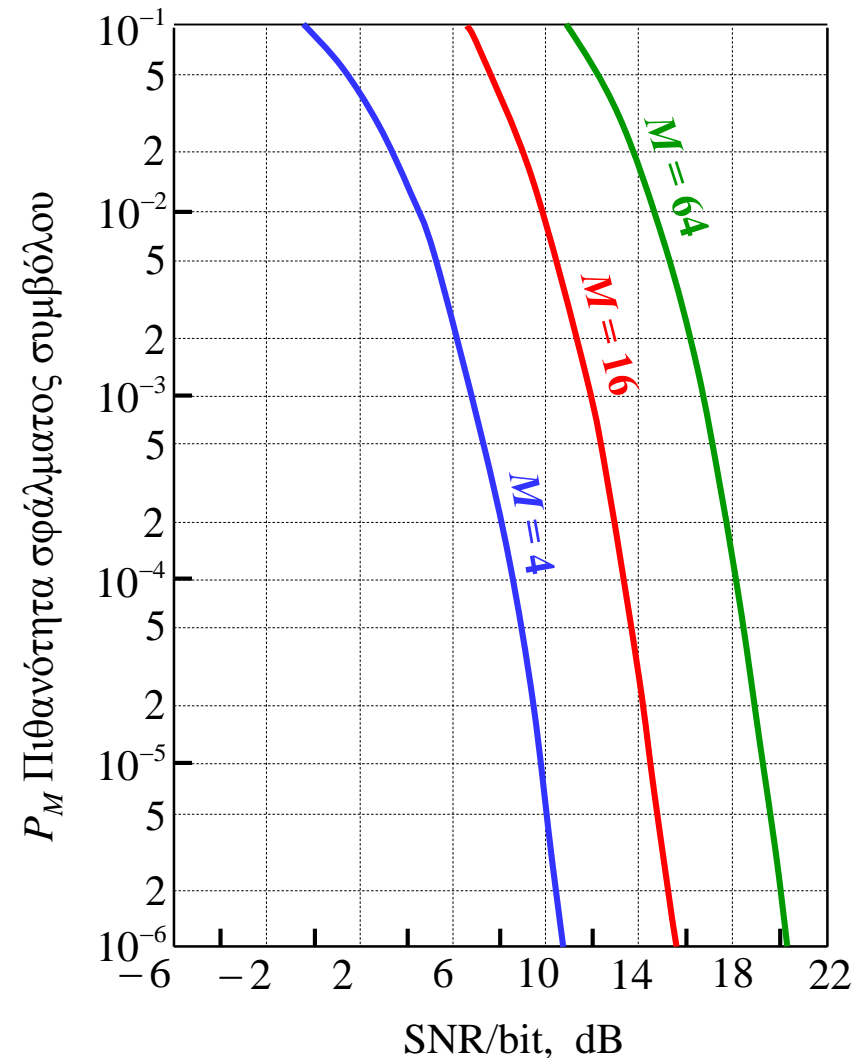
η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου του M -αδικού QAM είναι

$$P_M = 1 - \left(1 - P_{\sqrt{M}}\right)^2$$

Η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου φράσσεται αυστηρά εκ των άνω ως

$$\begin{aligned} P_M^{\text{QAM}} &\leq 1 - \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_{av}}{(M-1)N_0}}\right)\right]^2 \\ &\leq 4Q\left(\sqrt{\frac{3k\mathcal{E}_{bav}}{(M-1)N_0}}\right) \\ &= 4Q\left(\sqrt{\frac{3\rho_s}{M-1}}\right) \end{aligned}$$

για οποιοδήποτε $k \geq 1$, όπου \mathcal{E}_{bav}/N_0 είναι το μέσο SNR/bit.



Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για συστήματα τετραγωνικού QAM

Σύγκριση M -QAM με M -PSK

Η πιθανότητα σφάλματος
συμβόλου στη M -αδική PSK

$$P_M^{\text{QAM}} \approx 4Q\left(\sqrt{\frac{3\rho_s}{M-1}}\right)$$

Η πιθανότητα σφάλματος
συμβόλου στη M -αδική QAM

$$P_M^{\text{PSK}} \approx 2Q\left(\sqrt{2\rho_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$

Επειδή η πιθανότητα σφάλματος καθορίζεται κυρίως από το όρισμα της συνάρτησης Q , μπορούμε απλά να συγκρίνουμε τα ορίσματα της συνάρτησης Q στις δύο εκφράσεις πιθανότητας σφάλματος.

$$\mathcal{R}_M = \frac{3/(M-1)}{2\sin^2(\pi/M)}$$

Για παράδειγμα, όταν $M = 4$ έχουμε $\mathcal{R}_M = 1$, δηλαδή, το 4-PSK και το 4-QAM επιτυγχάνουν συγκρίσιμη επίδοση για το ίδιο SNR/σύμβολο.

Από την άλλη πλευρά, όταν $M > 4$ βρίσκουμε $\mathcal{R}_M > 1$, έτσι ώστε το M -αδικό QAM έχει καλύτερη επίδοση από ότι το M -αδικό PSK.

Πλεονέκτημα του M -QAM
σε σύγκριση με το M -PSK

M	$10\log_{10} \mathcal{R}_M$
8	1,65
16	4,20
32	7,02
64	9,95

Πιθανότητα σφάλματος για M -αδικά ορθογώνια σήματα

Για ορθογώνια σήματα ίσης ενέργειας, ο βέλτιστος φωρατής επιλέγει το σήμα το οποίο εμφανίζει τη μεγαλύτερη διασυσχέτιση μεταξύ του λαμβανόμενου διανύσματος \mathbf{r} και καθενός από τα M δυνατά διανύσματα σήματος $\{\mathbf{s}_m\}$, δηλαδή

$$C(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m = \sum_{k=1}^M r_k s_{mk}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Ας υποθέσουμε ότι μεταδόθηκε το σήμα \mathbf{s}_1 . Τότε, το λαμβανόμενο διάνυσμα σήματος είναι

$$\mathbf{r} = (\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1, n_2, n_3, \dots, n_M)$$

και οι έξοδοι της συστοιχίας των M συσχετιστών είναι

$$C(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_1) = \sqrt{\mathcal{E}_s} \cdot (\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1)$$

$$C(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_2) = \sqrt{\mathcal{E}_s} \cdot n_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$C(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_M) = \sqrt{\mathcal{E}_s} \cdot n_M$$

Η PDF της εξόδου του πρώτου συσχετιστή ($r_1 = \sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1$) είναι

$$f_{r_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(x_1 - \sqrt{\mathcal{E}_s})^2 / N_0}$$

Η PDF των υπολοίπων $M - 1$ εξόδων των συσχετιστών είναι

$$f_{r_m}(x_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-x_m^2 / N_0}, \quad m = 2, 3, \dots, M$$

Η πιθανότητα σωστής απόφασης, δηλαδή, η πιθανότητα το r_1 να είναι μεγαλύτερο από κάθε μία εκ των υπολοίπων $M - 1$ εξόδων των συσχετιστών n_2, n_3, \dots, n_M είναι

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} P(n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 | r_1) f_{r_1}(r_1) dr_1$$

Επειδή τα $\{r_m\}$ είναι στατιστικά ανεξάρτητα, η συνδυασμένη πιθανότητα παραγοντοποιείται σ' ένα γινόμενο $M - 1$ περιθώριων πιθανοτήτων της μορφής

$$P(n_m < r_1 | r_1) = \int_{-\infty}^{r_1} f_{r_m}(x_m) dx_m, \quad m = 2, 3, \dots, M$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2r_1^2 / N_0}} e^{-x^2 / 2} dx = 1 - Q\left(\sqrt{\frac{2r_1^2}{N_0}}\right)$$

Η πιθανότητα σωστής απόφασης είναι

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - Q \left(\sqrt{\frac{2r_1^2}{N_0}} \right) \right]^{M-1} f_{r_1}(r_1) dr_1$$

και η πιθανότητα σφάλματος ενός συμβόλου των k -bit είναι

$$P_M = 1 - P_c$$

Τελικά

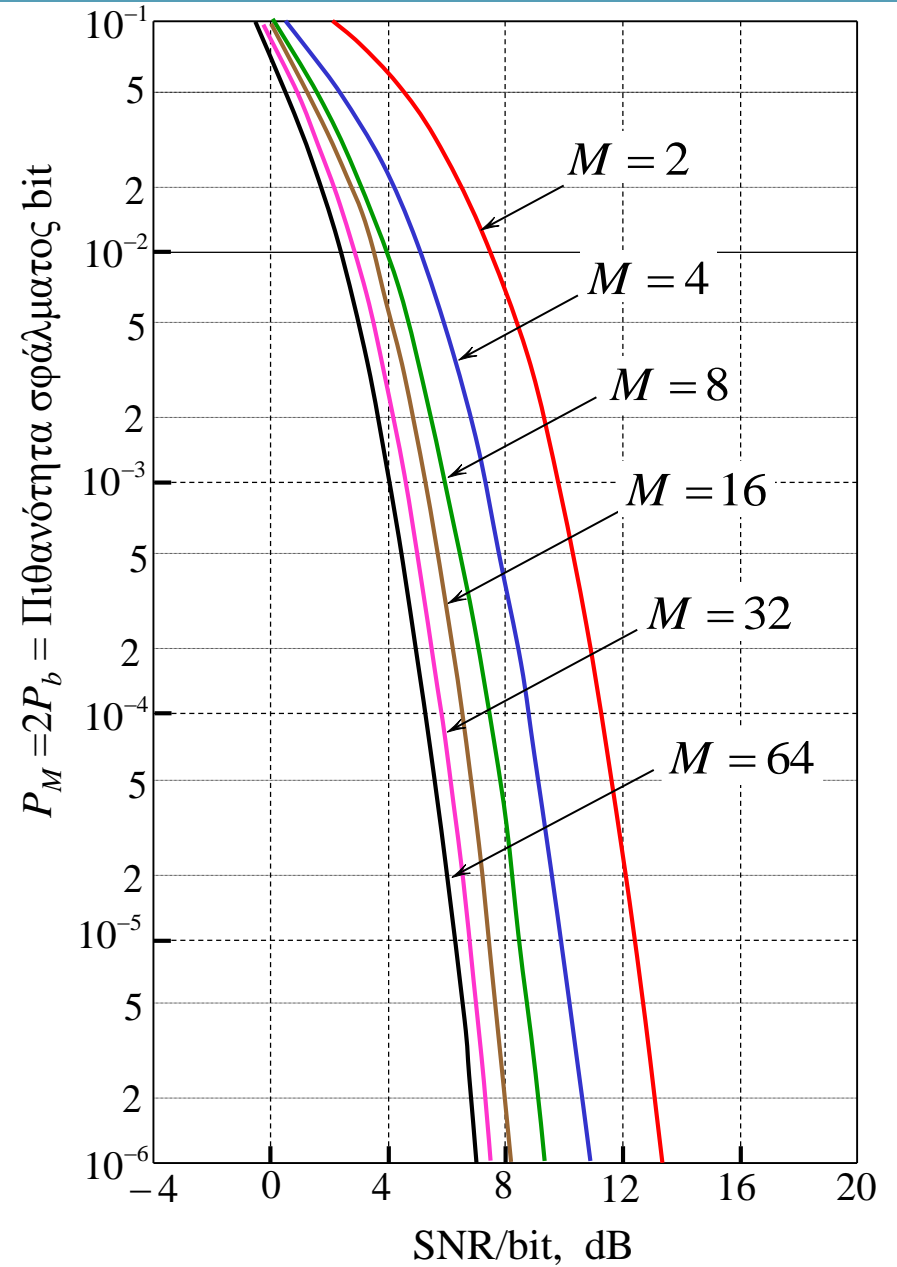
$$P_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - [1 - Q(x)]^{M-1} \right\} e^{-\left(x - \sqrt{2\mathcal{E}_s/N_0}\right)^2/2} dx$$

Η ίδια έκφραση για την πιθανότητα σφάλματος λαμβάνεται εάν μεταδοθεί οποιοδήποτε από τα άλλα $M-1$ σήματα.

Επειδή όλα τα M σήματα είναι ισοπίθανα, η έκφραση για το P_M είναι και η μέση πιθανότητα σφάλματος συμβόλου.

Η έκφραση αυτή μπορεί να υπολογισθεί αριθμητικά.

Πιθανότητα σφάλματος bit στη σύμφωνη φάραση
ορθογωνίων σημάτων



Ένα φράγμα ένωσης (union bound) της πιθανότητας σφάλματος.

$$P_M < M e^{-\mathcal{E}_s/2N_0} = 2^k e^{-k\mathcal{E}_b/2N_0} < e^{-k(\mathcal{E}_b/N_0 - 2\ln 2)/2} \quad I$$

Καθώς $k \rightarrow \infty$, ή ισοδύναμα, καθώς $M \rightarrow \infty$, η πιθανότητα σφάλματος προσεγγίζει εκθετικά το μηδέν, υπό την προϋπόθεση ότι \mathcal{E}_b/N_0 είναι μεγαλύτερο του $2 \ln 2$, δηλαδή,

$$\mathcal{E}_b/N_0 > 2 \ln 2 = 1,39 \text{ (1,42 dB)} \quad II$$

Το απλό άνω-φράγμα για την πιθανότητα σφάλματος της Εξίσωσης I υπονοεί ότι εφόσον $\text{SNR} > 1,42\text{dB}$, μπορούμε να επιτύχουμε αυθαίρετα μικρό P_M .

Χρησιμοποιώντας πιο εξειδικευμένες τεχνικές οριοθέτησης, αποδεικνύεται ότι το άνω-φράγμα της Εξίσωσης I είναι αρκετά αυστηρό για $\mathcal{E}_b/N_0 < 4\ln 2$.

Εάν $\mathcal{E}_b/N_0 > 4\ln 2$, ένα αυστηρότερο άνω-φράγμα για το P_M είναι το

$$P_M < 2e^{-k(\sqrt{\mathcal{E}_b/N_0} - \sqrt{\ln 2})^2} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E}_b/N_0 > \ln 2 = 0,693 \text{ (-1,6 dB)}$$

Το $-1,6 \text{ dB}$ είναι το ελάχιστο απαιτούμενο SNR/bit για να επιτύχουμε αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος στο όριο καθώς $k \rightarrow \infty$, ($M \rightarrow \infty$).

Αυτό το ελάχιστο SNR/bit ($-1,6 \text{ dB}$) καλείται **όριο Shannon** για ένα κανάλι προσθετικού λευκού Gaussian θορύβου.

Πιθανότητα σφάλματος για M -αδικά διορθογώνια σήματα

Ένα σύνολο $M = 2^k$ διορθογώνιων σημάτων κατασκευάζεται από $M/2$ ορθογώνια σήματα συμπεριλαμβάνοντας τα αντίποδά τους σήματα.

Έτσι επιτυγχάνεται μια ελάττωση της πολυπλοκότητας του αποδιαμορφωτή των διορθογώνιων σημάτων ως προς αυτόν των ορθογώνιων σημάτων, αφού ο πρώτος υλοποιείται με $M/2$ συσχετιστές ή προσαρμοσμένα φίλτρα ενώ ο δεύτερος απαιτεί M συσχετιστές ή προσαρμοσμένα φίλτρα.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα σφάλματος για το βέλτιστο φωρατή, ας υποθέσουμε ότι μεταδόθηκε το σήμα $s_1(t)$ με αντίστοιχη γεωμετρική αναπαράσταση το διάνυσμα

$$\mathbf{s}_1 = (\sqrt{\mathcal{E}_s}, 0, 0, \dots, 0)$$

Το λαμβανόμενο διάνυσμα σήματος είναι

$$\mathbf{r} = (\sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1, n_2, n_3, \dots, n_{M/2})$$

όπου $\{n_m\}$ είναι μηδενικής μέσης τιμής, στατιστικά ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες Gaussian τυχαίες μεταβλητές με διακύμανση $\sigma_n^2 = N_0/2$.

Ο βέλτιστος φωρατής αποφασίζει υπέρ του σήματος που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη σε μέτρο τιμή των συσχετίσεων

$$C(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m = \sum_{k=1}^{M/2} r_k s_{mk}, \quad m = 1, 2, \dots, M/2$$

Το πρόσημο του μεγαλύτερου αυτού όρου χρησιμοποιείται για να αποφασισθεί αν μεταδόθηκε το $s_m(t)$ ή το $-s_m(t)$.

Σύμφωνα μ' αυτόν τον κανόνα απόφασης, η πιθανότητα σωστής απόφασης είναι ίση με την πιθανότητα το $r_1 = \sqrt{\mathcal{E}_s} + n_1 > 0$ και το r_1 να είναι μεγαλύτερο των $|r_m| = |n_m|$, για $m = 2, 3, \dots, M/2$.

$$P(|n_m| < r_1 | r_1 > 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-r_1}^{r_1} e^{-x^2/N_0} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r_1/\sqrt{N_0/2}}^{r_1/\sqrt{N_0/2}} e^{-x^2/2} dx$$

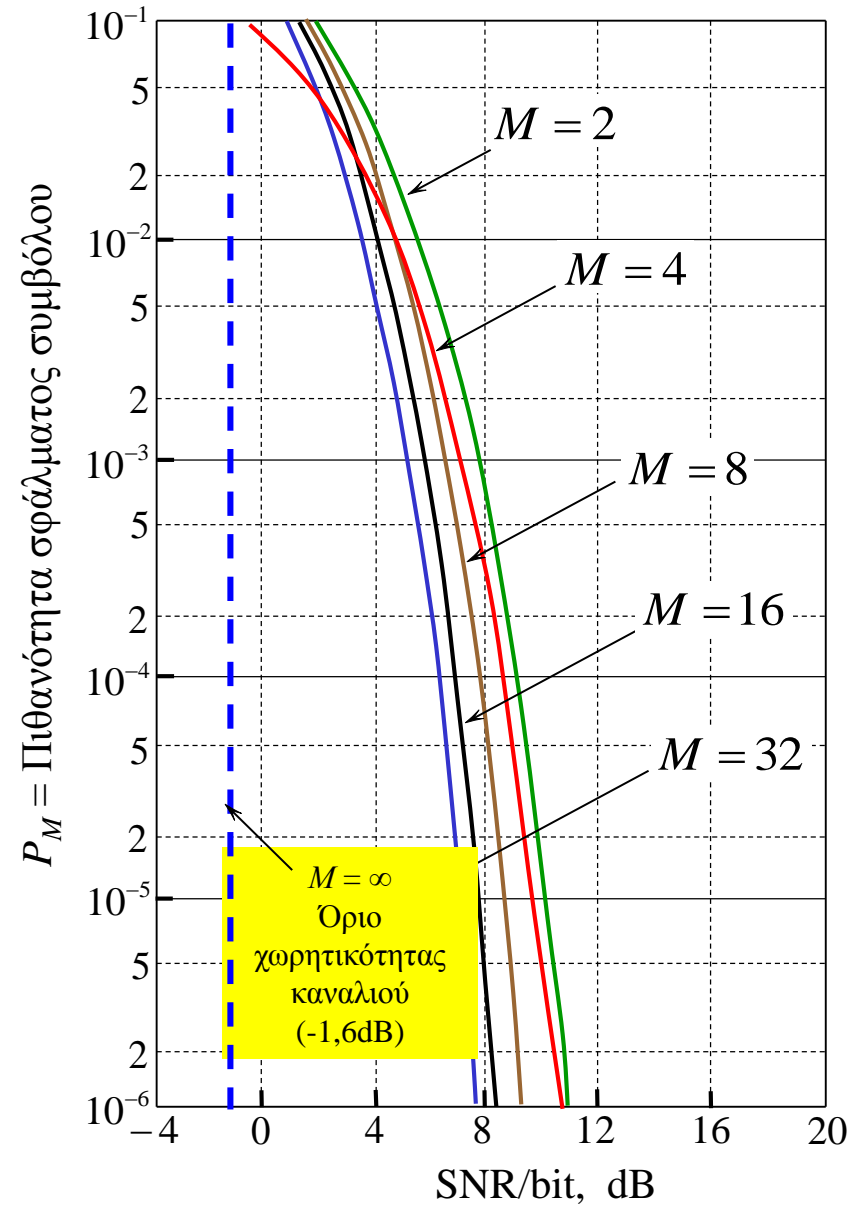
η πιθανότητα σωστής απόφασης είναι

$$P_c = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r_1/\sqrt{N_0/2}}^{r_1/\sqrt{N_0/2}} e^{-x^2/2} dx \right]^{\frac{M}{2}-1} f_{r_1}(r_1) dr_1$$

όπου $f_{r_1}(r_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r_1 - \sqrt{\mathcal{E}_s})^2/N_0}$ και με αλλαγή μεταβλητής $v = \frac{r_1 - \sqrt{\mathcal{E}_s}}{\sqrt{N_0/2}}$ έχουμε

$$P_c = \int_{-\sqrt{2\mathcal{E}_s/N_0}}^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(v+\sqrt{2\mathcal{E}_s/N_0})}^{v+\sqrt{2\mathcal{E}_s/N_0}} e^{-x^2/2} dx \right]^{\frac{M}{2}-1} e^{-v^2/2} dv$$

η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου είναι $P_M = 1 - P_c$.



Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για διορθογώνια σήματα.

Πιθανότητα σφάλματος σύμφωνης φώρασης FSK σημάτων

Υποθέτουμε ότι τα M σήματα είναι *a-priori* ισοπίθανα και ότι μεταδόθηκε το σήμα $s_1(t)$ στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq T$.

Τα M μέτρα απόφασης που θα χρησιμοποιήσει ο φωρατής είναι οι M περιβάλλουσες

$$r_m = \sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$r_{1c} = \sqrt{\mathcal{E}_s} \cos \varphi_1 + n_{1c}$$

$$r_{mc} = n_{mc}, \quad m = 2, 3, \dots, M$$

$$r_{1s} = \sqrt{\mathcal{E}_s} \sin \varphi_1 + n_{1s}$$

$$r_{ms} = n_{ms}, \quad m = 2, 3, \dots, M$$

Οι συνιστώσες προσθετικού θορύβου $\{n_{mc}\}$ και $\{n_{ms}\}$ είναι στατιστικά ανεξάρτητες Gaussian τυχαίες μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής με την ίδια διακύμανση $\sigma^2 = N_0/2$.

Οι PDF των τυχαίων μεταβλητών στην είσοδο του φωρατή είναι

$$f_{\mathbf{r}_1}(r_{1c}, r_{1s}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(r_{1c}^2 + r_{1s}^2 + \mathcal{E}_s)/2\sigma^2} I_0\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s(r_{1c}^2 + r_{1s}^2)}{\sigma^2}}\right)$$

$$f_{\mathbf{r}_m}(r_{mc}, r_{ms}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(r_{mc}^2 + r_{ms}^2)/2\sigma^2} \quad m = 2, 3, \dots, M$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών από r_{ms} και r_{mc} στις πολικές r_m και θ_m ως

$$r_m = \frac{\sqrt{r_{mc}^2 + r_{ms}^2}}{\sigma} \quad \theta_m = \tan^{-1} \left(\frac{r_{ms}}{r_{mc}} \right) \quad r_{mc} = \sigma r_m \cos(\theta_m) \quad r_{ms} = \sigma r_m \sin(\theta_m)$$

Η ορίζουσα του Jacobian πίνακα είναι

$$\mathbf{J}(r_{mc}, r_{ms}) = \begin{bmatrix} \frac{dr_m}{dr_{mc}} & \frac{dr_m}{dr_{ms}} \\ \frac{d\theta_m}{dr_{mc}} & \frac{d\theta_m}{dr_{ms}} \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{J}(r_{mc}, r_{ms}) = \begin{vmatrix} \sigma \cos \theta_m & \sigma \sin \theta_m \\ -\sigma r_m \sin \theta_m & -\sigma r_m \cos \theta_m \end{vmatrix} = \sigma^2 r_m$$

Οι συνδυασμένες PDF των τυχαίων μεταβλητών R_m και Θ_m στην είσοδο του φωρατή είναι

$$f_{R_1, \Theta_1}(r_1, \theta_1) = \frac{r_1}{2\pi} e^{-(r_1^2 + 2\mathcal{E}_s/N_0)/2} I_0 \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_s}{N_0}} r_1 \right)$$

$$f_{R_m, \Theta_m}(r_m, \theta_m) = \frac{r_m}{2\pi} e^{-r_m^2/2}, \quad m = 2, 3, \dots, M$$

Από τις συνδυασμένες PDF βρίσκονται οι περιθώριες PDF των τυχαίων μεταβλητών R_m και Θ_m . Δεδομένου ότι η τυχαία μεταβλητή Θ_m είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 2\pi)$, ο παράγοντας $1/2\pi$ εξαλείφεται και έτσι βρίσκουμε ότι η τυχαία μεταβλητή R_1 ακολουθεί κατανομή Rice, ενώ κάθε μία από τις τυχαίες μεταβλητές R_m , $m = 2, 3, \dots, M$ ακολουθεί κατανομή Rayleigh.

Η πιθανότητα σωστής απόφασης είναι

$$P_c = P(R_2 < r_1, R_3 < r_1, \dots, R_M < r_1) \\ = \int_0^\infty P(R_2 < r_1, R_3 < r_1, \dots, R_M < r_1 | R_1 = x) f_{R_1}(x) dx$$

Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές R_m , $m = 2, 3, \dots, M$ είναι στατιστικά i.i.d., η συνδυασμένη πιθανότητα δεσμευμένη στο R_1 , παραγοντοποιείται σε ένα γινόμενο $M - 1$ ταυτόσημων όρων.

$$P_c = \int_0^\infty [P(R_2 < r_1 | R_1 = x)]^{M-1} f_{R_1}(x) dx$$

όπου

$$P(R_2 < r_1 | R_1 = x) = \int_0^x f_{R_2}(r_2) dr_2 = 1 - e^{-x^2/2}$$

δεδομένου ότι

$$[1 - e^{-x^2/2}]^{M-1} = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} e^{-nx^2/2}$$

έχουμε

$$P_c = \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} e^{-n\rho_s/(n+1)}$$

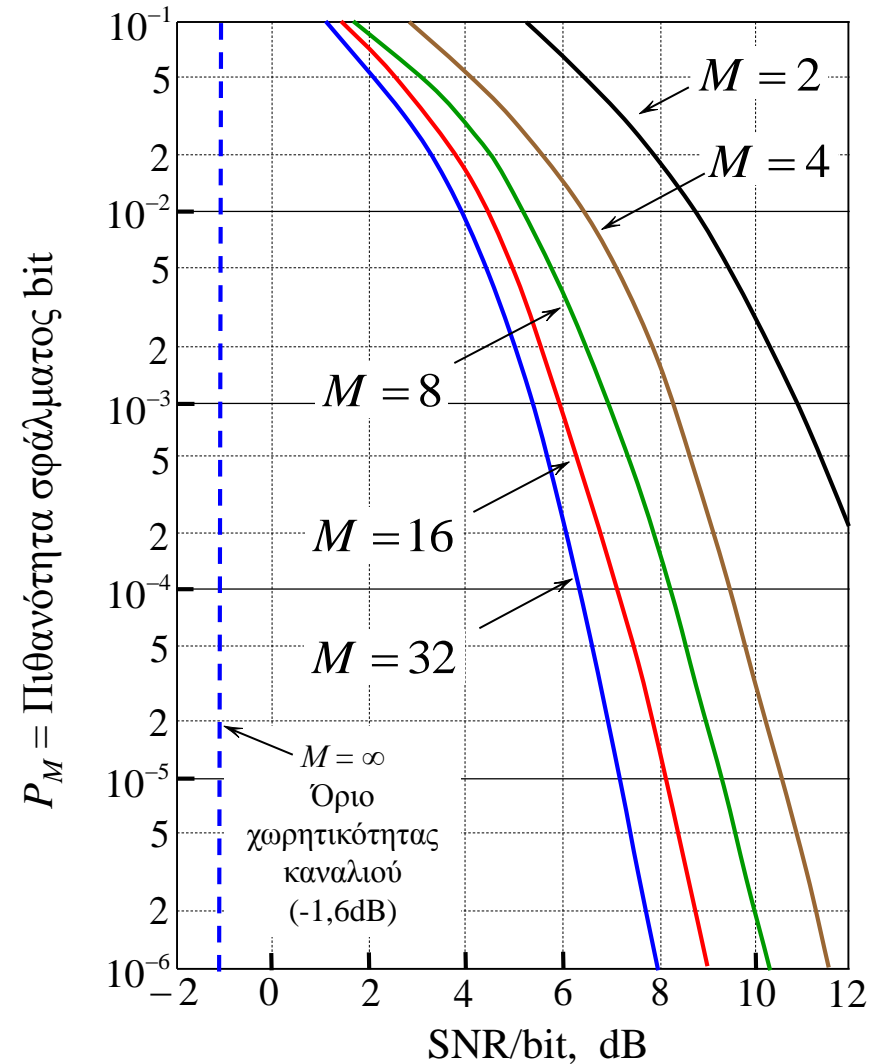
η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου $P_M = 1 - P_c$, είναι

$$P_M = \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{n+1} e^{-nk\rho_b/(n+1)}$$

Για δυαδικό FSK $M = 2$, η εξίσωση απλοποιείται στη μορφή

$$P_2 = \frac{1}{2} e^{-\rho_s/2}$$

Παρατηρούμε ότι η επίδοση της ασύμφωνης FSK είναι κατά 3dB μειωμένη ως προς αυτήν του δυαδικού DPSK.



Πιθανότητα σφάλματος bit κατά την ασύμφωνη φώραση ορθογώνιων FSK σημάτων.

Σύγκριση των μεθόδων Διαμόρφωσης

Οι μέθοδοι ψηφιακής διαμόρφωσης που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο αυτό μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους με διάφορους τρόπους.

Για παράδειγμα, κάποιος μπορεί να τις συγκρίνει με βάση το απαιτούμενο SNR για την επίτευξη μίας συγκεκριμένης πιθανότητας σφάλματος.

Όμως, μια τέτοια σύγκριση δεν έχει ουσιαστική έννοια εκτός εάν πραγματοποιείται βάσει κάποιου περιορισμού, όπως για παράδειγμα για καθορισμένο ρυθμό διαβίβασης δεδομένων R_b .

Υποθέστε ότι ο ρυθμός bit R_b είναι καθορισμένος, και ας εξετάσουμε το εύρος-ζώνης καναλιού που απαιτείται για τη μετάδοση των διάφορων σημάτων.

Εάν χρησιμοποιήσουμε M -αδικό PAM, όπου $M = 2^k$, το εύρος-ζώνης καναλιού που απαιτείται για τη μετάδοση του σήματος είναι απλά το εύρος-ζώνης του παλμού $g_T(t)$, το οποίο εξαρτάται από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του παλμού.

Για τους σκοπούς της ενότητας αυτής, υποθέτουμε ότι το $g_T(t)$ είναι ένας παλμός διάρκειας T και ότι το εύρος-ζώνης του W είναι προσεγγιστικά $1/2T$, όπου T είναι η διάρκεια της περιόδου σηματοδοσίας.

Σ' ένα διάστημα συμβόλου μπορούμε να μεταδώσουμε k bits πληροφορίας, και επομένως, $T = k/R_b$ sec. Συνεπώς, το εύρος-ζώνης που απαιτείται για τη μετάδοση του M -αδικού PAM σήματος είναι

$$W = R_b / 2k = R_b / 2 \log_2(M) \quad \text{Hz}$$

Το απαιτούμενο εύρος-ζώνης καναλιού για το ζωνοπερατό PAM σήμα μονής πλευρικής ζώνης είναι ακριβώς το ίδιο με το εύρος-ζώνης του σήματος βασικής ζώνης.

Στην περίπτωση του QAM, το εύρος-ζώνης καναλιού είναι (προσεγγιστικά) $W = 1/T$, αλλά επειδή η πληροφορία μεταφέρεται από δύο ορθογώνια φέροντα έχουμε $T = 2k/R_b$, όπου k είναι ο αριθμός των bits πληροφορίας ανά φέρον. Επομένως,

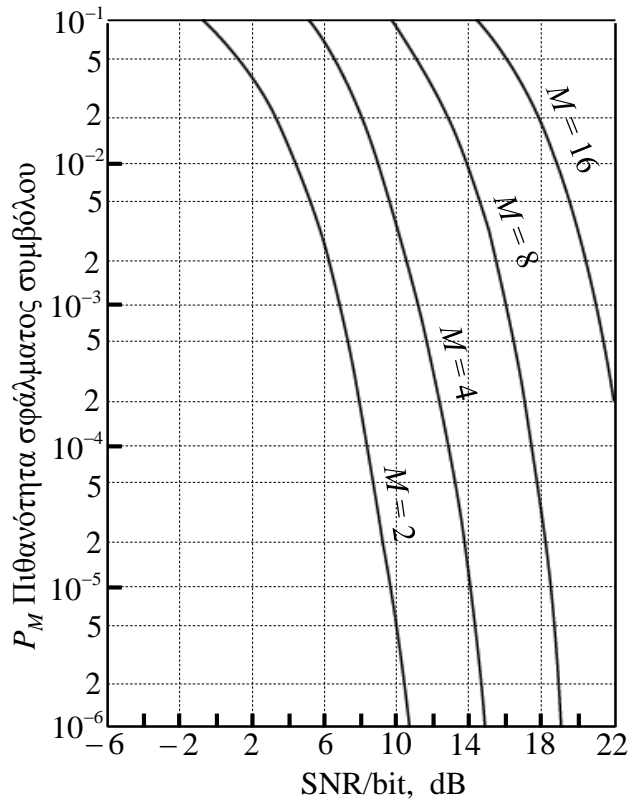
$$W = R_b / 2k = R_b / 2 \log_2(M_{\text{PAM}}) + R_b / \log_2(M_{\text{QAM}}) \quad \text{Hz}$$

όπου ο αριθμός των συμβόλων του M -αδικού QAM, ο οποίος δηλώνεται ως M_{QAM} , είναι ίσος με το τετράγωνο του αριθμού M_{PAM} των PAM συμβόλων.

Στη M -αδική διαμόρφωση κατά φάση, το εύρος-ζώνης καναλιού που απαιτείται για τη μετάδοση των σημάτων είναι $W = 1/T$, όπου $T = k/R_b$. Επομένως,

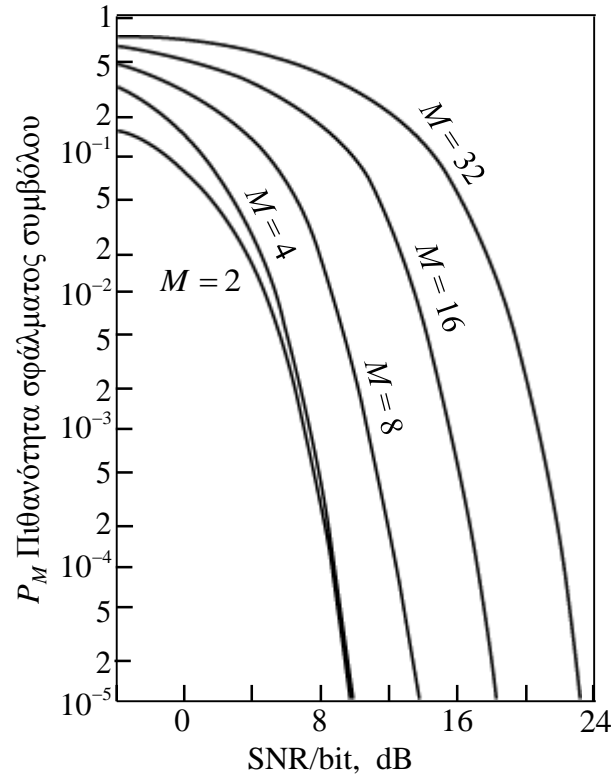
$$W = R_b / k = R_b / \log_2(M) \quad \text{Hz}$$

Σημειώστε ότι τα PAM, QAM, και PSK σήματα έχουν το χαρακτηριστικό ότι, για καθορισμένο ρυθμό R_b , το απαιτούμενο εύρος-ζώνης καναλιού μειώνεται καθώς ο αριθμός των συμβόλων M αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι αυξάνοντας το M το σύστημα είναι πιο αποδοτικό στη χρήση του εύρους-ζώνης.



Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για σήματα PAM

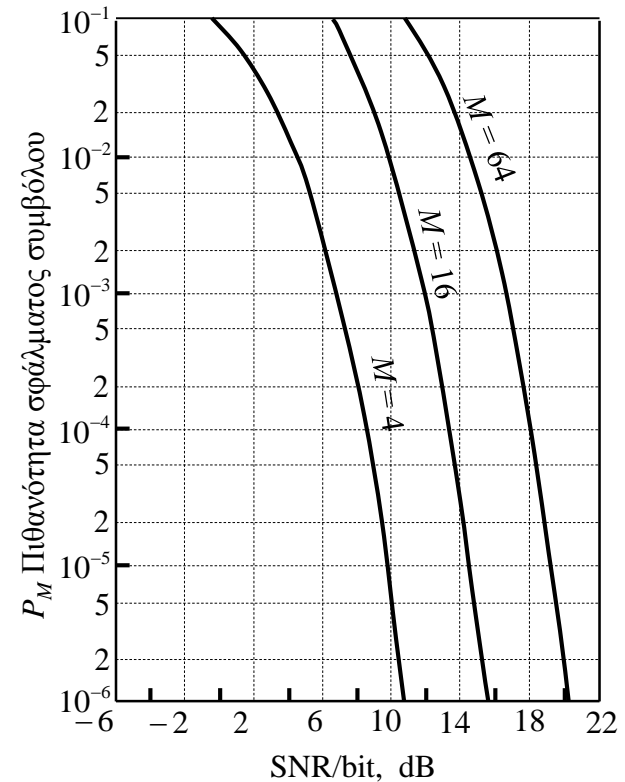
$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6(\log_2 M)\mathcal{E}_{bav}}{(M^2-1)N_0}}\right)$$



Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για σήματα PSK

$$P_2 = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

$$P_4 = 2Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)\left[1 - \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)\right]$$



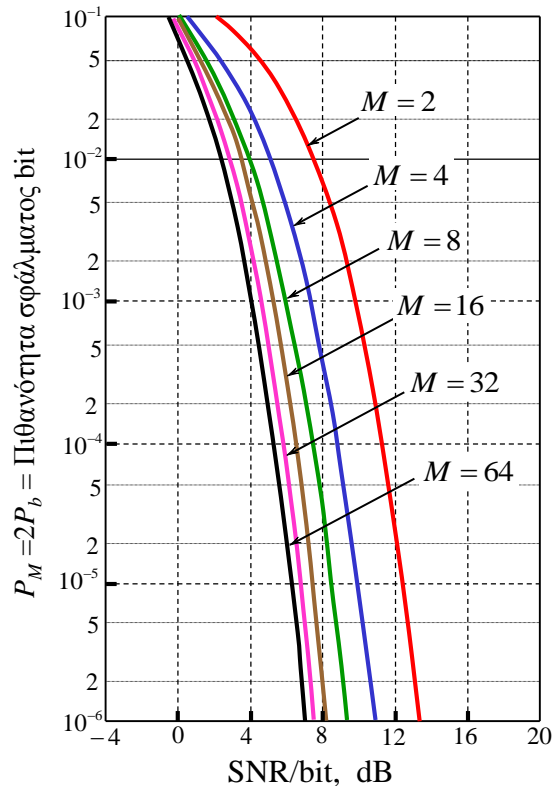
Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για συστήματα QAM

$$P_{\sqrt{M}} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{\mathcal{E}_{av}}{N_0}}\right)$$

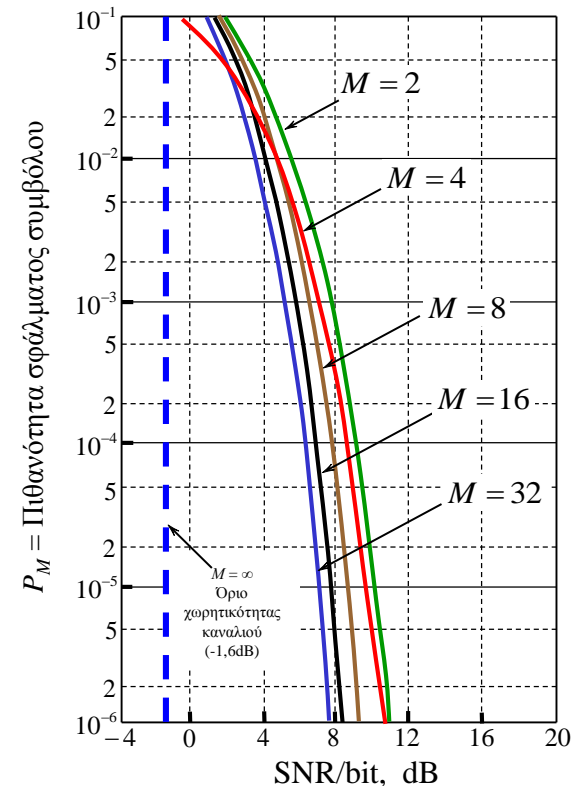
$$P_M = 1 - (1 - P_{\sqrt{M}})^2$$

Τα ορθογώνια σήματα έχουν εντελώς διαφορετικές απαιτήσεις σε εύρος-ζώνης. Για παράδειγμα, εάν χρησιμοποιήσουμε PPM σήματα, το διάστημα συμβόλου, διάρκειας T , διαιρείται σε M υποδιαστήματα διάρκειας T/M και παλμοί εύρους T/M μεταδίδονται στα αντίστοιχα υποδιαστήματα. Συνεπώς, το εύρος-ζώνης που απαιτείται για να μεταδώσουμε τα PPM σήματα είναι

$$W = M / 2T = M/2(k/R_b) = MR_b/2\log_2 M \quad \text{Hz}$$



Πιθανότητα σφάλματος bit στη σύμφωνη φάραση ορθογωνίων σημάτων



Πιθανότητα σφάλματος συμβόλου για διορθογώνια σήματα.

Τα χαρακτηριστικά των PAM, PSK και QAM σχημάτων από τη μία πλευρά, και των ορθογώνιων, διορθογώνιων και simplex σχημάτων από την άλλη πλευρά, είναι εντελώς διαφορετικά και, επομένως, οι εφαρμογές τους είναι επίσης εντελώς διαφορετικές.

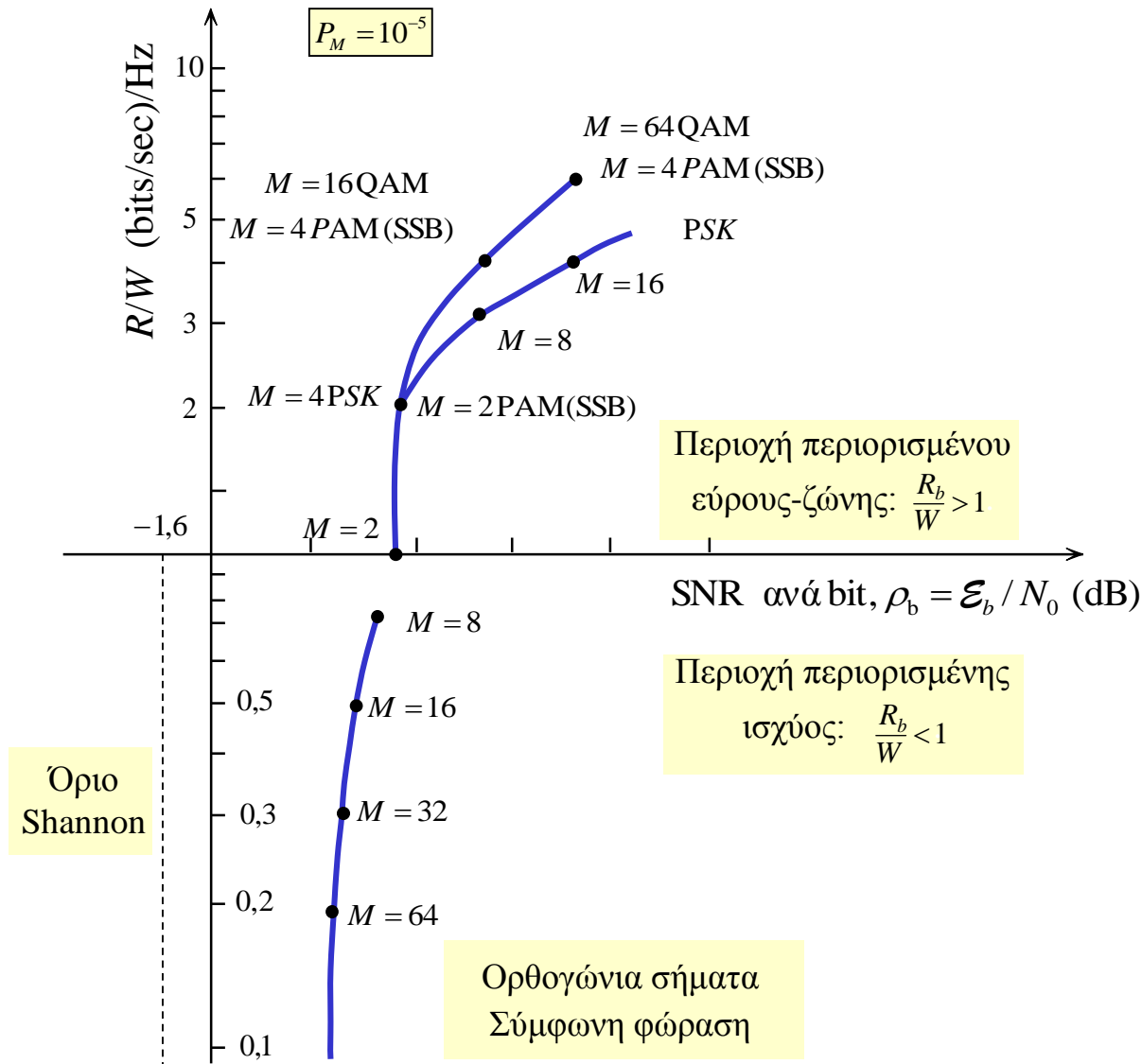
Μία σύντομη και ουσιαστική σύγκριση μεταξύ αυτών των μεθόδων διαμόρφωσης βασίζεται στον κανονικοποιημένο ρυθμό δεδομένων R_b/W (bits ανά sec ανά hertz εύρους-ζώνης) έναντι του SNR/bit (\mathcal{E}_b/N_0) που απαιτείται για την επίτευξη μιας δεδομένης πιθανότητας σφάλματος. Για το PAM, QAM, PSK και τα ορθογώνια σήματα έχουμε

$$\text{PAM: } \frac{R_b}{W} = 2 \log_2(M_{\text{PAM}})$$

$$\text{QAM: } \frac{R_b}{W} = \log_2(M_{\text{QAM}})$$

$$\text{PSK: } \frac{R_b}{W} = \log_2(M_{\text{PSK}})$$

$$\text{Ορθογώνια: } \frac{R_b}{W} = \frac{\log_2(M)}{M}$$



Σύγκριση διαφόρων μεθόδων διαμόρφωσης για πιθανότητα σφάλματος συμβόλου $P_s = 10^{-5}$

ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΙ QAM ΣΗΜΑΤΩΝ	
Αριθμός σημείων αστερισμού M	Αύξηση μέσης ισχύος (dB) συγκριτικά με $M = 2$
4	3
8	6,7
16	10,0
32	13,2
64	16,2
128	19,2

Ο Πίνακας δίδει τον παράγοντα $10\log_2(M - 1)/3$, ο οποίος αναπαριστά την αύξηση της μέσης ισχύος που απαιτείται για τη διατήρηση ενός δεδομένου επιπέδου επίδοσης σφάλματος του QAM καθώς ο αριθμός των σημείων του ορθογώνιου αστερισμού αυξάνει. Όπως παρατηρούμε το QAM (και PAM) είναι προτιμότερο του PSK για αστερισμούς μεγάλου πλήθους σημείων.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Σεραφείμ Καραμπογιάς 2015. Σεραφείμ Καραμπογιάς. «Αναλογικές και Ψηφιακές Επικοινωνίες. Πιθανότητα σφάλματος στη φώραση σήματος». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<http://opencourses.uoa.gr/courses/DI41/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.