



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Αναλογικές και Ψηφιακές Επικοινωνίες

Ενότητα 1: Γεωμετρική αναπαράσταση  
κυματομορφών σήματος - διαμόρφωση παλμών

Σεραφείμ Καραμπογιάς

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών

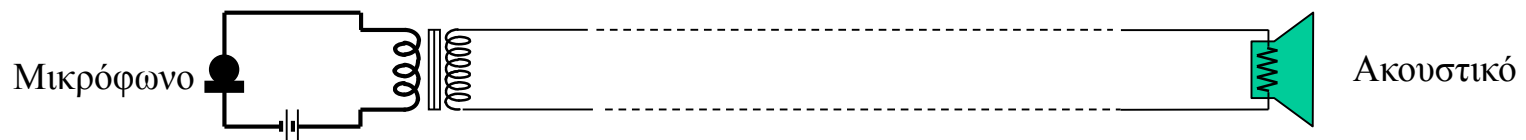
## Στοιχεία ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Επικοινωνίας

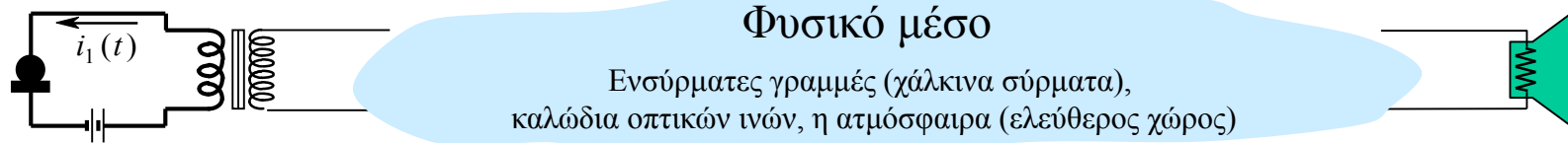
Ο σκοπός του συστήματος επικοινωνίας είναι να μεταδώσει πληροφορία (*transmission of information*) από ένα σημείο του χώρου, που λέγεται **πηγή**, σε ένα άλλο σημείο, που είναι ο **προορισμός χρήσης**.

Κατά κανόνα, το μήνυμα που παράγεται από μια πηγή δεν είναι ηλεκτρικό. Ένας **μετατροπέας** είναι συνήθως αναγκαίος για να μετατρέψει την έξοδο της πηγής σε ηλεκτρικό σήμα κατάλληλο για μετάδοση. Για παράδειγμα, για πηγή ακουστικού σήματος χρησιμοποιείται το μικρόφωνο για μετατροπή σε ηλεκτρικό σήμα, ενώ για πηγή εικόνας χρησιμοποιείται μια video-camera.

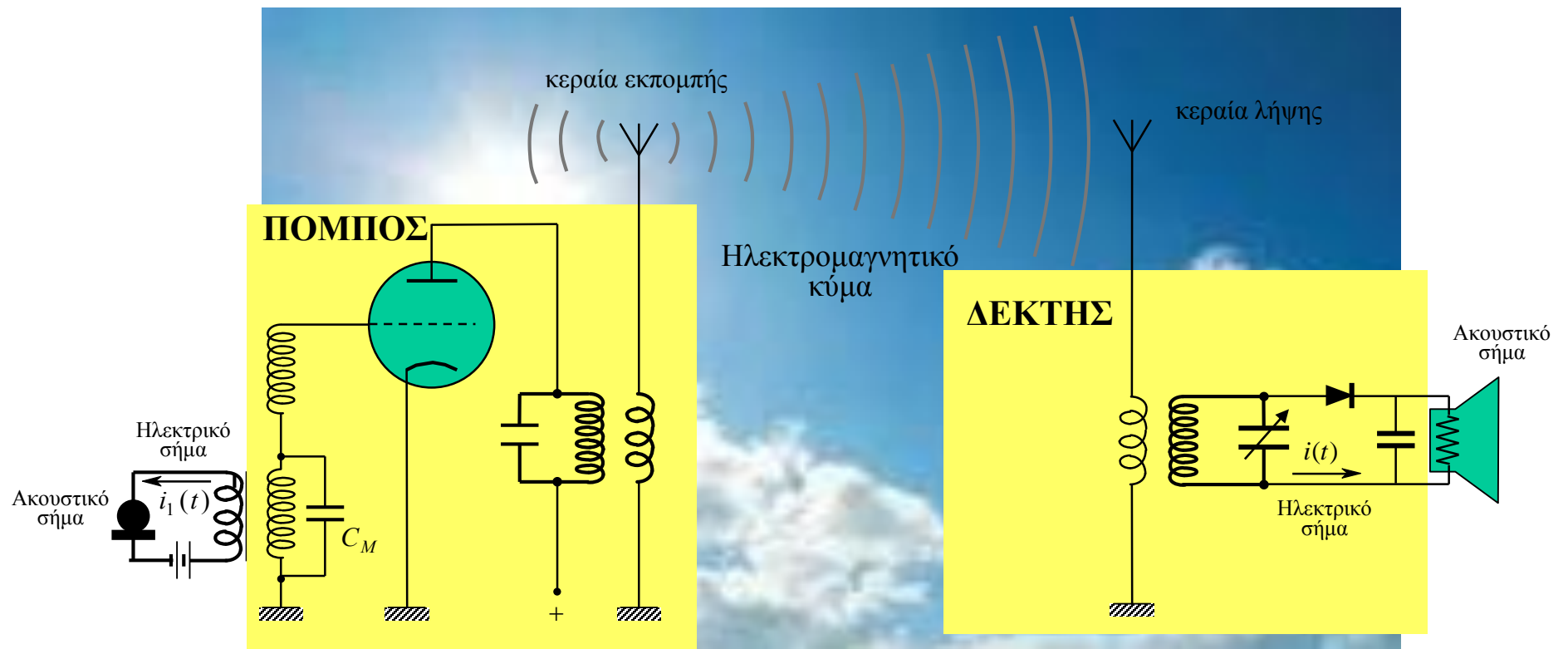
Στον προορισμό χρειάζεται μια αντίστοιχη αντίστροφη μετατροπή των ηλεκτρικών σημάτων σε κατάλληλη μορφή, για παράδειγμα ήχο, εικόνα κ.τ.λ.

Το **κανάλι** επικοινωνίας είναι το φυσικό μέσο που χρησιμεύει για να στέλνεται το **σήμα** από την πηγή στον προορισμό χρήσης.



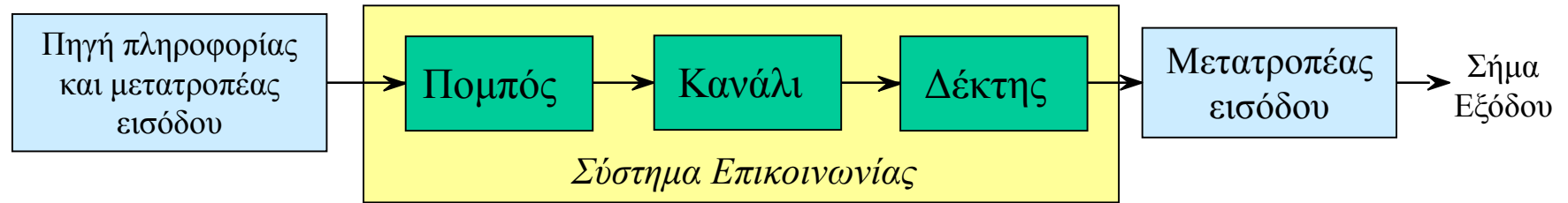


Παρόλο που σε μερικές περιπτώσεις είναι δυνατή η **απ'ευθείας ζεύξη** του μετατροπέα εισόδου με το κανάλι, είναι συχνά αναγκαίο να μετατραπεί το ηλεκτρικό σήμα σε μία μορφή κατάλληλη για μετάδοση μέσα από το φυσικό κανάλι ή μέσο διάδοσης.



*Πομπός διαμορφωμένου κύματος (αρχή)*

*Δέκτης με κρυσταλλοτρίοδο (αρχή)*



*Διάγραμμα λειτουργικών βαθμίδων ενός συστήματος επικοινωνίας*

Ο **πομπός** μετατρέπει το ηλεκτρικό σήμα σε μια μορφή κατάλληλη για μετάδοση μέσα από το φυσικό κανάλι ή μέσο μετάδοσης, δηλαδή, ο πομπός πραγματοποιεί τη ζεύξη του σήματος μηνύματος με το κανάλι.

Ο **δέκτης** ανακτά το σήμα μηνύματος από το λαμβανόμενο σήμα.

Εγγένει ο πομπός επιτυγχάνει την προσαρμοσμένη σύζευξη του σήματος του μηνύματος με το κανάλι με μια διαδικασία που λέγεται **διαμόρφωση** (modulation).

Συνήθως, η διαμόρφωση χρησιμοποιεί το σήμα πληροφορίας για **να μεταβάλλει** κατά τρόπο συστηματικό το **πλάτος**, τη **συχνότητα**, ή τη **φάση** ενός ημιτονοειδούς φέροντος.

Έτσι, μέσω της διαδικασίας της διαμόρφωσης, το σήμα πληροφορίας **μεταφέρεται σε συχνότητα** κατάλληλη προκειμένου να προσαρμόζεται στη παραχωρημένη στο κανάλι ζώνη.

Σε κάθε περίπτωση, η διαδικασία της διαμόρφωσης μας δίνει τη δυνατότητα να **διευθετήσουμε τη μετάδοση πολλών μηνυμάτων** από διαφορετικούς χρήστες μέσα από το ίδιο φυσικό κανάλι

Για παράδειγμα στην ραδιοφωνία και στην τηλεοπτική εκπομπή ο πομπός μετατρέπει το σήμα πληροφορίας που πρόκειται να εκπέμψει στην κατάλληλη περιοχή για να μη παρεμβάλλεται με κάποιον άλλον.

Ανάλογες λειτουργίες εκτελούνται από τα συστήματα τηλεφωνικών επικοινωνιών όταν ηλεκτρικά σήματα ομιλίας από πολλούς χρήστες μεταδίδονται ταυτόχρονα, αλλά σε διαφορετική για το καθένα φασματική περιοχή, μέσα από το ίδιο σύρμα.

## Τύποι Αναλογικής CW Διαμόρφωσης

*Στη διαμόρφωση συνεχούς φέροντος κύματος (CW: Continuous Wave) μία παράμετρος (όπως το πλάτος ή η συχνότητα ή η φάση) ενός φέροντος υψηλής συχνότητας μεταβάλλεται ανάλογα με το σήμα χαμηλής συχνότητας του μηνύματος.*

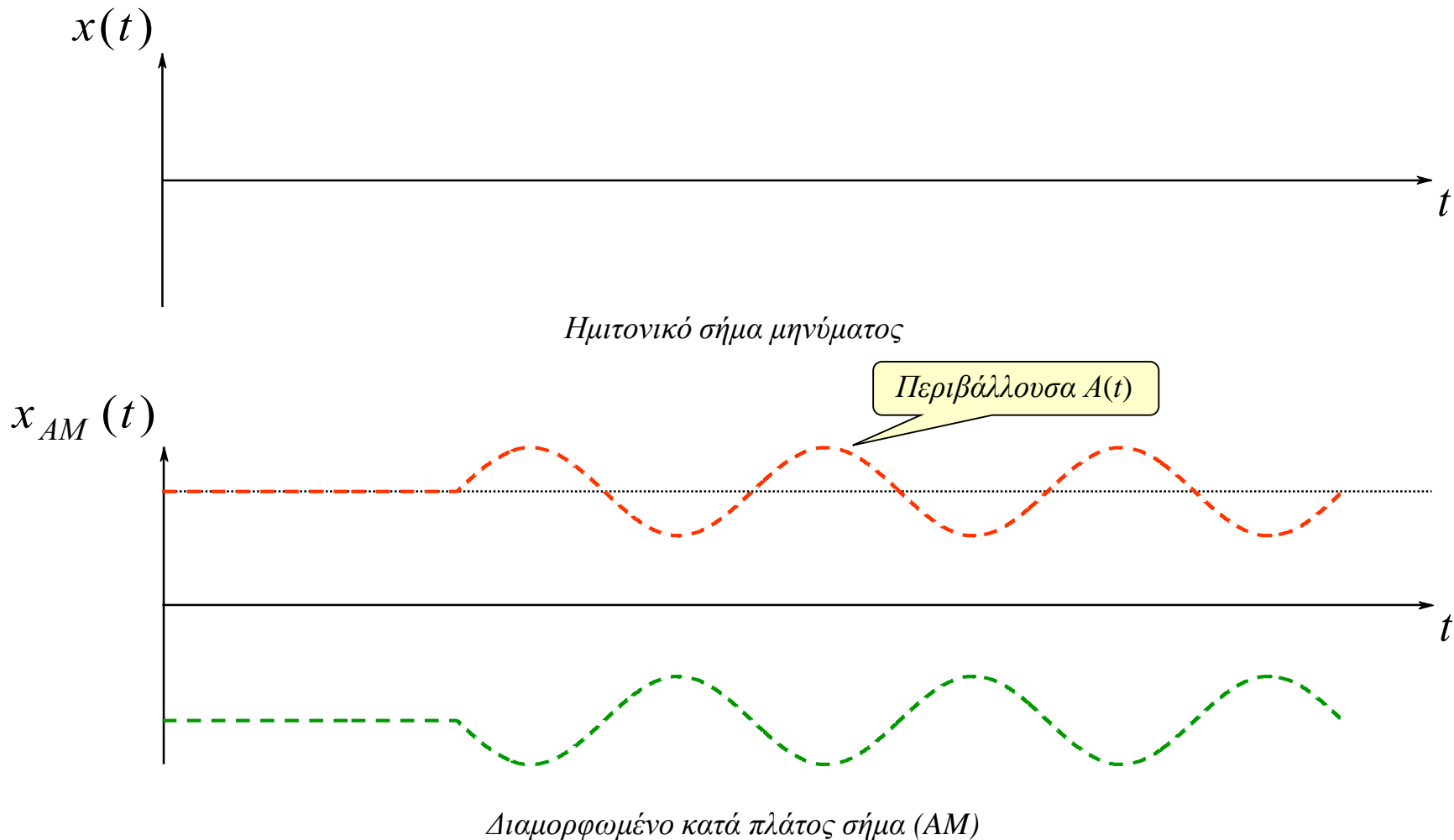
$$u(t) = A_c(t) \cos[2\pi f_c t + \phi_c(t)]$$

$A_c(t)$  είναι το στιγμιαίο πλάτος του φέροντος  $f_c$  είναι η φέρουσα συχνότητα και  $\phi_c(t)$  είναι η στιγμιαία απόκλιση φάσης του φέροντος

Αν το  $A_c(t)$  συνδέεται γραμμικά με το σήμα μηνύματος  $m(t)$ , τότε έχουμε *γραμμική διαμόρφωση*. Αν η  $\phi_c(t)$  ή χρονικές παράγωγοί της συνδέονται γραμμικά με το  $m(t)$  τότε έχουμε *διαμόρφωση φάσης ή συχνότητας (γωνιακή διαμόρφωση)*

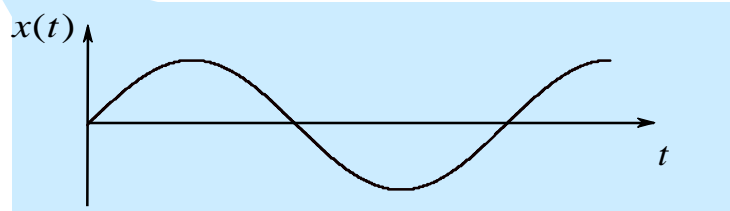
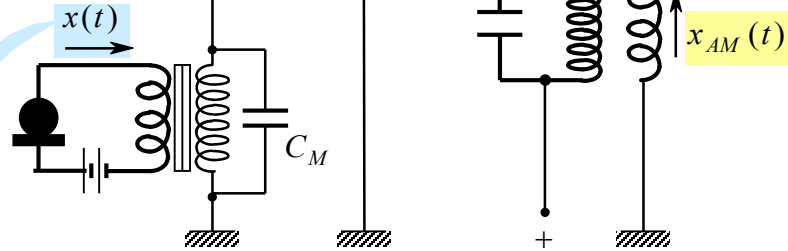
## Διαμόρφωση πλάτους

Στη διαμόρφωση πλάτους το σήμα μηνύματος  $m(t)$  αποτυπώνεται στο πλάτος του φέροντος σήματος  $c(t)$ .

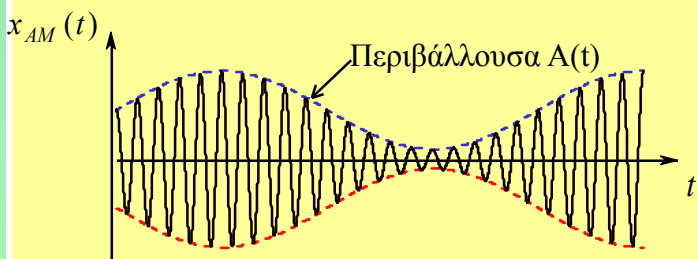




Ηλεκτρομαγνητικό κύμα

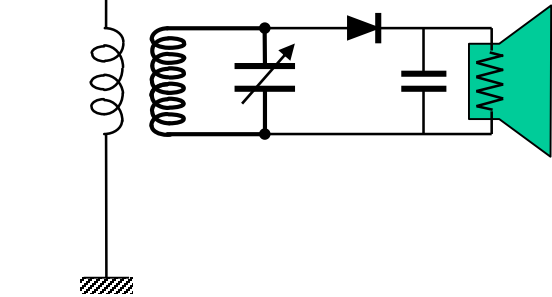


Ημιτονικό σήμα μηνύματος

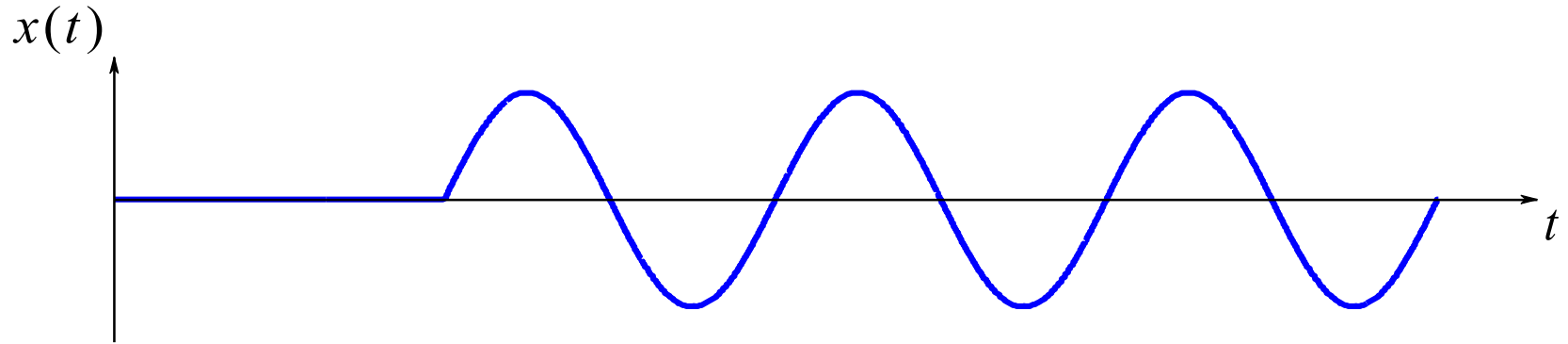


Διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα (AM)

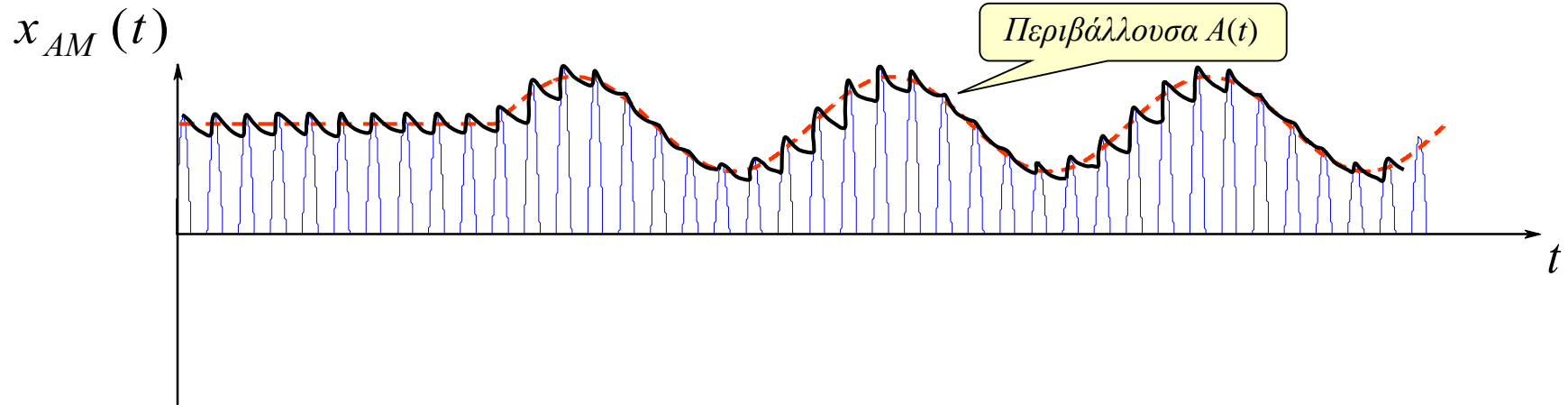
Δέκτης με κρυσταλλοτρίοδο (αρχή)







Ημιτονικό σήμα μηνύματος



Διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα (AM)

## Γωνιακή διαμόρφωση

Στην **διαμόρφωση φάσης** (PM), η στιγμιαία απόκλιση φάσης του φέροντος είναι ανάλογη προς το σήμα μηνύματος

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t)$$

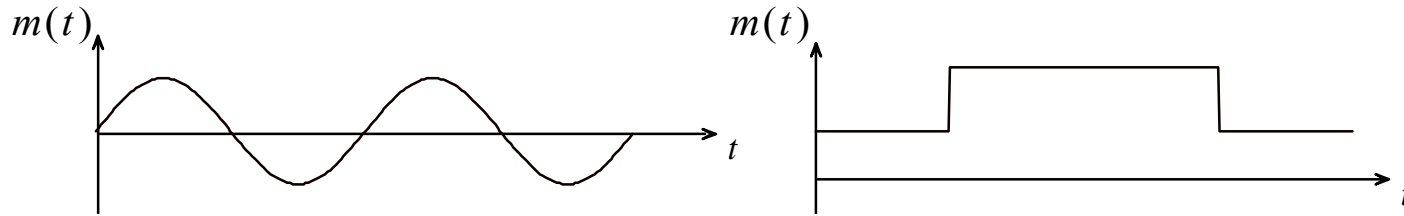
όπου  $k_p$  η **σταθερά απόκλισης φάσης** (με μονάδα 1rad/volt)

Για τα **διαμορφωμένα κατά συχνότητα** σήματα, η απόκλιση συχνότητας του φέροντος είναι ανάλογη προς το σήμα μηνύματος.

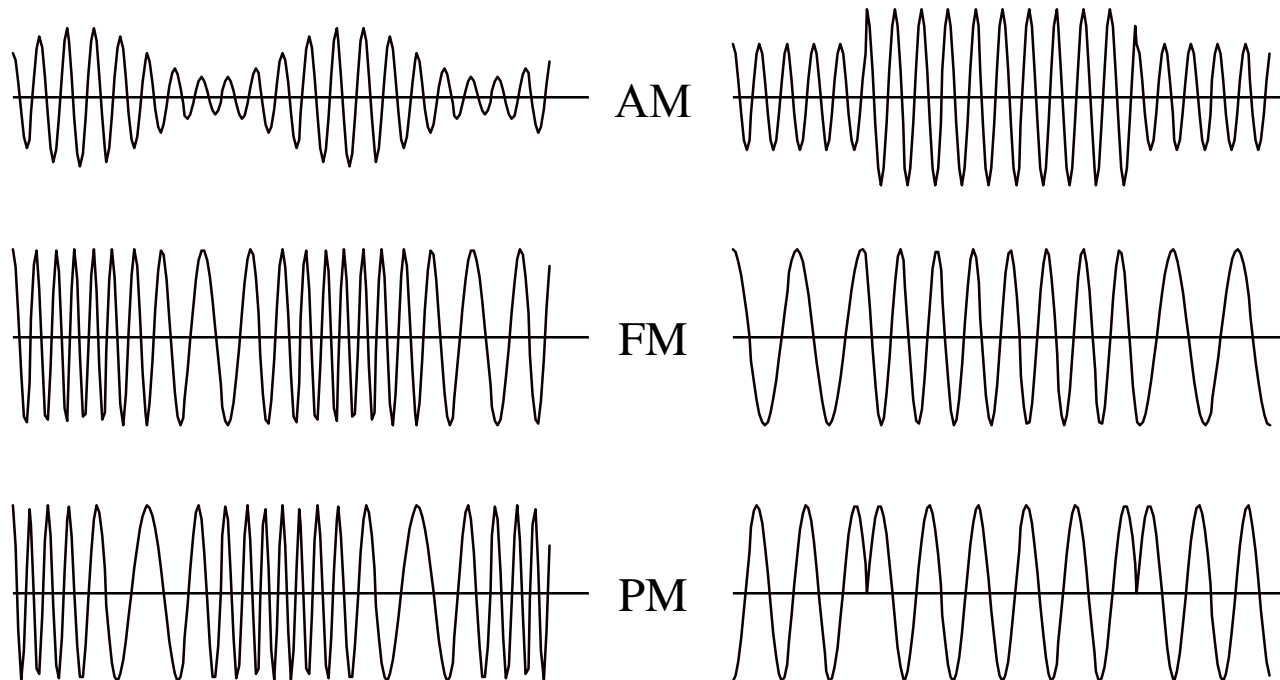
$$f_i(t) - f_c = k_f \cdot m(t)$$

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = 2\pi k_f \cdot m(t) \quad \text{ή} \quad \phi(t) = 2\pi k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

όπου  $k_f$  η **σταθερά απόκλισης συχνότητας** (με μονάδα rad/sec)



Σήμα μηνύματος



Διαμορφωμένα σήματα

Κυματομορφές AM, FM και PM για δύο διαφορετικές κυματομορφές μηνυμάτων.

# Ψηφιακή Μετάδοση Αναλογικών Σημάτων

Τα σύγχρονα συστήματα επικοινωνίας σε πολύ μεγάλο ποσοστό διαχειρίζονται σήματα ψηφιακής μορφής, δηλαδή, σήματα που δημιουργούνται από ακολουθίες δυαδικών ψηφίων.

Τα περισσότερα σήματα στην πράξη είναι αναλογικά. Η μετάδοση των σημάτων αυτών σε ψηφιακή μορφή απαιτεί τα αναλογικά αυτά σήματα να μετατραπούν σε ψηφιακά.

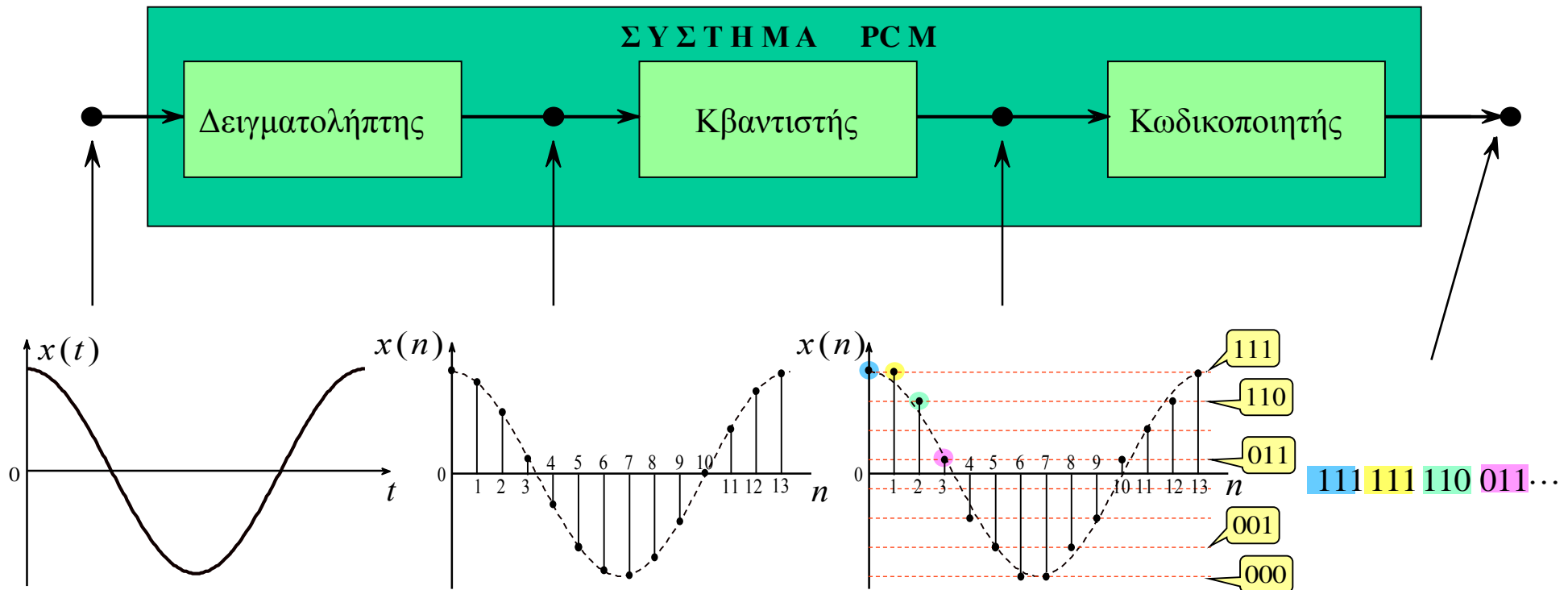
Η διαδικασία της μετατροπής αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά ονομάζεται **αναλογική σε ψηφιακή μετατροπή** (*A/D analog to digital conversion*) ή **κωδικοποίησης κυματομορφής**. Υπάρχουν δύο βασικές τεχνικές κωδικοποίησης κυματομορφής, παλμοκωδική διαμόρφωση και η διαμόρφωση δέλτα.

## Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)

**Η Παλμοκωδική διαμόρφωση** (*Pulse Code Modulation (PCM)*) είναι το απλού-στερο σχήμα κωδικοποίησης κυματομορφής. Ένας παλμοκωδικός διαμορφωτής παλμών αποτελείται από τρία βασικά μέρη: ένα **δειγματολήπτη**, έναν **κβαντιστή** και ένα **κωδικοποιητή**.

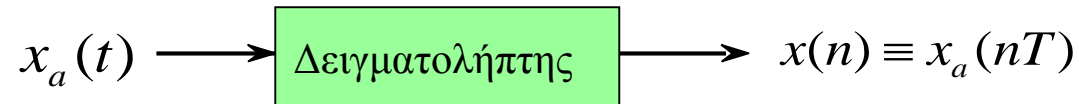
## Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)

Η παλμοκωδική διαμόρφωση (*Pulse Code Modulation* (PCM)) είναι το απλούστερο σχήμα κωδικοποίησης κυματομορφής. Ένας παλμοκωδικός διαμορφωτής παλμών αποτελείται από τρία βασικά μέρη: ένα *δειγματολήπτη*, έναν *κβαντιστή* και ένα *κωδικοποιητή*.



## Δειγματολήπτης

Σε πολλές εφαρμογές είναι αναγκαίο να μεταδίδουμε ή να αποθηκεύουμε ένα αναλογικό σήμα από τις τιμές των δειγμάτων του παρμένες κατά κατάλληλα χρονικά διαστήματα.



Το **θεώρημα της δειγματοληψίας** αναφέρει ότι ένα αναλογικό σήμα μπορεί να αναπαραχθεί από ένα κατάλληλο σύνολο δειγμάτων του και επομένως χρειάζεται να μεταδίδουμε μόνο τις τιμές των δειγμάτων μόλις εμφανίζονται και όχι το ίδιο το αναλογικό σήμα.

Το ζητούμενο είναι πόσο μεγάλη ή μικρή πρέπει να είναι η περίοδος δειγματοληψίας  $T$  ώστε να μη χαθεί η πληροφορία, δηλαδή, να είναι δυνατή η ανακατασκευή του αναλογικού σήματος  $x_a(t)$  από τα δείγματα  $x(n)$ .

Το **θεώρημα της δειγματοληψίας** προσδιορίζει ότι συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το εύρος-ζώνης του φάσματος του αναλογικού σήματος  $W$ .

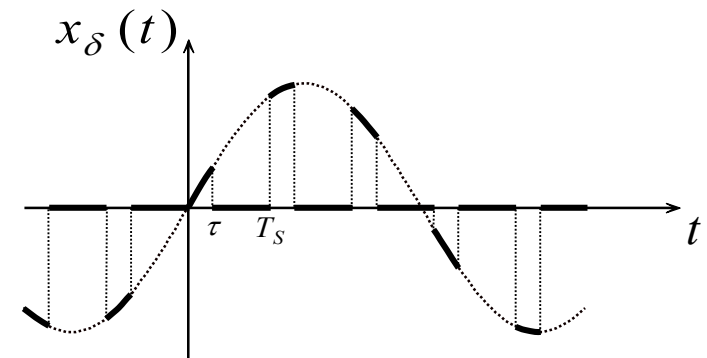
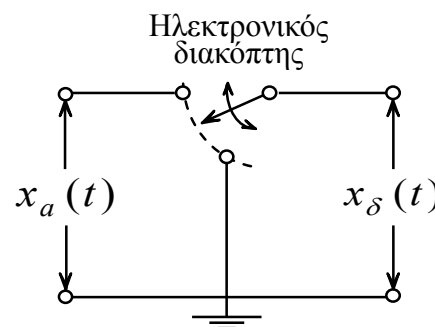
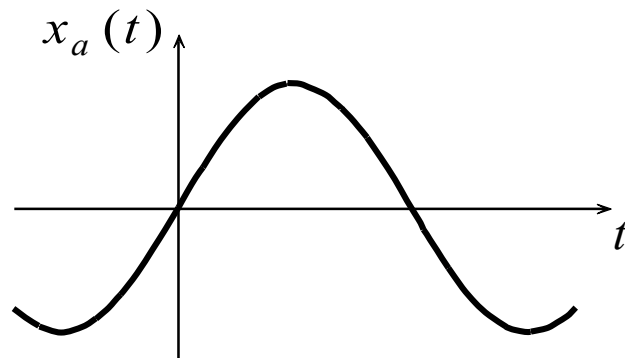
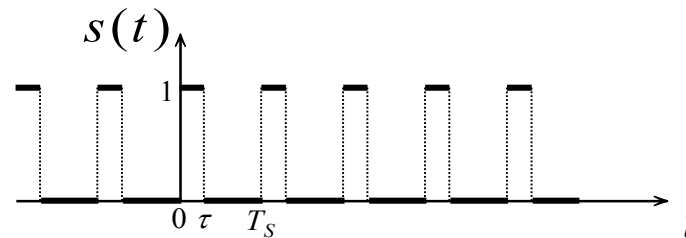
$$f_s \geq W$$

## Θεωρία Δειγματοληψίας

Η αρχή της δειγματοληψίας μπορεί να παρουσιασθεί με τη χρήση ενός *δειγματολήπτη με διακόπτη*.

Ο διακόπτης μετράγεται περιοδικά μεταξύ δύο επαφών μ' ένα *ρυθμό δειγματοληψίας* ή *συχνότητα δειγματοληψίας*

$$f_S = \frac{1}{T_S}$$

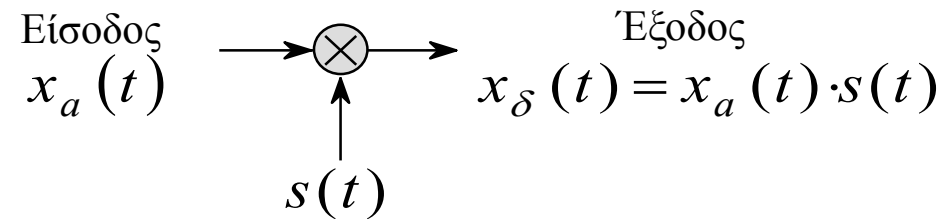


Δειγματολήπτης με διακόπτη

Η έξοδος του δειγματολήπτη μπορεί να παρασταθεί

$$x_{\delta}(t) = x_a(t) \cdot s(t)$$

όπου  $s(t)$  είναι η *συνάρτηση δειγματοληψίας*.



*Εξήγηση της δειγματοληψίας με πολλαπλασιασμό.*

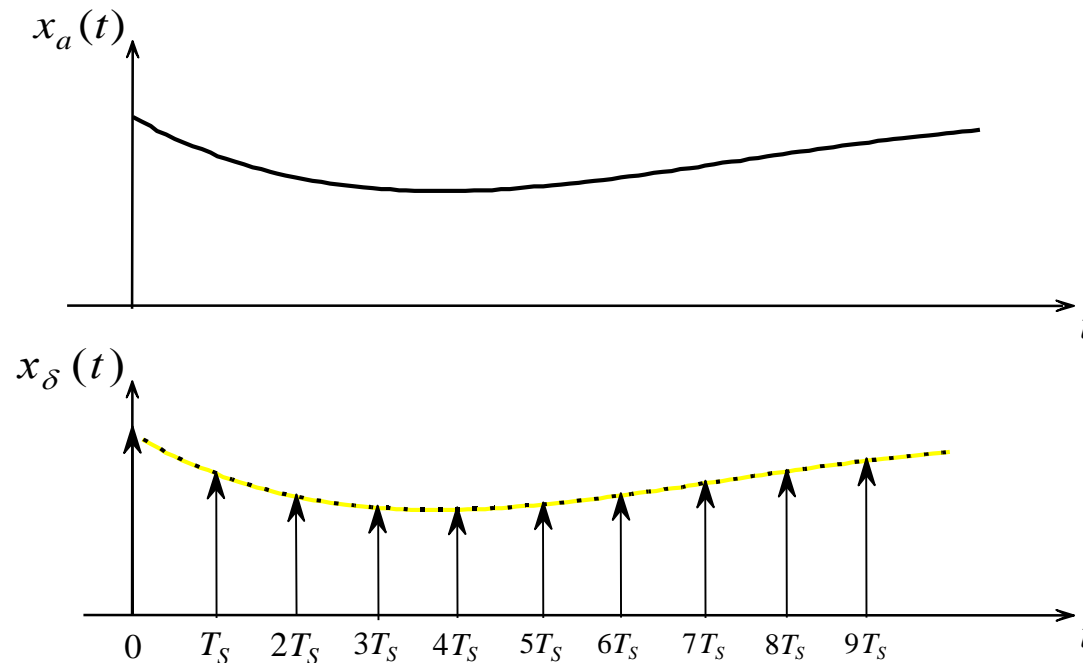
Ο τύπος αυτός δειγματοληψίας λέγεται *συχνά φυσική δειγματοληψία*.



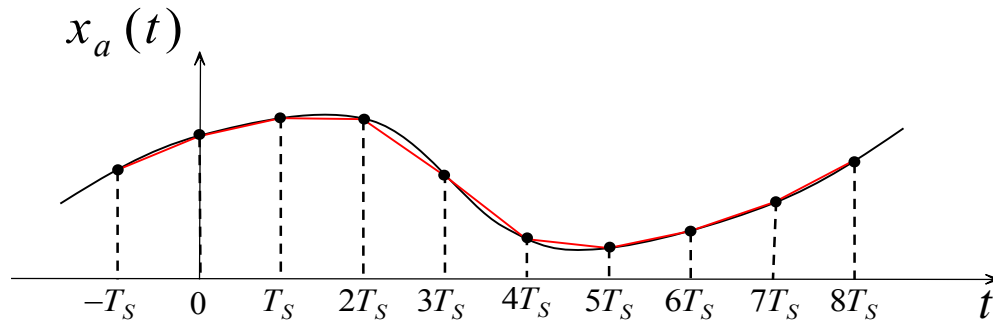
Όταν η διάρκεια του παλμού  $\tau \rightarrow 0$  η δειγματοληψία ονομάζεται *ιδανική δειγματοληψία*

Η συνάρτηση δειγματοληψίας έχει τη μορφή 
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

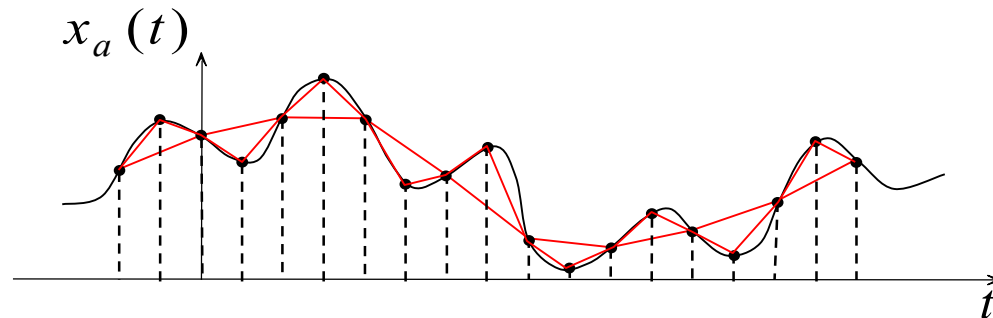
και το δειγματοληπτιμένο σήμα  $x_\delta(t)$  είναι 
$$x_\delta(t) = x_a(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



## Δειγματοληψία αναλογικών σημάτων περιορισμένου εύρους-ζώνης



Το σήμα  $x_a(t)$  είναι ένα αργά μεταβαλλόμενο σήμα, και το κύριο φασματικό περιεχόμενό του βρίσκεται στις χαμηλές συχνότητες, δηλαδή, το εύρος-ζώνης  $W_1$  είναι μικρό.



Τώρα το σήμα  $x_a(t)$  είναι ένα σήμα με γρήγορες μεταβολές οι οποίες οφείλονται στην παρουσία συνιστωσών σε υψηλές συχνότητες, δηλαδή, το εύρος-ζώνης  $W_2$  είναι μεγάλο.

$$W_1 < W_2$$

Είναι προφανές ότι η περίοδος δειγματοληψίας για το δεύτερο σήμα πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερη.

Έστω  $x_s(n)$  είναι η ακολουθία η οποία προέρχεται από τη δειγματοληψία του συνημι-τονοειδούς αναλογικού σήματος  $x_a(t) = A \cos(\omega t + \theta)$  με περίοδο δειγματοληψίας  $T_s$ .

$$x_s(n) = x_a(nT_s) = A \cos(\omega nT_s + \theta) = A \cos(\omega T_s n + \theta)$$

Αν  $\Omega_0$  είναι η ψηφιακή κυκλική συχνότητα τότε  $x_s(n) = A \cos(\Omega n + \theta)$ . Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις του  $x_s(n)$  έχουμε τις σχέσεις μεταξύ αναλογικών και ψηφιακών συχνοτήτων

$$\Omega = \omega \cdot T_s \quad \text{και} \quad F = \frac{f}{f_s}$$

Παρατηρούμε ότι η συχνότητα  $F$  είναι μία κανονικοποιημένη ή σχετική συχνότητα.

Η αναλογική συχνότητα  $f$  έχει μονάδα μέτρησης Hz ή c/sec ενώ η διακριτή  $F$  δεν έχει διαστάσεις. Επίσης η αναλογική κυκλική συχνότητα  $\omega$  έχει μονάδα μέτρησης rad/sec ενώ η διακριτή  $\Omega$  έχει μονάδα μέτρησης rad.

Για να προσδιοριστεί η ψηφιακή συχνότητα  $F$  όταν δίνεται η αναλογική συχνότητα  $f$  πρέπει να είναι γνωστή η συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$ .

## Η απεικόνιση της απείρου εύρους περιοχής αναλογικών συχνοτήτων στην πεπερασμένου εύρους περιοχή ψηφιακών συχνοτήτων

Για τα συνημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου η περιοχή συχνοτήτων είναι

$$0 \leq \omega < \infty \quad \text{και} \quad 0 \leq f < \infty$$

Για τα συνημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου η περιοχή συχνοτήτων είναι

$$-\pi \leq \Omega < \pi \quad \text{και} \quad -\frac{1}{2} \leq F < \frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι η συχνότητα του συνημιτονοειδούς σήματος το οποίο δειγματοληπτούμε πρέπει να βρίσκεται στην περιοχή

$$-\frac{\pi}{T_s} = -\pi f_s \leq \omega < \pi f_s = \frac{\pi}{T_s} \quad \text{και} \quad -\frac{1}{2T_s} = -\frac{f_s}{2} \leq f < \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T_s}$$

Η περιοδική δειγματοληψία ενός αναλογικού σήματος συνεχούς χρόνου οδηγεί στην απεικόνιση της απείρου εύρους περιοχής των αναλογικών συχνοτήτων στην πεπερασμένη εύρους περιοχή ψηφιακών συχνοτήτων.

Η μέγιστη αναλογική συχνότητα που μπορεί να δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας  $f_s$  είναι

$$\omega_{\max} < \frac{\pi}{T_s} \quad \text{και} \quad f_{\max} < \frac{f_s}{2}$$

## Θεώρημα δειγματοληψίας ή Θεώρημα του Shannon

Η συχνότητα  $f_s$  με την οποία λαμβάνονται τα δείγματα ενός αναλογικού σήματος, πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από τη υψηλότερη αναλογική συχνότητα  $f_{\max}$  που περιέχεται στο σήμα, δηλαδή,

$$f_s \geq 2 \cdot f_{\max}$$

Για να μη χαθεί πληροφορία θα πρέπει να παίρνουμε τουλάχιστον δύο δείγματα ανά περίοδο της μεγαλύτερης συχνότητας του αναλογικού σήματος.

Ο συνεχούς χρόνου μετασχηματισμός Fourier (CTFT),  $X_a(f)$ , ή το φάσμα ενός αναλογικού σήματος  $x_a(t)$  είναι

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

όπου  $f$  είναι η αναλογική συχνότητα σε Hz.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier είναι

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(f) e^{j2\pi f t} df$$

Το αναλογικό σήμα είναι σήμα με περιορισμένο εύρος-ζώνης χαμηλών συχνοτήτων, δηλαδή,  $X(f) = 0$  για  $|f| \geq W$ .

Το σήμα  $x_a(t)$  δειγματοληπτείται σε πολλαπλάσια ενός βασικού διαστήματος δειγματοληψίας  $T_s$ , όπου  $T_s \leq 1/2W$ , και λαμβάνεται η ακολουθία

$$\{x(nT_s)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier  $X_S(f)$ , του δειγματοληπτημένου σήματος είναι

$$X_S(f) = X_a(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι ένα άθροισμα αντιγράφων του μετασχηματισμού Fourier του αρχικού σήματος μετατοπισμένων κατά πολλαπλάσια του  $1/T_s$ .

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου  $X_S(\Omega)$  του δειγματοληπτημένου  $x_s(n)$  σήματος διακριτού χρόνου είναι ένα άθροισμα αντιγράφων του μετασχηματισμού Fourier  $X_a(\omega)$  του αρχικού αναλογικού σήματος  $x_a(t)$  μετατοπισμένων κατά  $1/T_s$  και πολλαπλασιασμένων επίσης με  $1/T_s$ , δηλαδή,

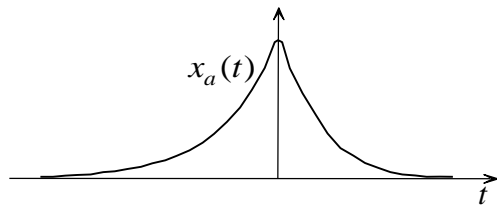
$$X_S(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T_s} + k\frac{2\pi}{T_s}\right)$$

## Δειγματοληψία και ανακατασκευή αναλογικών σημάτων στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο συχνοτήτων

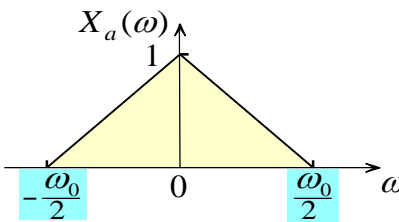
$$X_S(\Omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{\Omega}{T_S} + k \frac{2\pi}{T_S}\right)$$

$$X_S(\omega T_S) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\omega + k \frac{2\pi}{T_S}\right)$$

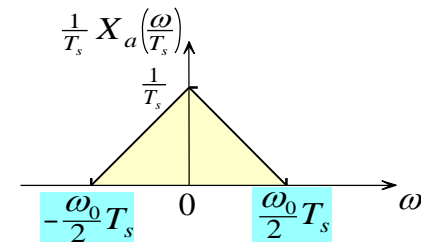
$$X_S(f) = \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a\left(f + \frac{n}{T_S}\right)$$



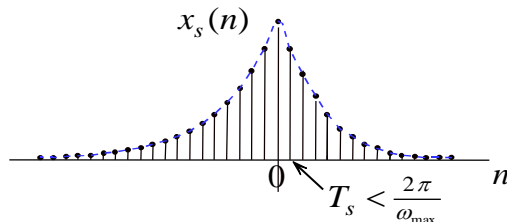
Το αναλογικό σήμα  $x_a(t)$ .



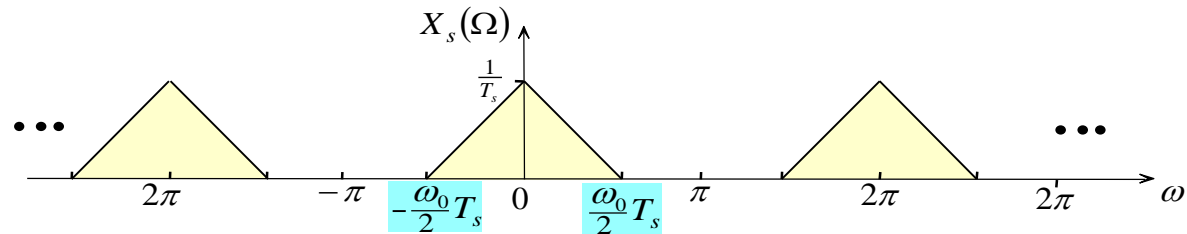
Το περιορισμένου εύρους φάσμα του αναλογικού σήματος



Ο όρος του φάσματος του δειγματοληπτημένου σήματος για  $k = 0$



Το διακριτό σήμα  $x_s(n)$ .

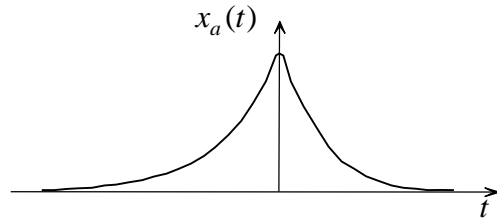


Το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος για  $f_s > 2 f_{\max}$

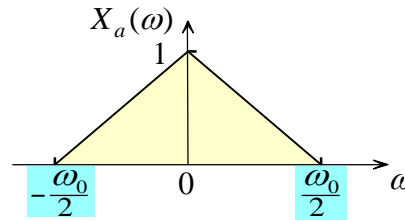
Το φάσμα του αναλογικού σήματος διατηρείται στο φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος επομένως είναι δυνατή η ακριβής ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος από τα δείγματά του.



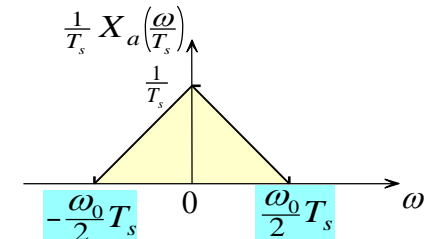
## Δειγματοληψία και ανακατασκευή αναλογικών σημάτων στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο συχνοτήτων



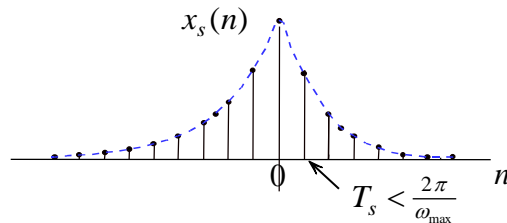
Το αναλογικό σήμα  $x_a(t)$ .



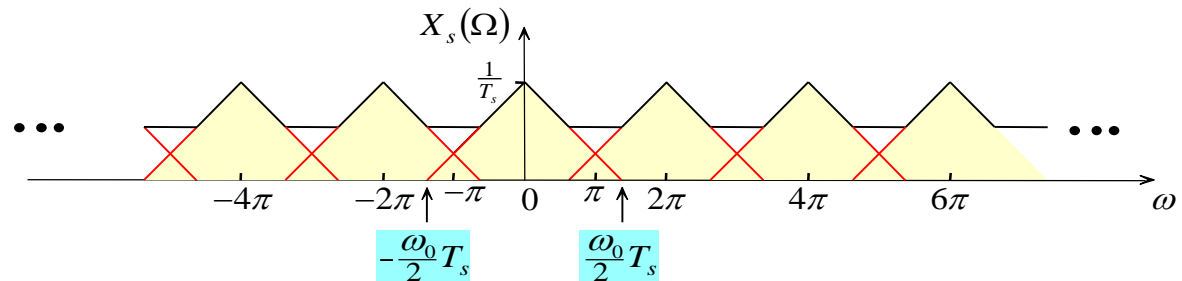
Το περιορισμένου εύρους φάσμα του αναλογικού σήματος



Ο όρος του φάσματος του δειγματοληπτημένου σήματος για  $k = 0$



Το διακριτό σήμα  $x_s(n)$ .



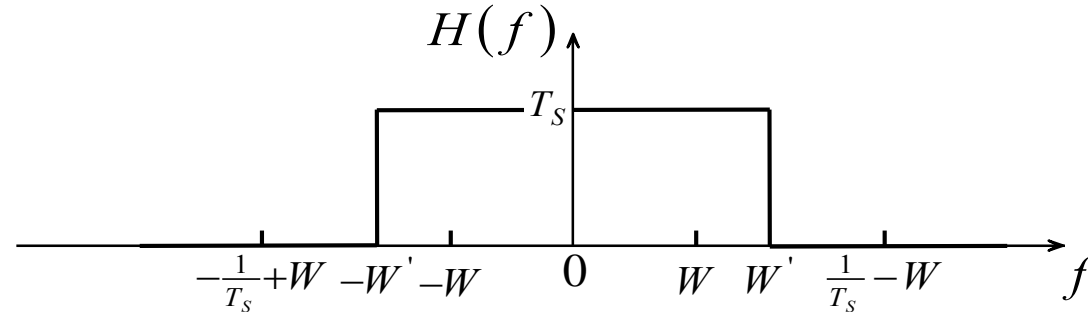
Το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος για  $f_s < 2 f_{\max}$

Έχουμε το φαινόμενο της φασματικής επικάλυψης ή του χαμηλού ρυθμού δειγματοληψίας

Το φάσμα του αναλογικού σήματος δε διατηρείται στο φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος επομένως δεν είναι δυνατή η ακριβής ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος από τα δείγματά του.

Με τη βοήθεια ενός ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου με απόκριση συχνότητας

$$H(f) = T_S \Pi\left(\frac{f}{2W'}\right) \quad \text{όπου} \quad W \leq W' < \frac{1}{T_S} - W$$



είναι δυνατή η ανάκτηση του αρχικού σήματος. Πράγματι,

$$X(f) = X_\delta(f) \cdot T_S \Pi\left(\frac{f}{2W'}\right) \quad \xleftrightarrow{F^{-1}} \quad x(t) = x_\delta(t) * T_S 2W' \text{sinc}(2W't)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha(nT_S) \delta(t - nT_S) * 2W' T_S \text{sinc}(2W't)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2W' T_S x_\alpha(nT_S) \text{sinc}(2W'(t - nT_S))$$

Αν η δειγματοληψία γίνει στη συχνότητα Nyquist, τότε ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο αποτελεί τη μοναδική επιλογή.

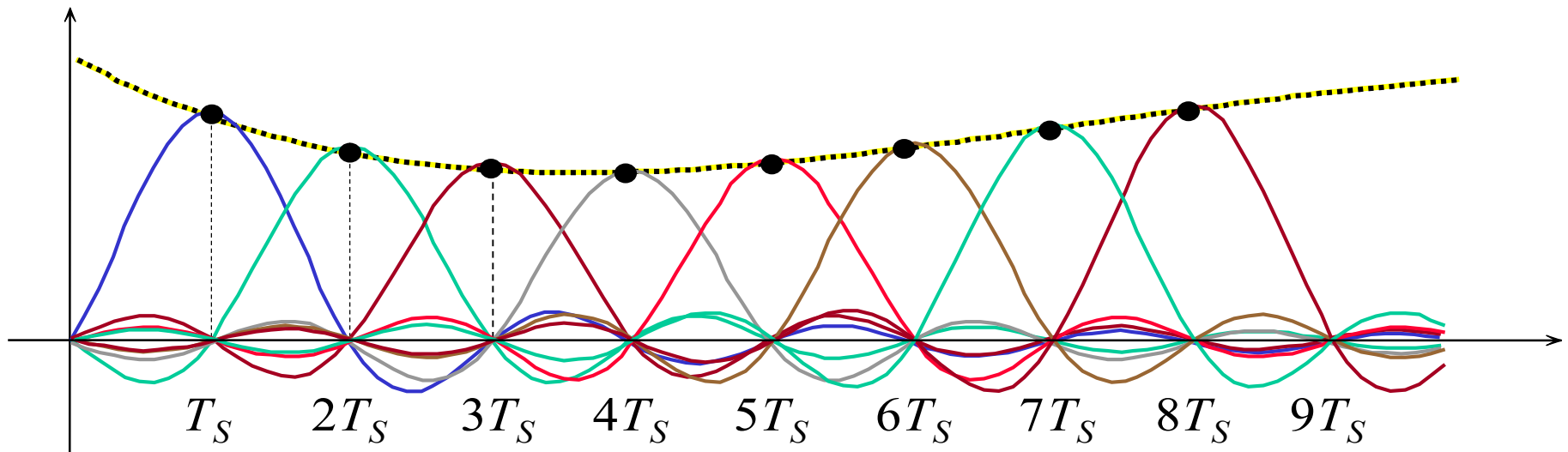
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2W' T_S x_{\alpha}(nT_S) \operatorname{sinc}(2W'(t - nT_S))$$

$$\begin{aligned} W' &= W = \frac{1}{2T_S} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\alpha}(nT_S) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_S} - n\right) \end{aligned}$$

## Γραφική ερμηνεία της ανακατασκευής του αναλογικού σήματος από τα δείγματά του

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_S) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_S} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2W}\right) \operatorname{sinc}\left(2W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right)$$

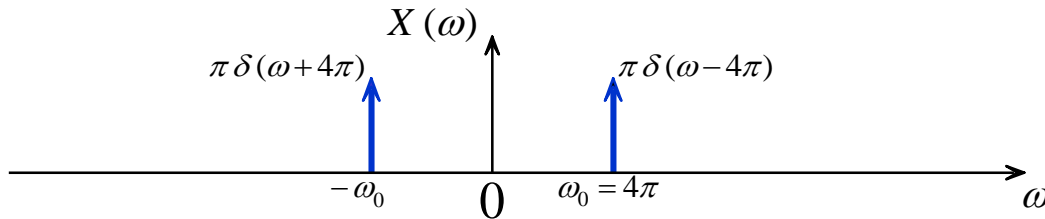
$$x(t) = x_a(T_S) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_S} - 1\right) + x_a(2T_S) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_S} - 2\right) + x_a(3T_S) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_S} - 3\right) + \dots$$



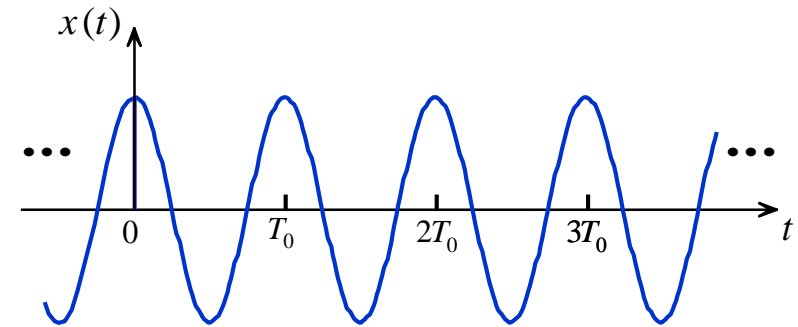
Παρατηρούμε ότι για  $t$  ακέραιο πολλαπλάσιο του  $nT_S$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  μόνο μία sinc συνεισφέρει με πλάτος  $x_a(nT_S)$ , ενώ για  $t \neq nT_S$  συνεισφέρουν όλες.

■ **Παράδειγμα**

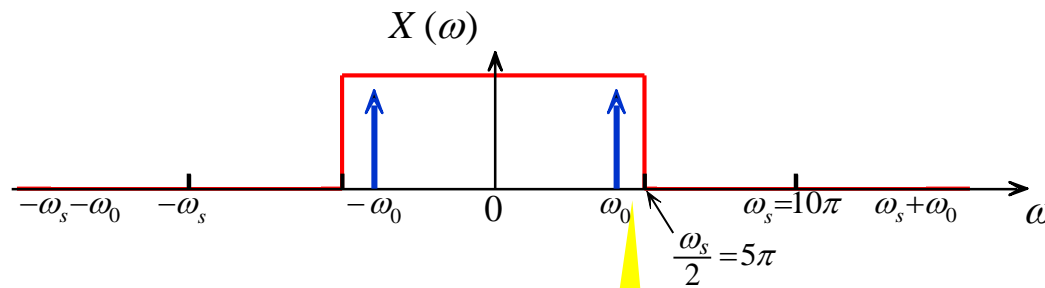
Το αναλογικό σήμα  $x(t) = \cos(4\pi t)$  δειγματοληπτείται με περίοδο δειγματοληψίας  $T_s = 0,2$  sec.



Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ .

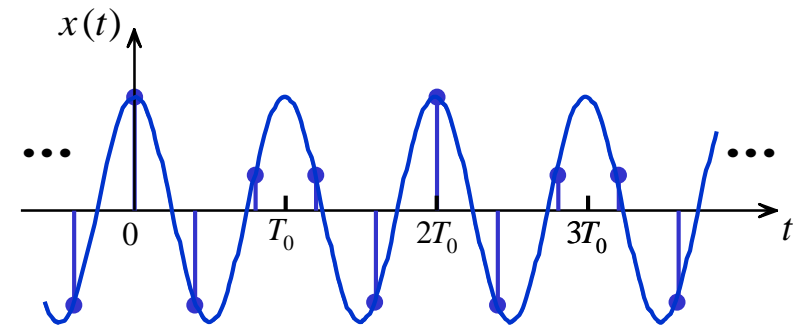


Το σήμα  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ .



Ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος.

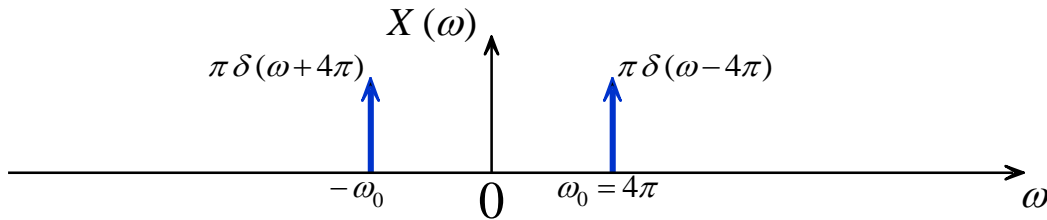
Παρατηρούμε ότι η  $\frac{\omega_s}{2}$  είναι μεγαλύτερη από την  $\omega_0$



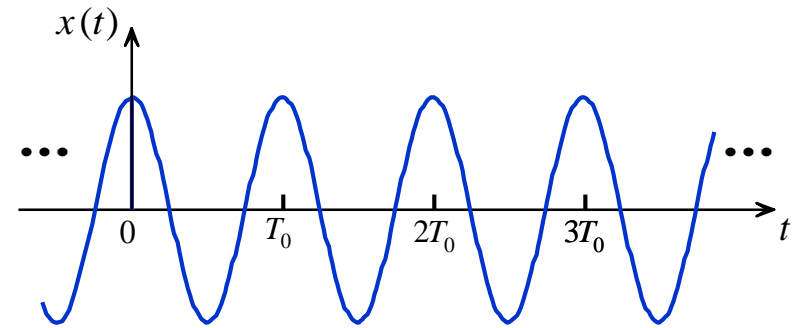
Το δειγματοληπτημένο σήμα.

■ **Παράδειγμα**

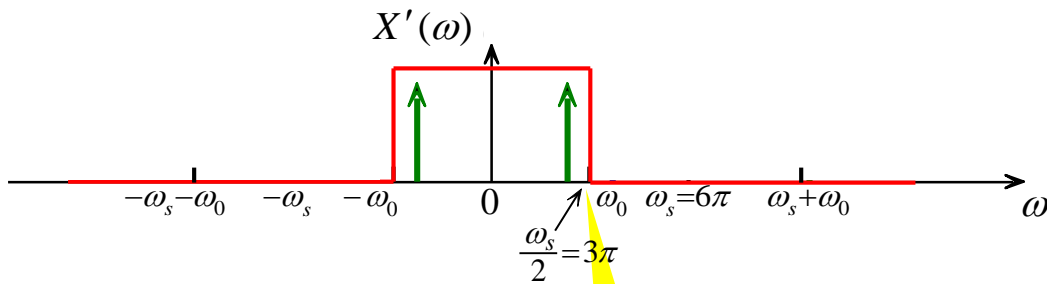
Το αναλογικό σήμα  $x(t) = \cos(4\pi t)$  δειγματοληπτείται με περίοδο δειγματοληψίας  $T_s = 1/3$  sec.



Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ .

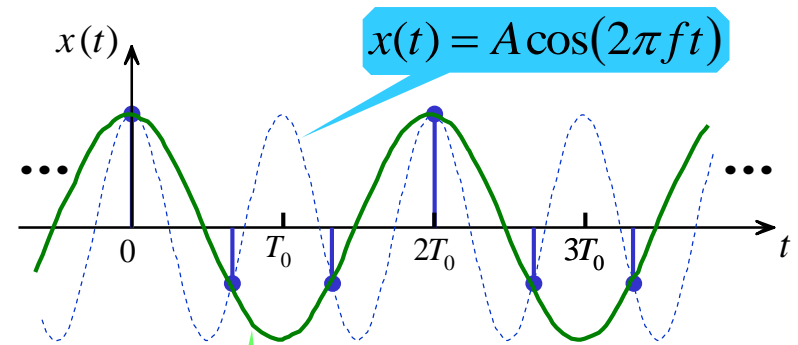


Το σήμα  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ .



Ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος.

Παρατηρούμε ότι η  $\frac{\omega_s}{2}$  είναι μικρότερη από την  $\omega_0$



Το δειγματοληπτημένο σήμα.

$$x'(t) = A \cos[2\pi(F_s - f)t]$$

## Συστήματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Η έξοδος μιας αναλογικής πηγής μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακή μορφή και το μήνυμα να μεταδοθεί με ψηφιακή διαμόρφωση και να αποδιαμορφωθεί ως ψηφιακό σήμα στο δέκτη

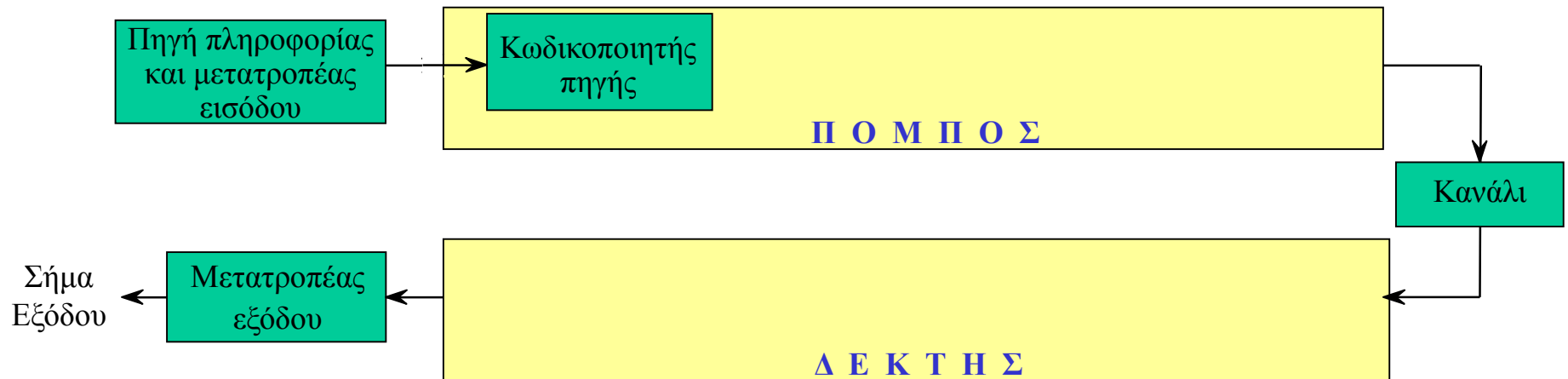
### Πλεονεκτήματα μετάδοσης αναλογικού σήματος με ψηφιακή διαμόρφωση

Ο πιο σημαντικός λόγος είναι ότι η πιστότητα του σήματος ελέγχεται καλύτερα μέσω ψηφιακής μετάδοσης παρά με αναλογική μετάδοση. Ειδικότερα, η ψηφιακή μετάδοση μας επιτρέπει την αναγέννηση του ψηφιακού σήματος μετά από μεγάλες αποστάσεις μετάδοσης εξαλείφοντας πρακτικά σε κάθε σημείο αναγέννησης τις επιδράσεις του θορύβου. Αντίθετα, ο θόρυβος που προστίθεται στην αναλογική μετάδοση ενισχύεται μαζί με το σήμα όταν χρησιμοποιούμε περιοδικά ενισχυτές για την ανύψωση της στάθμης του σήματος κατά τη μετάδοση σε μεγάλες αποστάσεις.

Ένας άλλος λόγος για να προτιμάμε την ψηφιακή μετάδοση αντί της αναλογικής είναι ότι το αναλογικό σήμα μηνύματος μπορεί να περιέχει ένα υψηλό “πλεονασμό”. Με τη ψηφιακή επεξεργασία ο πλεονασμός θα μπορούσε να απομακρυνθεί πριν τη διαμόρφωση, μετριάζοντας έτσι το απαιτούμενο εύρος-ζώνης του καναλιού.

Ένας τρίτος πρόσθετος λόγος είναι ότι η κατασκευή των ψηφιακών συστημάτων κοστίζει συχνά λιγότερο.

## Βασικά στοιχεία ενός συστήματος ψηφιακής επικοινωνίας



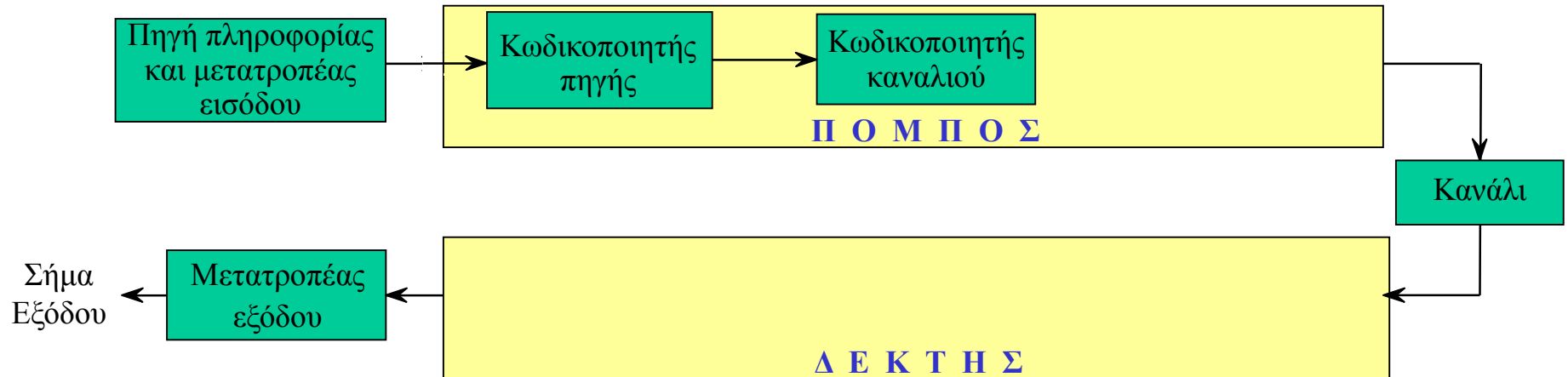
Σε ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας τα μηνύματα που παράγονται από την πηγή, σύμβολα ή επιτρεπόμενες στάθμες, μετατρέπονται συνήθως σε μια ακολουθία δυαδικών ψηφίων. Η διαδικασία της **αποδοτικής μετατροπής** της εξόδου μίας αναλογικής ή ψηφιακής πηγής, σε ακολουθία δυαδικών ψηφίων καλείται **κωδικοποίηση πηγής** ή **συμπίεση δεδομένων**.

Στον **κώδικα Morse** τα γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου αναπαράστησε με μία ακολουθία από τελείες και παύλες (δηλαδή από κωδικές λέξεις).

A	· —	N	— ·	1	· — — — —
B	— · · ·	O	— — — —	2	· · — — —
C	— · — ·	P	· — — ·	3	· · · — —
D	— · ·	Q	— — · —	4	· · · · —
E	·	R	· — ·	5	· · · · ·
F	· · — ·	S	· · ·	6	— · · · ·
G	— — ·	T	—	7	— — — · ·
H	· · · ·	U	· · —	8	— — — — ·
I	· ·	V	· · · —	9	— — — — ·
J	· — — —	W	· — —	0	— — — — —
K	— · —	X	— · · —		
L	· — · ·	Y	— · — —		
M	— —	Z	— — · ·		

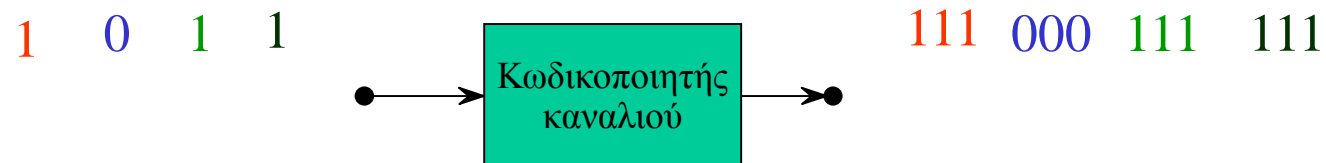


## Βασικά στοιχεία ενός συστήματος ψηφιακής επικοινωνίας

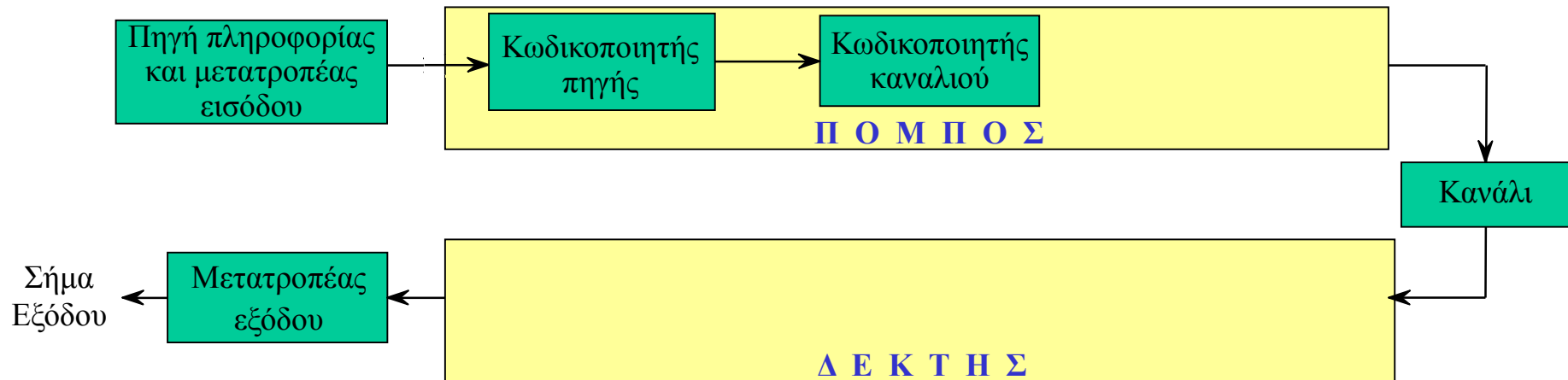


Ο ρόλος του **κωδικοποιητή καναλιού** είναι να εισάγει, κατά έναν ελεγχόμενο τρόπο, κάποιο πλεονασμό στη δυαδική ακολουθία πληροφορίας ο οποίος να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο δέκτη για να κατανικήσει τις επιδράσεις του θορύβου. Έτσι αυξάνεται η αξιοπιστία των λαμβανομένων δεδομένων.

Ένας (τετριμμένος) τρόπος κωδικοποίησης μίας δυαδικής ακολουθίας πληροφορίας είναι απλώς η επανάληψη κάθε δυαδικού ψηφίου  $m$  φορές, όπου  $m$  θετικός ακέραιος

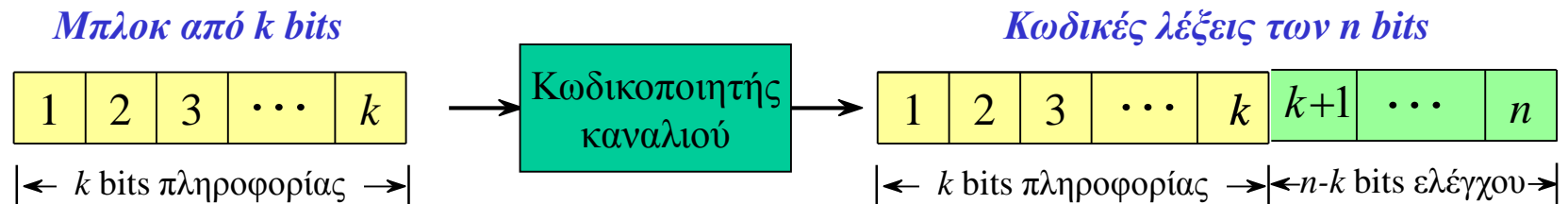


## Βασικά στοιχεία ενός συστήματος ψηφιακής επικοινωνίας



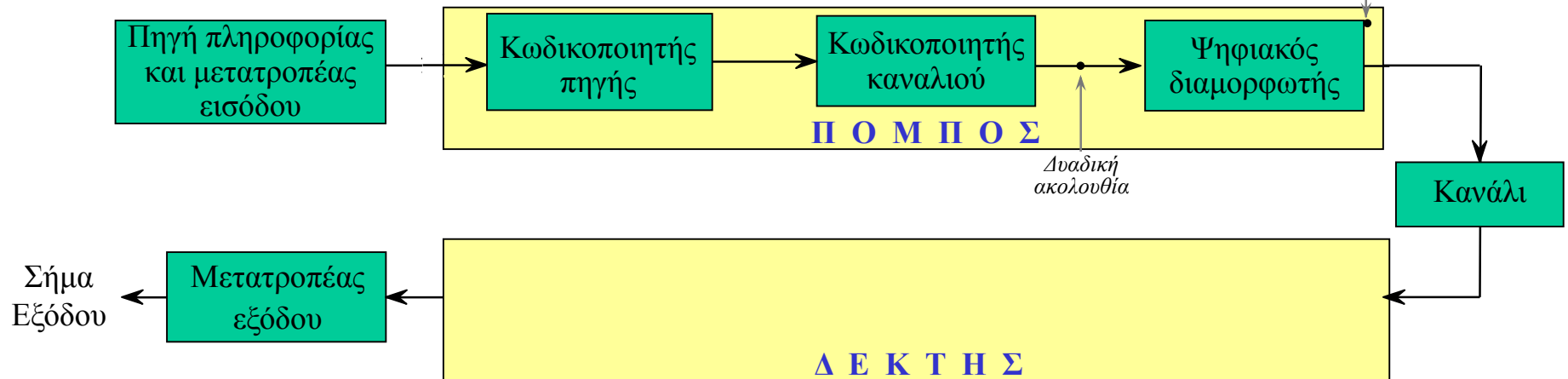
Ο ρόλος του **κωδικοποιητή καναλιού** είναι να εισάγει, κατά έναν ελεγχόμενο τρόπο, κάποιο πλεονασμό στη δυαδική ακολουθία πληροφορίας ο οποίος να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο δέκτη για να κατανικήσει τις επιδράσεις του θορύβου. Έτσι αυξάνεται η αξιοπιστία των λαμβανομένων δεδομένων.

Ένας πιο σύνθετος κωδικοποιητής λαμβάνει  $k$  bits πληροφορίας κάθε φορά και απεικονίζει κάθε ακολουθία των  $k$ -bits σε μία ενιαία ακολουθία  $n$ -bits ( $n > k$ ), καλούμενη **κωδική λέξη**.

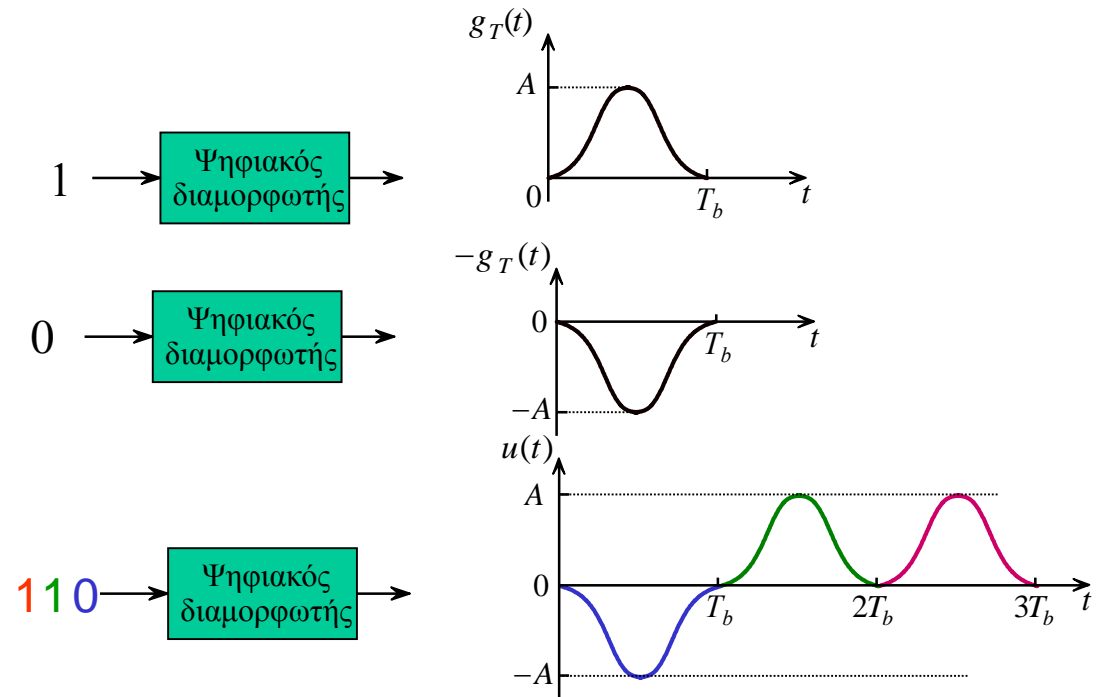


## Βασικά στοιχεία ενός συστήματος ψηφιακής επικοινωνίας

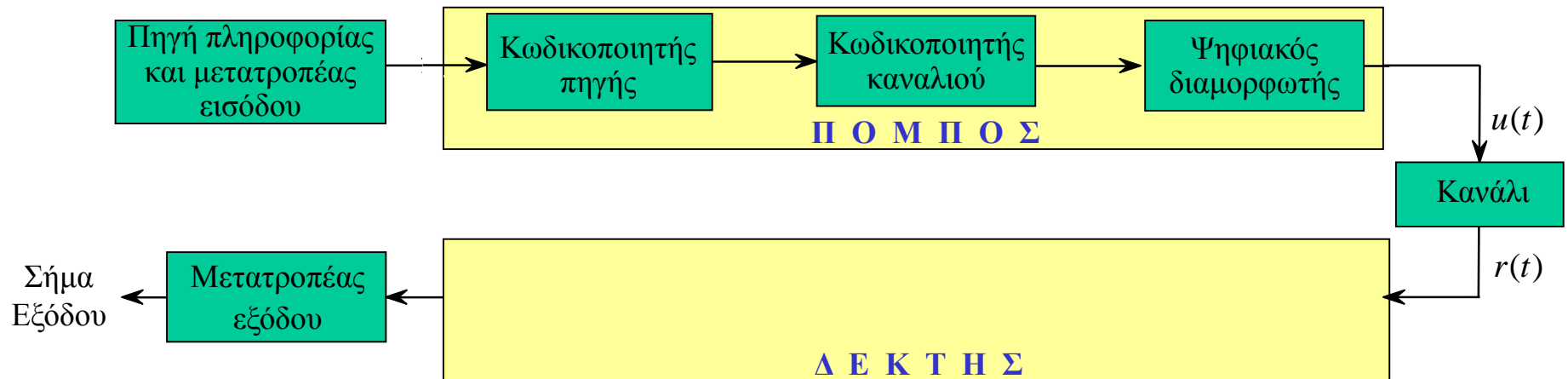
Αναλογικό  
σήμα



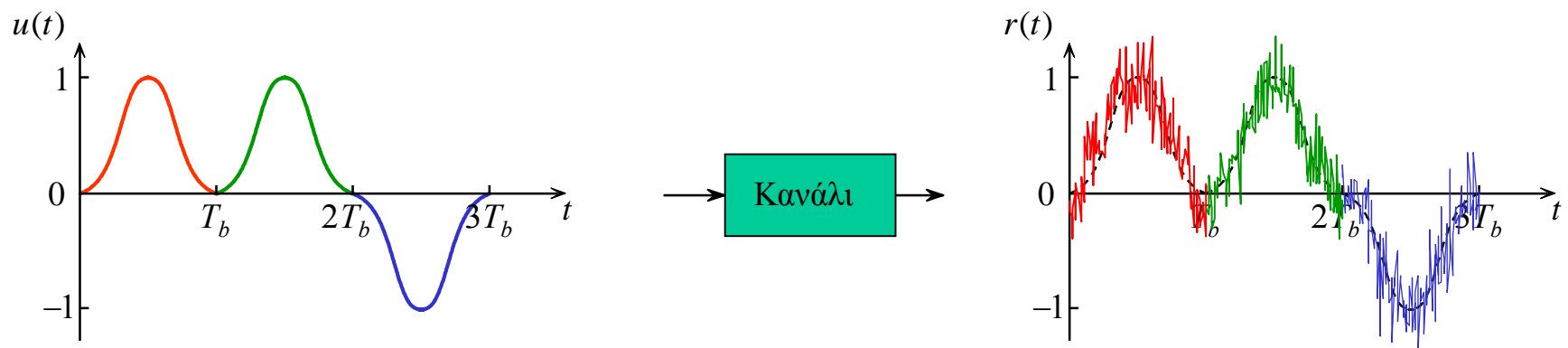
Επειδή σχεδόν όλα τα κανάλια επικοινωνίας που συναντάμε στην πράξη είναι ικανά να μεταδίδουν ηλεκτρικά σήματα (κυματομορφές), ο πρωταρχικός ρόλος του **ψηφιακού διαμορφωτή** είναι να απεικονίζει τις δυαδικές ακολουθίες σε κυματομορφές σήματος. Ο ψηφιακός διαμορφωτής απεικονίζει το **δυαδικό ψηφίο 0** στην κυματομορφή  $s_0(t)$  και το **δυαδικό ψηφίο 1** στην κυματομορφή  $s_1(t)$ .



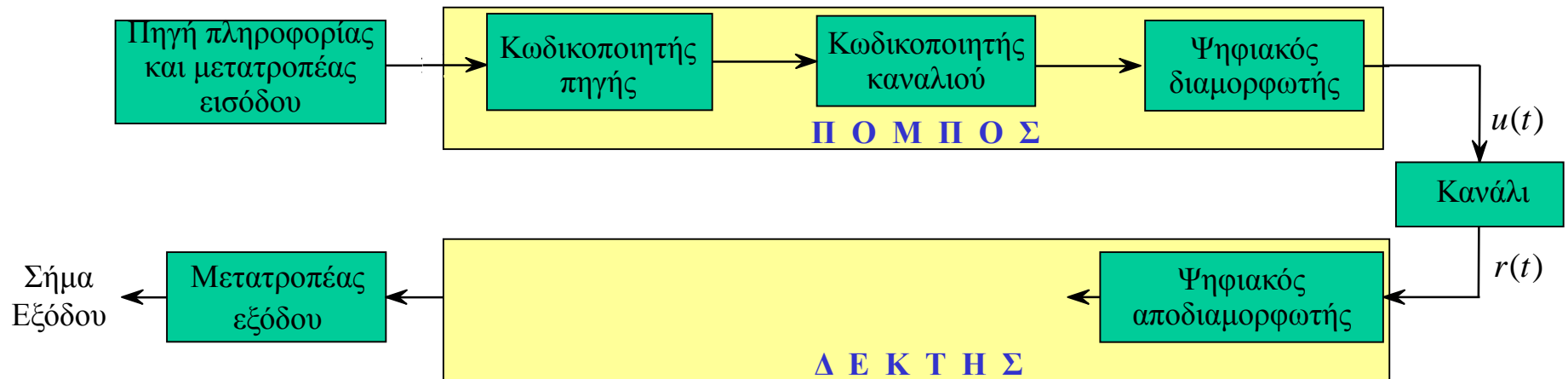
## Βασικά στοιχεία ενός συστήματος ψηφιακής επικοινωνίας



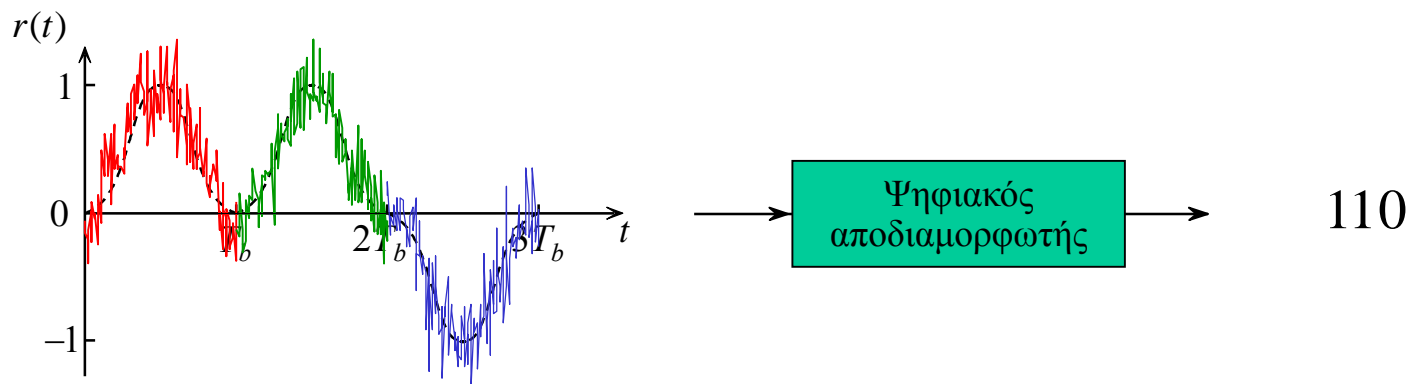
Οποιοδήποτε και αν είναι το φυσικό μέσο για τη μετάδοση του σήματος, το κύριο χαρακτηριστικό είναι ότι το μεταδιδόμενο σήμα αλλοιώνεται κατά τυχαίο τρόπο από μία ποικιλία πιθανών μηχανισμών. Η πιο συνήθης μορφή υποβάθμισης του σήματος προέρχεται από έναν προσθετικό θόρυβο ο οποίος συχνά καλείται **θερμικός θόρυβος**.



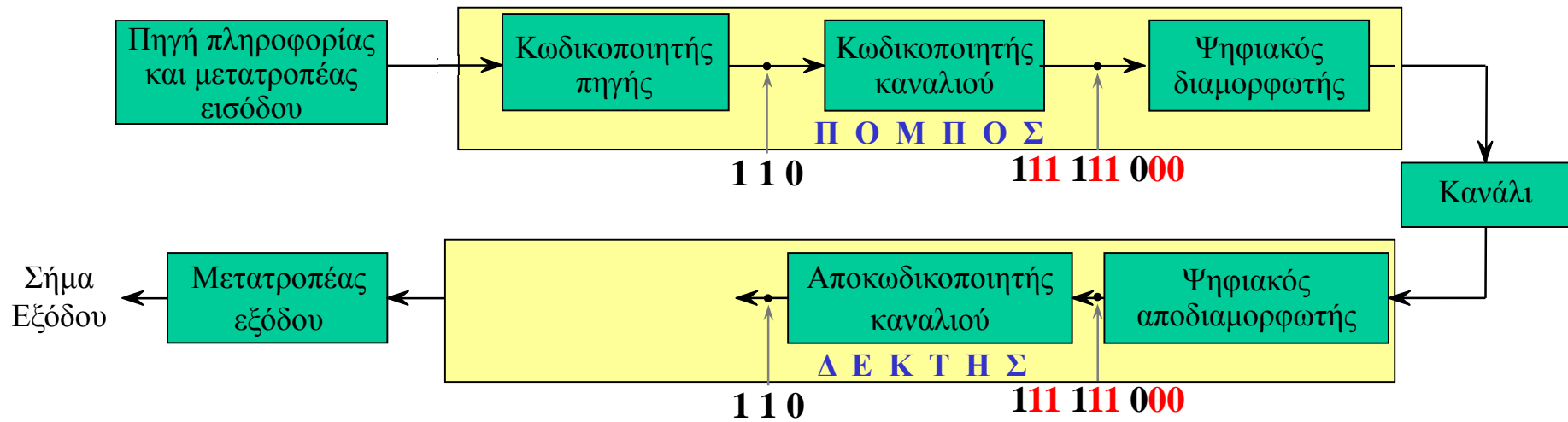
## Βασικά στοιχεία ενός συστήματος ψηφιακής επικοινωνίας



Στο άλλο άκρο της λήψης ενός ψηφιακού συστήματος επικοινωνίας, ο *ψηφιακός αποδιαμορφωτής* επεξεργάζεται τις αλλοιωμένες από το κανάλι διαβιβασμένες κυματομορφές και εκτιμά το διαβιβασμένο δυαδικό ψηφίο.

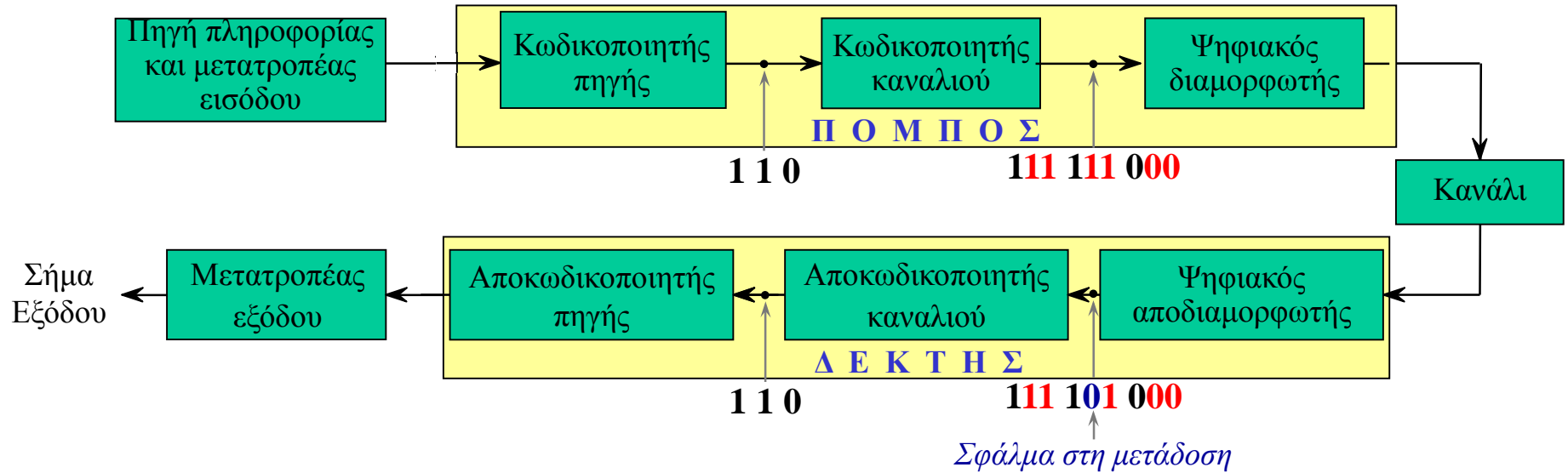


## Βασικά στοιχεία ενός συστήματος ψηφιακής επικοινωνίας



**Ο προστιθέμενος πλεονασμός** στην ακολουθία πληροφορίας χρησιμοποιείται από τον **αποκωδικοποιητή καναλιού** στην αποκωδικοποίηση της επιθυμητής ακολουθίας πληροφορίας.

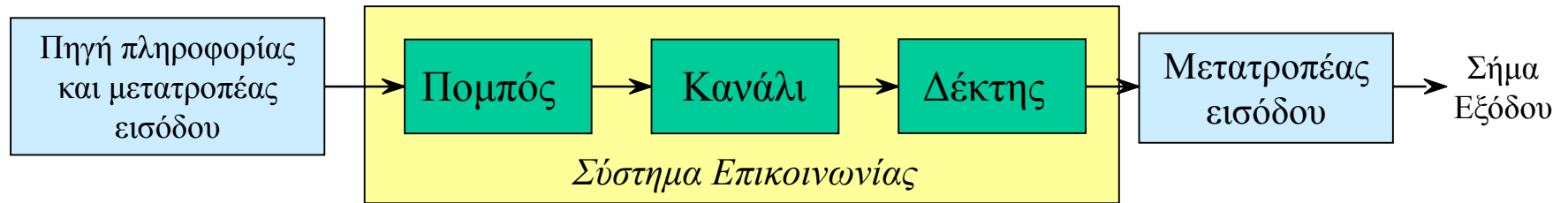
## Βασικά στοιχεία ενός συστήματος ψηφιακής επικοινωνίας



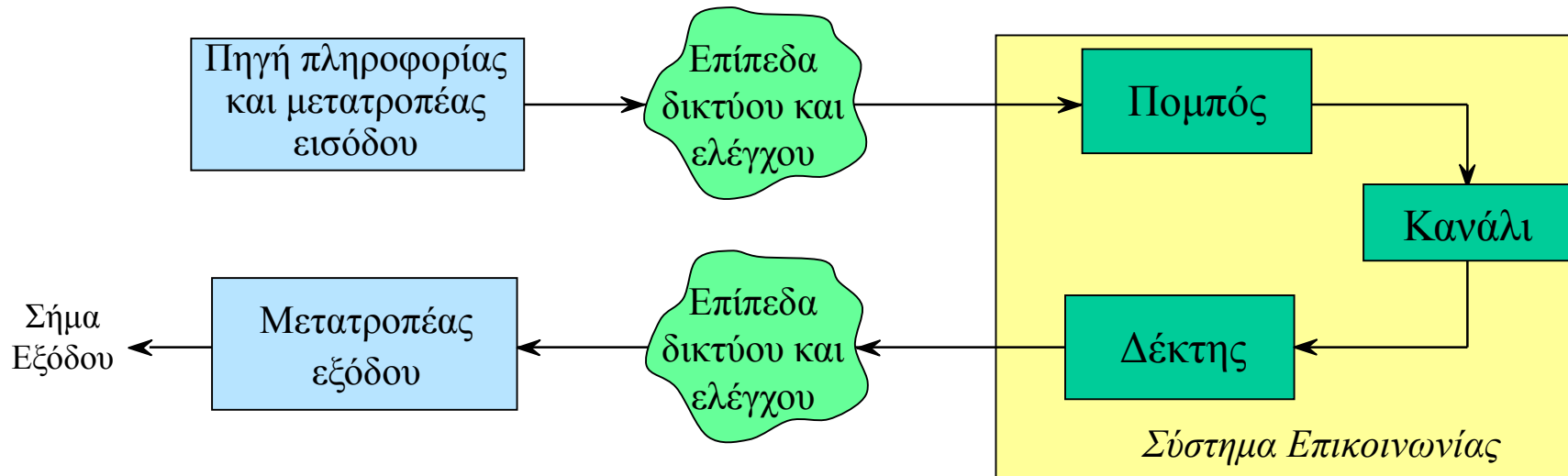
**Ο προστιθέμενος πλεονασμός** στην ακολουθία πληροφορίας χρησιμοποιείται από τον **αποκωδικοποιητή καναλιού** στην αποκωδικοποίηση της επιθυμητής ακολουθίας πληροφορίας. Έτσι, ο προστιθέμενος πλεονασμός χρησιμεύει στο να αυξήσει την αξιοπιστία των λαμβανόμενων δεδομένων και **να βελτιώνει την πιστότητα του λαμβανόμενου σήματος**.

Ο **αποκωδικοποιητής της πηγής** δέχεται την ακολουθία εξόδου του αποκωδικοποιητή καναλιού και γνωρίζοντας την μέθοδο που χρησιμοποιείται για την κωδικοποίηση της πηγής προσπαθεί να ανακατασκευάσει όσο γίνεται πιστότερα το αρχικό αναλογικό σήμα της πηγής.

Τα συστήματα ψηφιακής επικοινωνίας μπορούν να μεταδώσουν δεδομένα με διαφορετικούς **ρυθμούς μετάδοσης** (*transmission rate*). Ο ρυθμός μετάδοσης μιας ζεύξης μετρείται σε bits/sec.



Τα περισσότερα συστήματα επικοινωνίας, όπως το διαδίκτυο και τα συστήματα κινητής τηλεφωνίας, περιλαμβάνουν μεγάλο αριθμό πομπών και δεκτών, οι οποίοι πρέπει να χρησιμοποιούν από κοινού το ίδιο φυσικό μέσο. Τα *επίπεδα δικτύου και ελέγχου* (*network and control layers*) εξασφαλίζουν την αξιόπιστη και αποτελεσματική χρησιμοποίηση του ίδιου φυσικού μέσου από πολλά τερματικά.



Διάγραμμα λειτουργικών βαθμίδων ενός συστήματος επικοινωνίας



## Διαδικασία Ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt

Για ένα σύνολο  $M$  κυματομορφών σήματος  $s_m(t)$ ,  $1 \leq m \leq M$  κατασκευάζεται μια ορθοκανονική βάση. Η πρώτη κυματομορφή κατασκευάζεται ως

$$\psi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}$$

το  $\psi_1(t)$  είναι το  $s_1(t)$  κανονικοποιημένο σε μοναδιαία ενέργεια.

Η προβολή του  $s_2(t)$  στο  $\psi_1(t)$  είναι  $c_{21} \psi_1(t)$  όπου  $c_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \psi_1(t) dt$

Το ορθογώνιο σήμα στο  $\psi_1(t)$  σήμα είναι  $d_2(t) = s_2(t) - c_{21} \psi_1(t)$  με ενέργεια  $E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d_2^2(t) dt$

Έτσι η δεύτερη κανονικοποιημένη ως προς την ενέργεια κυματομορφή που είναι ορθογώνια στην  $\psi_1(t)$  είναι η

$$\psi_2(t) = \frac{d_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

Η διαδικασία ορθογωνοποίησης συνεχίζεται έως ότου εξαντληθούν όλες οι  $M$  κυματομορφές σήματος και κατασκευαστούν  $N \leq M$  ορθοκανονικές κυματομορφές οι οποίες σχηματίζουν μια βάση στο  $N$ -διάστατο χώρο σημάτων.

Από τη στιγμή που έχουμε κατασκευάσει το σύνολο των  $N$  ορθογώνιων κυματομορφών  $\{\psi_n(t)\}$ , μπορούμε να εκφράσουμε τα  $M$  σήματα  $\{s_m(t)\}$  ως γραμμικούς συνδυασμούς των  $\{\psi_n(t)\}$ .

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^N s_{mn} \psi_n(t), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

όπου

$$s_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) \psi_n(t) dt$$

και

$$E_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t) dt = \sum_{n=1}^N s_{mn}^2, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Κάθε κυματομορφή μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα

$$\mathbf{s}_m = (s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN}), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

ή ισοδύναμα, ως ένα σημείο στο  $N$ -διάστατο χώρο σημάτων, ο οποίος καλύπτεται από τις  $N$  ορθοκανονικές κυματομορφές  $\{\psi_n(t)\}$ , με συντεταγμένες  $\{s_{mi}, i=1, 2, \dots, N\}$

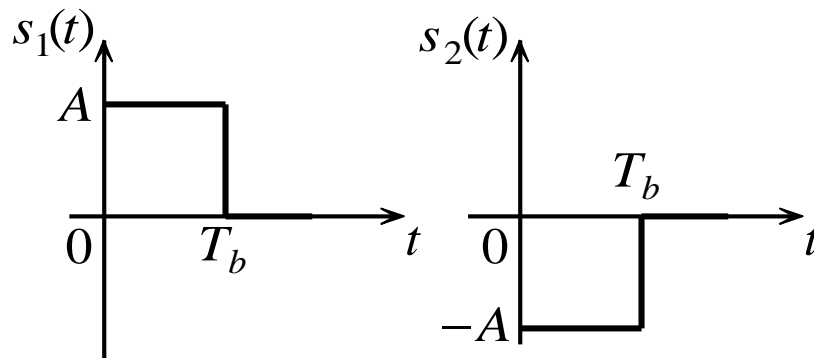
Η ενέργεια της  $m$ -στης κυματομορφής σήματος είναι απλά το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος ή, ισοδύναμα, το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης από την αρχή των αξόνων στο σημείο του  $N$ -διάστατου χώρου.

## Διαμόρφωση παλμών κατά πλάτος (Pulse Amplitude Modulation – (PAM))

Η πληροφορία μεταφέρεται από το πλάτος του μεταδιδόμενου σήματος

### Σήματα βασικής ζώνης

Στο δυαδικό PAM, το bit πληροφορίας 1 αντιπροσωπεύεται από ένα παλμό πλάτους  $A$  και το bit πληροφορίας 0 αντιπροσωπεύεται από το παλμό  $-A$ .



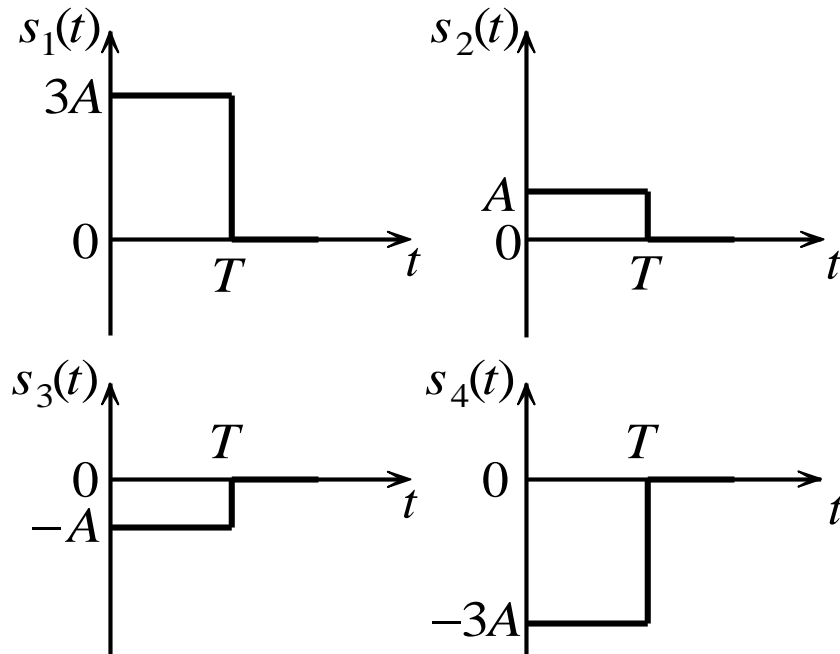
Σήματα δυαδικού PAM.

Ο τύπος αυτός της σηματοδοσίας καλείται επίσης και **δυαδική αντίποδη σηματο-δοσία**.

Οι παλμοί εκπέμπονται με ρυθμό  $R_b = 1/T_b$  bits/sec όπου  $T_b$  καλείται διάρκεια του bit.

Το σχήμα του παλμού καθορίζει τα φασματικά χαρακτηριστικά του εκπεμπόμενου σήματος.

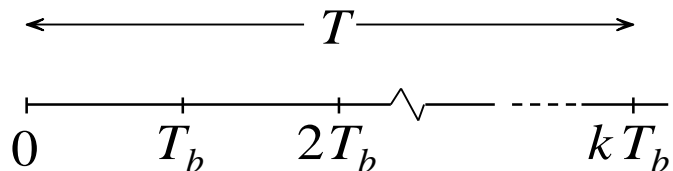
Στο  $M$ -αδικό PAM αντί να εκπέμπεται ένα bit τη φορά, η δυαδική ακολουθία πληροφορίας χωρίζεται σε μπλοκ των  $k$  bits, τα οποία καλούνται σύμβολα, και κάθε μπλοκ, ή σύμβολο, αντιπροσωπεύεται από μία εκ των  $M = 2^k$  τιμών παλμούς παλμού.



$M=4$  κυματομορφές σήματος PAM.

Σημειώστε ότι όταν ο ρυθμός των bits,  $R_b$ , είναι σταθερός, η διάρκεια συμβόλου είναι

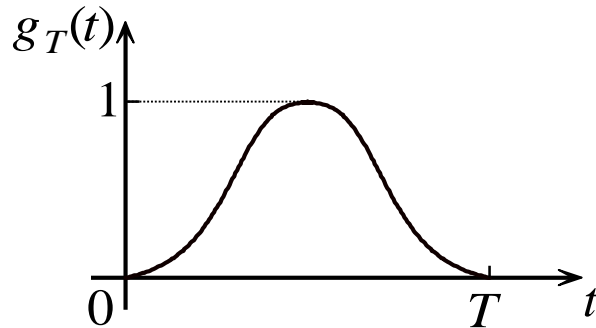
$$T = \frac{k}{R_b} = k T_b$$



Σχέση μεταξύ διάρκειας συμβόλου και διάρκειας bit.

Οι  $M$ -αδικές κυματομορφές σήματος PAM μπορούν να εκφραστούν ως

$$s_m(t) = A_m g_T(t), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T$$



Παλμός σήματος για PAM.

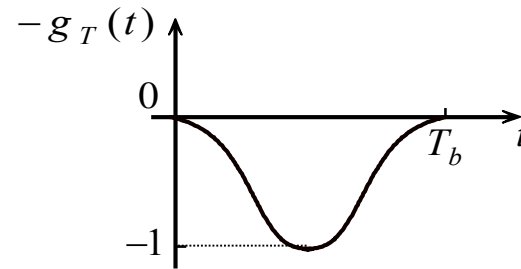
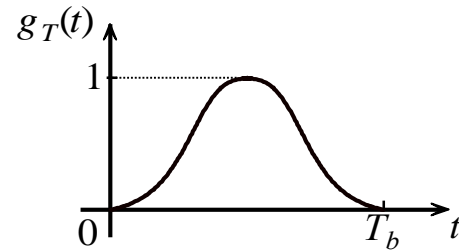
Παρατηρούμε ότι το χαρακτηριστικό που διαφοροποιεί τα  $M$  σήματα είναι το πλάτος του παλμού και ότι όλα τα  $M$  σήματα έχουν το ίδιο σχήμα παλμού.

Τα σήματα έχουν διαφορετικές ενέργειες, πράγματι,

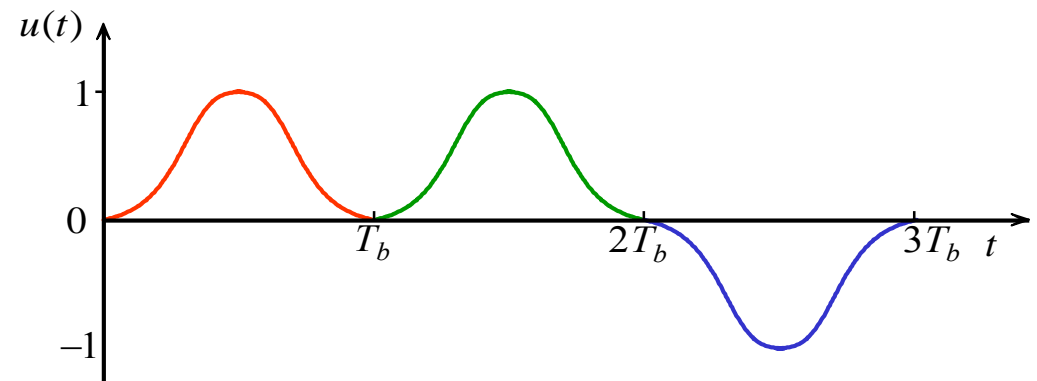
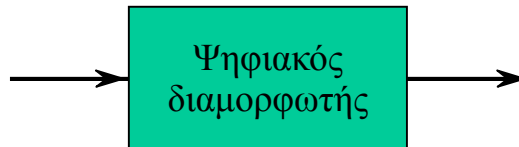
$$E_m = \int_0^T s_m^2(t) dt = A_m^2 \int_0^T g_T^2(t) dt = A_m^2 E_g, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

όπου  $E_g$  είναι η ενέργεια του παλμού  $g_T(t)$ .

## Διαμόρφωση Παλμών κατά Πλάτος (Pulse Amplitude Modulation (PAM))



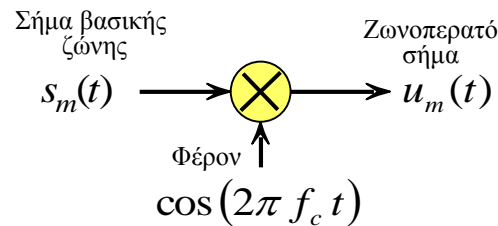
1 1 0



## Ζωνοπερατά Σήματα

Από ένα σύνολο ορθογώνιων κυματομορφών βασικής ζώνης  $s_m(t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , κατασκευάζουμε  $M$  ζωνοπερατά σήματα ως

$$u_m(t) = s_m(t) \cos(2\pi f_c t), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad 0 \leq t \leq T$$



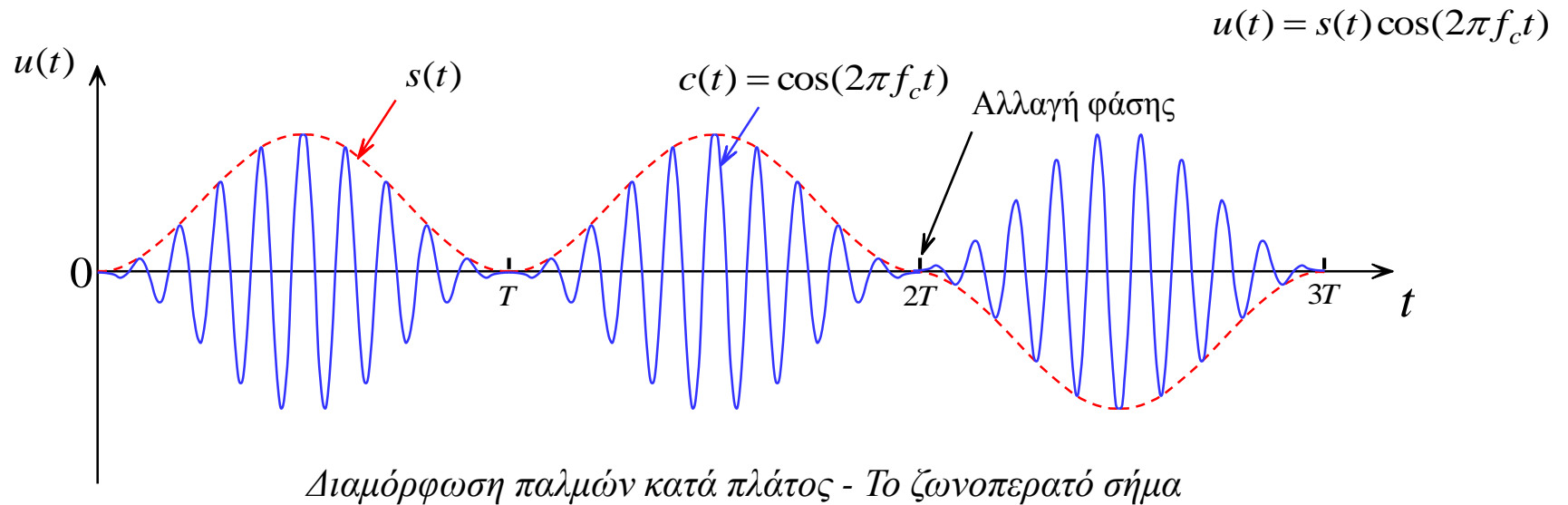
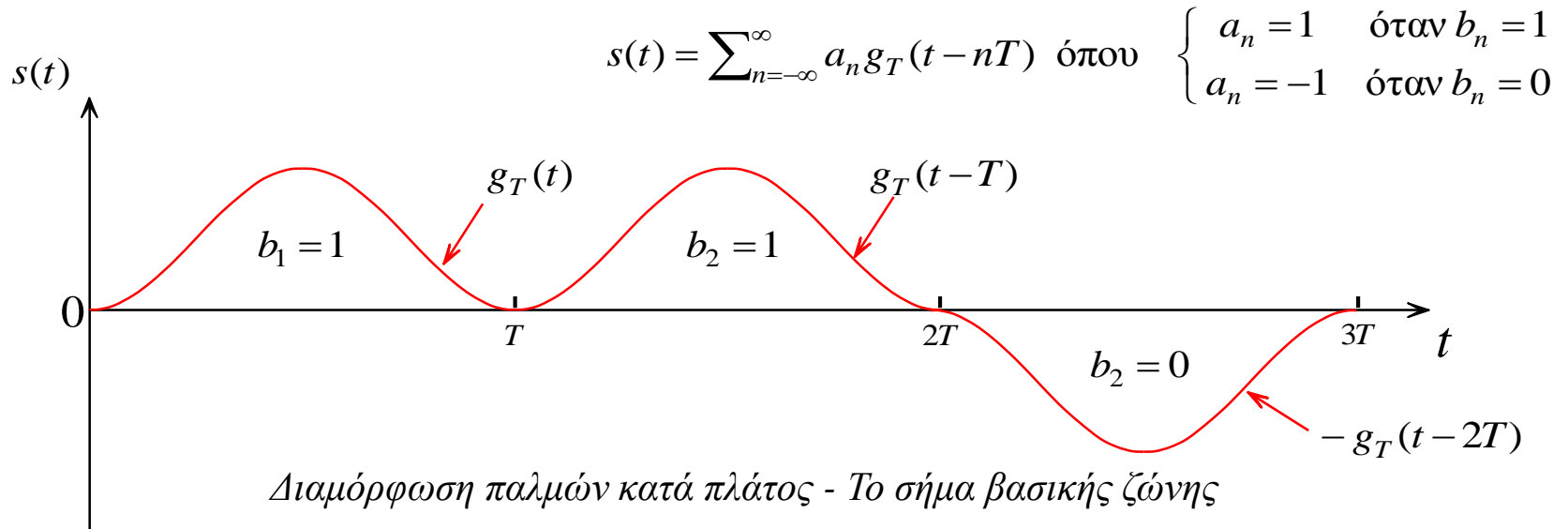
*Διαμόρφωση κατά πλάτος ενός ημιτονοειδούς φέροντος από σήμα βασικής-ζώνης.*

Η ενέργεια της κάθε μιας από τις ζωνοπερατές κυματομορφές είναι το μισό της ενέργειας της αντίστοιχης κυματομορφής βασικής ζώνης.

Οι ζωνοπερατές κυματομορφές είναι ορθογώνιες. Πράγματι, αν  $m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_0^T u_m(t) u_n(t) dt &= \int_0^T s_m(t) s_n(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T s_m(t) s_n(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T s_m(t) s_n(t) \cos(4\pi f_c t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

## Περιγραφή στο χρονικό πεδίο

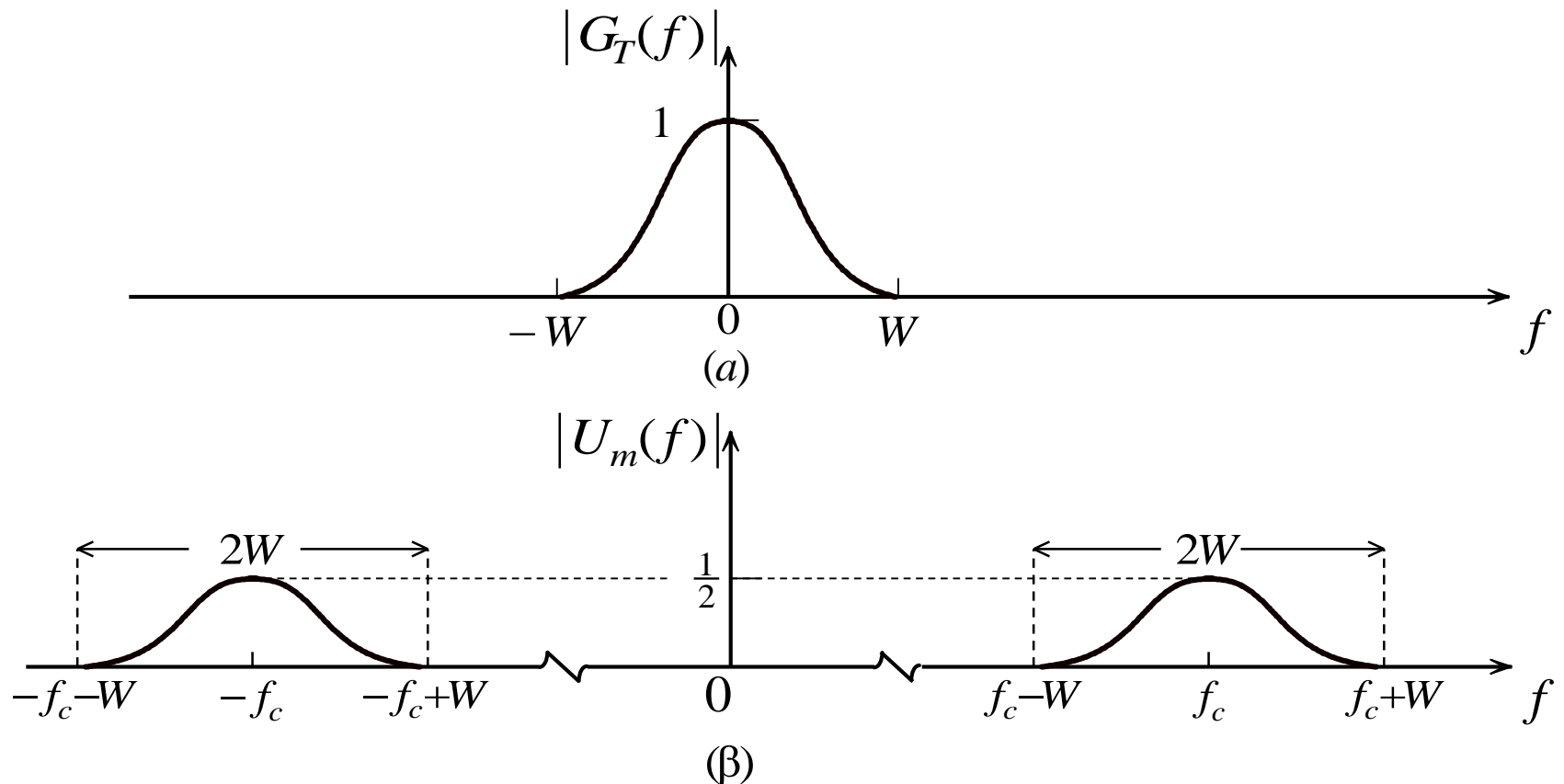




## Περιγραφή στο πεδίο συχνότητας

Η διαμόρφωση κατά πλάτος του φέροντος από τις κυματομορφές βασικής ζώνης ολισθαίνει το φάσμα του σήματος βασικής ζώνης κατά  $f_c$

$$U_m(f) = \frac{A_m}{2} [G_T(f - f_c) + G_T(f + f_c)]$$

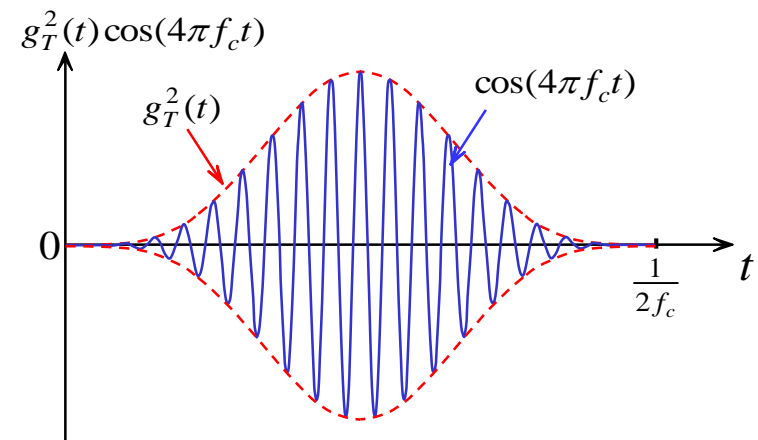


Φάσματα σημάτων (α) βασικής ζώνης και (β) διαμορφωμένου κατά πλάτος.

Το διαμορφωμένο κατά πλάτος DSB-SC σήμα καταλαμβάνει ένα εύρος-ζώνης καναλιού ίσο με  $2W$ , το οποίο είναι διπλάσιο του εύρους ζώνης που απαιτείται για τη μετάδοση του σήματος βασικής-ζώνης.

Η ενέργεια των ζωνοπερατών κυματομορφών σήματος  $u_m(t)$ ,  $m=1, 2, \dots, M$  είναι

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{-\infty}^{\infty} u_m^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A_m^2 g_T^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt \\ &= \frac{A_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt + \frac{A_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) \cos(4\pi f_c t) dt \\ &= \frac{A_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \frac{A_m^2}{2} E_g \end{aligned}$$



Όπου  $E_s$  δηλώνει την ενέργεια ανά σήμα ή ανά σύμβολο.

Η ενέργεια του ζωνοπερατού σήματος είναι το μισό της ενέργειας του σήματος βασικής ζώνης.

Όταν το σήμα του παλμού  $g_T(t)$  είναι ορθογώνιο, δηλαδή,

$$g_T(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E_g}{T}}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα συνήθως καλείται **μεταλλαγή ολίσθησης (μετατόπισης) πλάτους** (*Amplitude-Shift Keying (ASK)*).

## Γεωμετρική Αναπαράσταση Σημάτων PAM

Οι  $M$ -αδικές κυματομορφές σήματος PAM μπορούν να εκφραστούν ως

$$s_m(t) = A_m g_T(t), \quad m = 1, 2, \dots, M = 2^k, \quad 0 \leq t \leq T$$

Οι κυματομορφές  $M$ -αδικού PAM είναι μονοδιάστατα σήματα, τα οποία μπορούν να εκφραστούν ως

$$s_m(t) = s_m \psi(t), \quad m = 1, 2, \dots, M = 2^k$$

Όπου η συνάρτηση βάσης  $\psi(t)$  ορίζεται ως

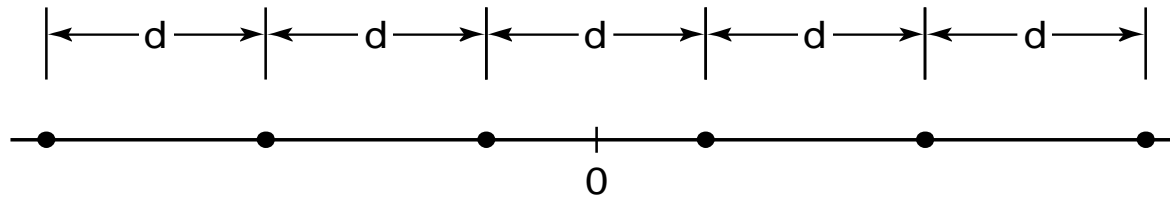
$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{E_g}} g_T(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$E_g$  είναι η ενέργεια του παλμού σήματος  $g_T(t)$  και οι συντελεστές σήματος (μονοδιάστατα διανύσματα) είναι απλά

$$s_m = \sqrt{E_g} A_m, \quad m = 1, 2, \dots, M = 2^k$$

Μία σημαντική παράμετρος είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο σημάτων σήματος

$$d_{mn} = \sqrt{|s_m - s_n|^2} = \sqrt{E_g (A_m - A_n)^2}$$



Σημεία σήματος (αστερισμός) για συμμετρικό PAM

Έχουμε υποθέσει ότι τα πλάτη των σημάτων είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων και ισαπέχοντα, δηλαδή,

$$A_m = (2m - 1 - M), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Παρατηρούμε ότι τα σήματα PAM έχουν διαφορετικές ενέργειες.

$$E_m = s_m^2 = E_g A_m^2, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Για ισοπίθανα σήματα, η μέση ενέργεια είναι

$$E_{av} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m = \frac{E_g}{M} \sum_{m=1}^M A_m^2 \stackrel{A_m=(2m-1-M)}{=} \frac{E_g}{M} \sum_{m=1}^M (2m-1-M)^2 = E_g \frac{M^2-1}{3}$$

Όταν τα PAM σήματα βασικής ζώνης διαμορφώνουν ένα φέρον οι ζωνοπερατές κυματομορφές σήματος  $u_m(t)$  μπορούν να εκφραστούν ως

$$u_m(t) = s_m \psi(t), \quad m = 1, 2, \dots, M = 2^k$$

Όπου η κυματομορφή  $\psi(t)$  ορίζεται ως

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t)$$

και

$$s_m = \sqrt{\frac{E_g}{2}} A_m, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

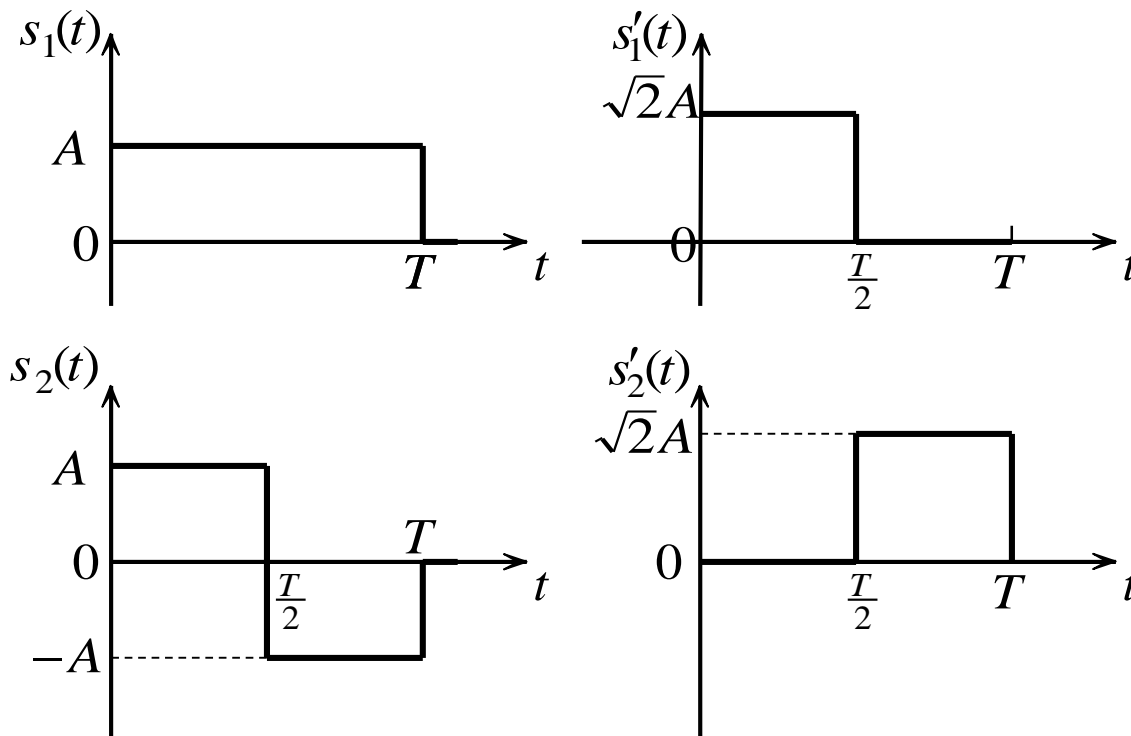
Η μόνη αλλαγή στη γεωμετρική αναπαράσταση των ζωνοπερατών PAM σημάτων, συγκριτικά μ' αυτή των σημάτων βασικής ζώνης, είναι ο παράγοντας  $\sqrt{2}$  ο οποίος εμφανίζεται στις εξισώσεις

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{1}{E_g}} g_T(t) \quad s_m = \sqrt{E_g} A_m, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

## Δισδιάστατες Κυματομορφές Σήματος

Δύο κυματομορφές σήματος  $s_1(t)$  και  $s_2(t)$  είναι ορθογώνιες στο διάστημα  $(0, T)$  όταν

$$\int_0^T s_1(t) s_2(t) dt = 0$$



*Δύο σύνολα ορθογωνίων σημάτων.*

Και τα δύο ζεύγη σημάτων ικανοποιούν την ιδιότητα ορθογωνιότητας και επίσης έχουν την ίδια ενέργεια, δηλαδή,

$$E = \int_0^T s_1^2(t) dt = \int_0^T s_2^2(t) dt = \int_0^T [s'_1]^2(t) dt = \int_0^T [s'_2]^2(t) dt = A^2 T$$

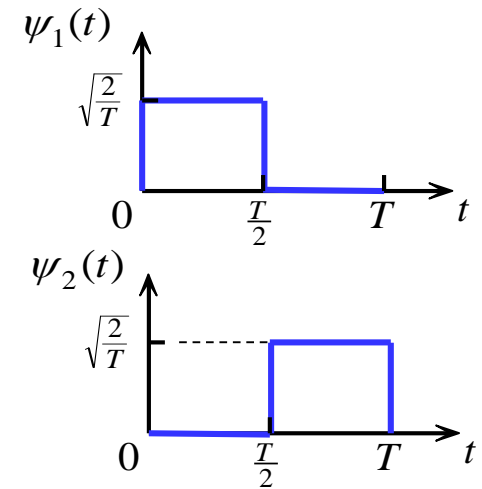
Οποιοδήποτε ζεύγος από αυτά τα σήματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μετάδοση δυαδικής πληροφορίας με μία κυματομορφή να αντιστοιχεί στο bit 1 και την άλλη κυματομορφή στο bit 0.



Αν επιλέξουμε ως συναρτήσεις βάσης τις ορθογωνίου σχήματος συναρτήσεις μοναδιαίας ενέργειας

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T}, & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T}, & T/2 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Οι δύο κυματομορφές σήματος  $s_1(t)$  και  $s_2(t)$  μπορούν να εκφραστούν ως

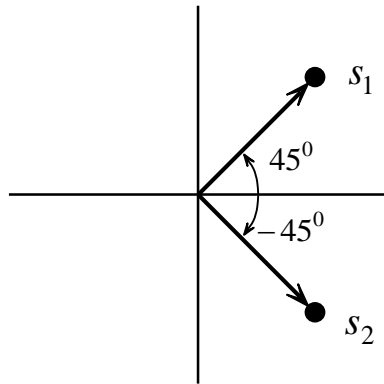
$$s_1(t) = s_{11} \psi_1(t) + s_{12} \psi_2(t)$$

$$s_2(t) = s_{21} \psi_1(t) + s_{22} \psi_2(t)$$

ή με διανυσματική αναπαράσταση

$$\mathbf{s}_1 = (s_{11}, s_{12}) = (A\sqrt{T/2}, A\sqrt{T/2})$$

$$\mathbf{s}_2 = (s_{21}, s_{22}) = (A\sqrt{T/2}, -A\sqrt{T/2})$$



Τα δύο διανύσματα σήματος που αντιστοιχούν στις κυματομορφές  $s_1(t)$  και  $s_2(t)$ .

Το τετράγωνο του μήκους κάθε διανύσματος δίνει την ενέργεια του αντίστοιχου σήματος, δηλαδή,

$$E_1 = \| \mathbf{s}_1 \|^2 = A^2 T$$

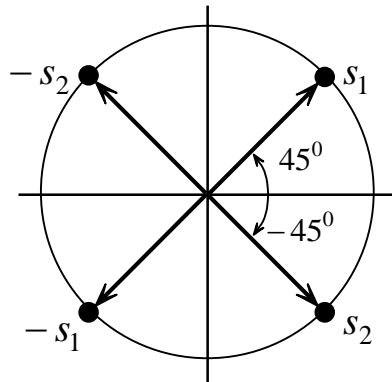
$$E_2 = \| \mathbf{s}_2 \|^2 = A^2 T$$

Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των δύο σημάτων είναι

$$d_{12} = \sqrt{\| \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 \|^2} = A \sqrt{2T} = \sqrt{2 A^2 T} = \sqrt{2 E}$$

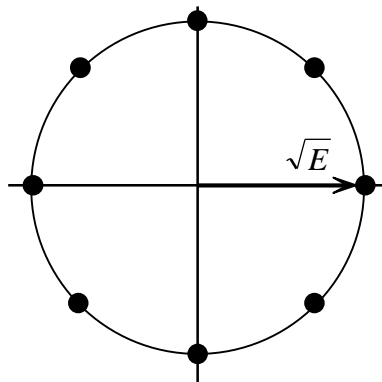
Με τέσσερες κυματομορφές σήματος μπορούμε να μεταδώσουμε δύο bits πληροφορίας σε ένα χρονικό διάστημα σηματοδοσίας διάρκειας  $T$ .

Αν στα διανύσματα  $s_1$  και  $s_2$  προσαρτήσουμε δύο επιπλέον διανύσματα, τα  $-s_1$  και  $-s_2$ , παίρνουμε τα τέσσερα σημεία του αστερισμού σήματος του Σχήματος, τα οποία αντιστοιχούν στις αναλογικές κυματομορφές  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $-s_1(t)$  και  $-s_2(t)$ . Το σύνολο των σημάτων αυτών ονομάζεται σύνολο *διορθογωνίων σημάτων*.



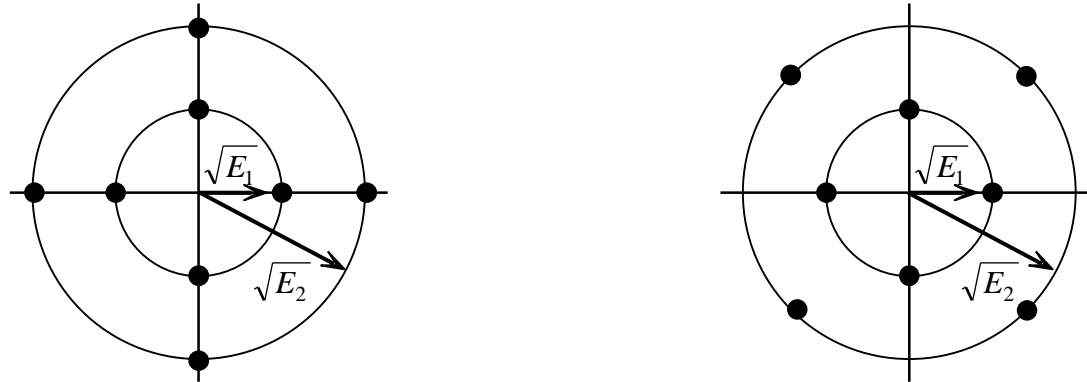
Αστερισμός σήματος για  $M = 4$  διορθογώνια σήματα.

Η διαδικασία κατασκευής ενός μεγαλύτερου συνόλου κυματομορφών σήματος είναι σχετικά άμεση.



Αστερισμός σήματος  $M = 8$  σημείων που αντιστοιχεί στις ορθογώνιες κυματομορφές  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $s_1'(t)$ ,  $s_2'(t)$ ,  $-s_1(t)$ ,  $-s_2(t)$ ,  $-s_1'(t)$  και  $-s_2'(t)$ .

Αν αφαιρέσουμε τον περιορισμό της ίσης ενέργειας των κυματομορφών, έχουμε τους αστερισμούς



*Δύο δισδιάστατοι αστερισμοί σήματος  $M = 8$  σημείων, που αντιστοιχούν σε υπέρθεση δύο συνόλων διορθωγώνιων κυματομορφών με διαφορετικές ενέργειες.*

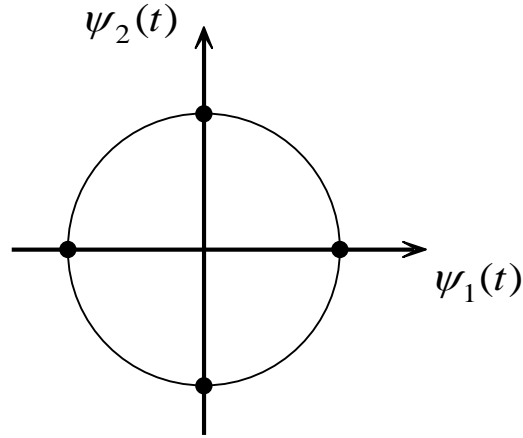
## Δισδιάστατα Ζωνοπερατά Σήματα – Διαμόρφωση Φέροντος κατά Φάση

Από ένα σύνολο  $M$  δισδιάστατων κυματομορφών σήματος, έστω  $s_m(t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα σύνολο  $M$  ζωνοπερατών κυματομορφών ως

$$u_m(t) = s_m(t) \cos(2\pi f_c t), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T$$

Στην ειδική περίπτωση  $M$  δισδιάστατων κυματομορφών με την ίδια ενέργεια έχουμε

$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^T u_m^2(t) dt = \int_0^T s_m^2(t) \cos^2(2\pi f_c t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T s_m^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T s_m^2(t) \cos(4\pi f_c t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T s_m^2(t) dt \end{aligned}$$



Αστερισμός σήματος  
 $M = 4$  σημείων

Από τη γεωμετρική αναπαράσταση για  $M = 4$ , παρατηρούμε ότι τα σημεία σήματος είναι ισοδύναμα με ένα μοναδικό σήμα, του οποίου η φάση ολισθαίνει κατά πολλαπλάσια του  $\pi/2$ .

Με άλλα λόγια, ένα ζωνοπερατό σήμα της μορφής

$$s(t)\cos(2\pi f_c t + m\pi/2), \quad m=0, 1, 2, 3,$$

έχει την ίδια γεωμετρική αναπαράσταση με ένα σύνολο  $M = 4$  διορθογώνιων σημάτων.

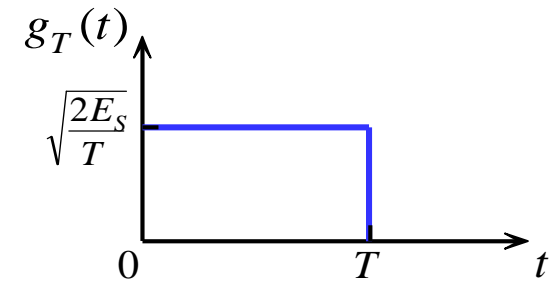
Επομένως, ένας απλός τρόπος για τη δημιουργία  $M$  ζωνοπερατών σημάτων με την ίδια ενέργεια είναι να αποτυπώσουμε την πληροφορία στη **φάση** του φέροντος. Έτσι έχουμε ένα **διαμορφωμένο κατά φάση-φέροντος** σήμα.

Η γενική αναπαράσταση ενός συνόλου  $M$  διαμορφωμένων κατά φάση-φέροντος κυματομορφών είναι

$$u_m(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + m\frac{2\pi}{M}\right), \quad m = 0, 1, \dots, M-1, \quad 0 \leq t \leq T$$

Όταν ο  $g_T(t)$  είναι ένας ορθογώνιος παλμός ο οποίος ορίζεται ως

$$g_T(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_s}{T}}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Οι αντίστοιχες μεταδιδόμενες κυματομορφές σήματος είναι

$$u_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi m}{M}\right), \quad m = 0, 1, \dots, M-1, \quad 0 \leq t \leq T$$

Παρατηρούμε ότι έχουν σταθερή περιβάλλουσα και η φάση του φέροντος αλλάζει απότομα στην αρχή κάθε διαστήματος σήματος.

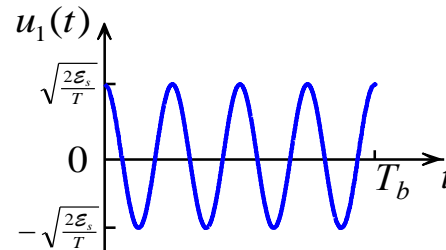
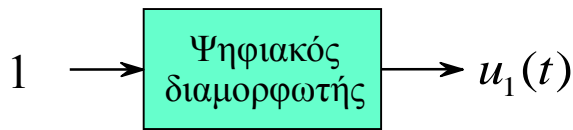
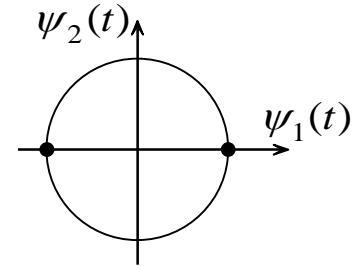
Αυτός ο τύπος ψηφιακής διαμόρφωσης κατά-φάση καλείται **μεταλλαγή ολίσθησης φάσης** (*Phase Shift Keying - PSK*).

## Διαδική-Μεταλλαγή Ολίσθησης Φάσης (2-Phase Shift Keying (2-PSK))

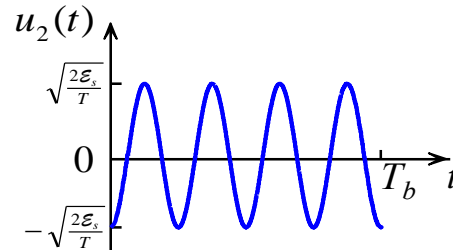
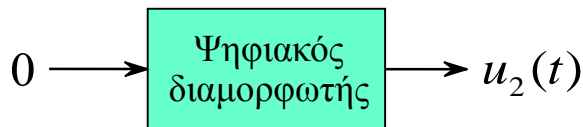
Οι αντίστοιχες μεταδιδόμενες κυματομορφές σήματος είναι

$$u_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + \pi m), \quad m = 0, 1, \quad 0 \leq t \leq T$$

Αστερισμός σήματος  
M = 2 σημείων

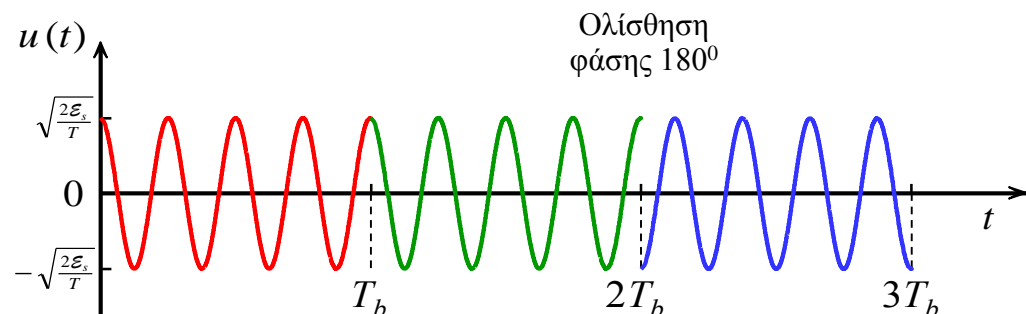
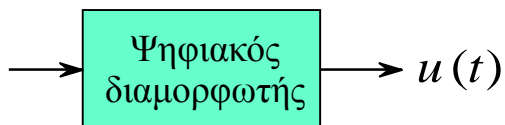


$$u_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t), & 0 \leq t \leq T_b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



$$u_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + \pi), & 0 \leq t \leq T_b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

1 1 0

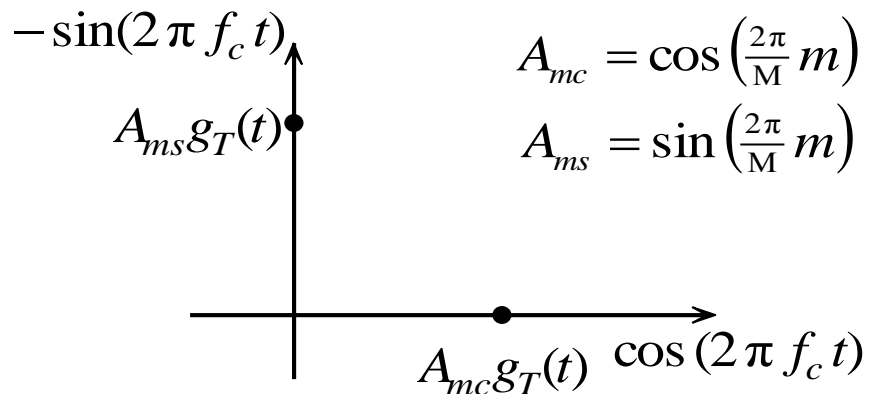




Η γενική αναπαράσταση ενός συνόλου  $M$  διαμορφωμένων κατά φάση-φέροντος κυματομορφών μπορεί να γραφεί και ως

$$\begin{aligned} u_m(t) &= g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi m}{M}\right) \\ &= g_T(t) \cos\left(\frac{2\pi m}{M}\right) \cos(2\pi f_c t) - g_T(t) \sin\left(\frac{2\pi m}{M}\right) \sin(2\pi f_c t) \\ &= g_T(t) A_{mc} \cos(2\pi f_c t) - g_T(t) A_{ms} \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

Επομένως ένα σήμα διαμορφωμένο κατά φάση μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ορθογώνια φέροντα με πλάτη  $g_T(t)A_{mc}$  και  $g_T(t)A_{ms}$ , τα οποία εξαρτώνται από τη φάση του φέροντος σε κάθε διάστημα σήματος.



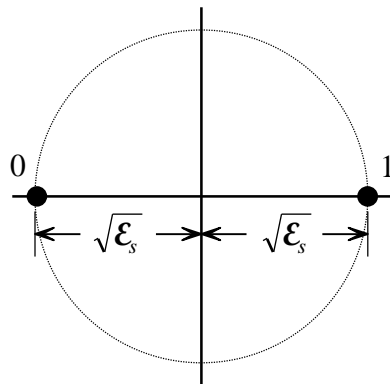
*Ψηφιακή διαμόρφωση κατά φάση ως δύο διαμορφωμένων κατά πλάτος ορθογώνιων φερόντων.*

Επίσης, τα ψηφιακά διαμορφωμένα κατά φάση σήματα μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά από δισδιάστατα διανύσματα με συνιστώσες  $\sqrt{E_s} \cos(2\pi m/M)$  και  $\sqrt{E_s} \sin(2\pi m/M)$ , δηλαδή

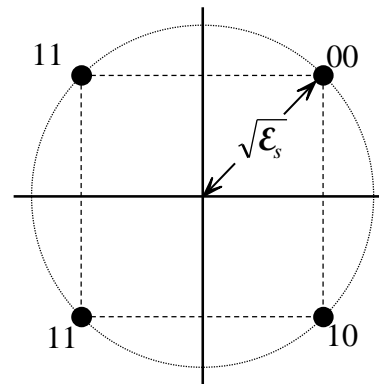
$$\mathbf{s}_m = (\sqrt{E_s} \cos(2\pi m/M) \quad \sqrt{E_s} \sin(2\pi m/M))$$

Οι ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσης είναι

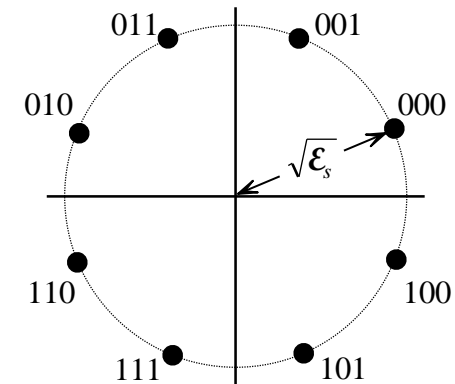
$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \sin(2\pi f_c t)$$



$M = 2$



$M = 4$



$M = 8$

Οι κυματομορφές σήματος διαμόρφωσης κατά φάση-φέροντος περιορίζονται να έχουν την ίδια ενέργεια  $E_s$  πράγμα το οποίο σημαίνει ότι τα σημεία σήματος, στην γεωμετρική αναπαράσταση των κυματομορφών, ανήκουν σε κύκλο.

$$g_T(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}}, \quad 0 \leq t \leq T \quad u_m(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{2} m + \frac{\pi}{4}\right), \quad m = 0, 1, 2, 3$$

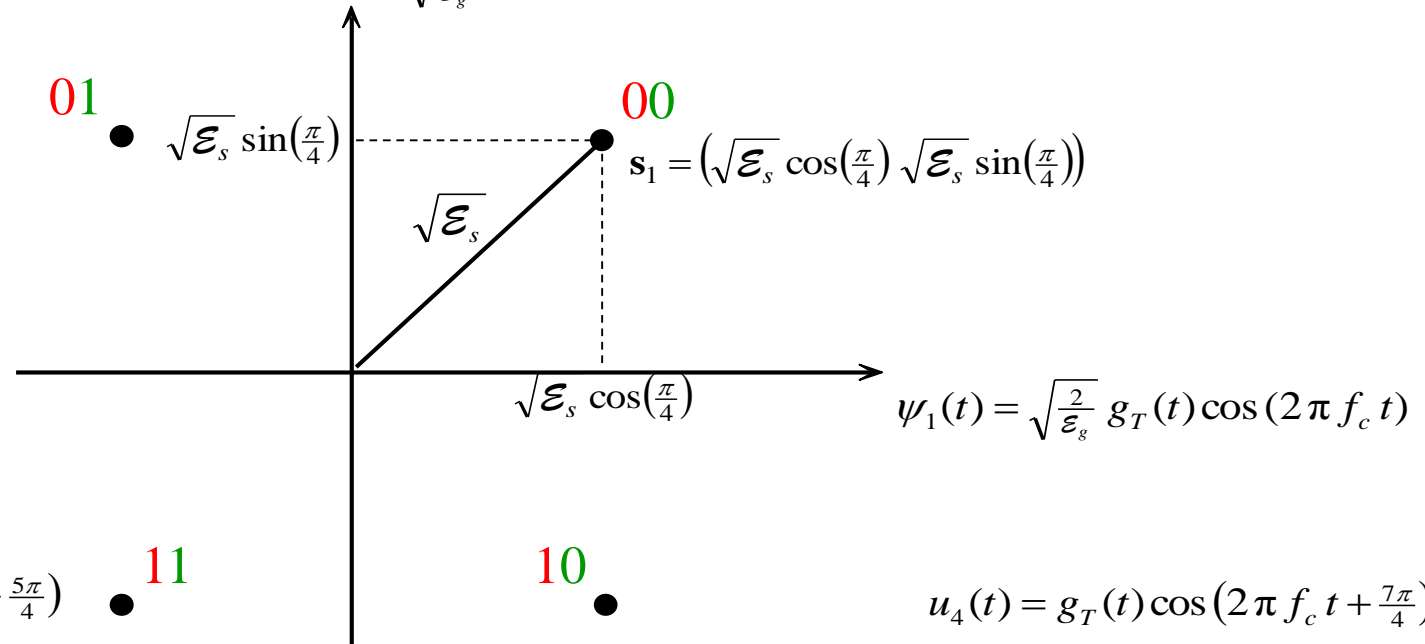
$$u_2(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$u_2(t) = g_T(t) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos(2\pi f_c t) - g_T(t) \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \sin(2\pi f_c t)$$

$$\psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}_s}} g_T(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$u_1(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$u_1(t) = g_T(t) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(2\pi f_c t) - g_T(t) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(2\pi f_c t)$$



$$u_3(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$u_3(t) = g_T(t) \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cos(2\pi f_c t) - g_T(t) \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \sin(2\pi f_c t)$$

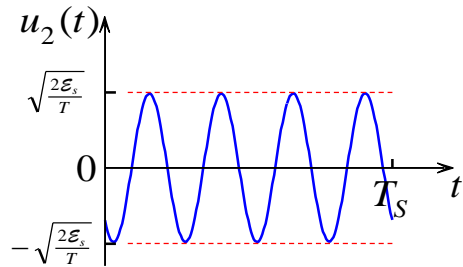
$$u_4(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{7\pi}{4}\right)$$

$$u_4(t) = g_T(t) \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) \cos(2\pi f_c t) - g_T(t) \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \sin(2\pi f_c t)$$

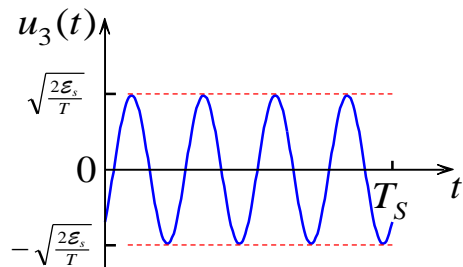
Αστερισμός σήματος 4-PSK.

$$g_T(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}}, \quad 0 \leq t \leq T \quad u_m(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{2} m + \frac{\pi}{4}\right), \quad m = 0, 1, 2, 3$$

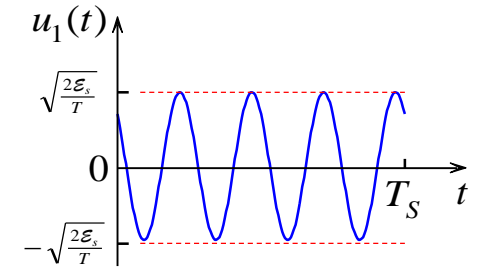
$$u_2(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{3\pi}{4}\right)$$



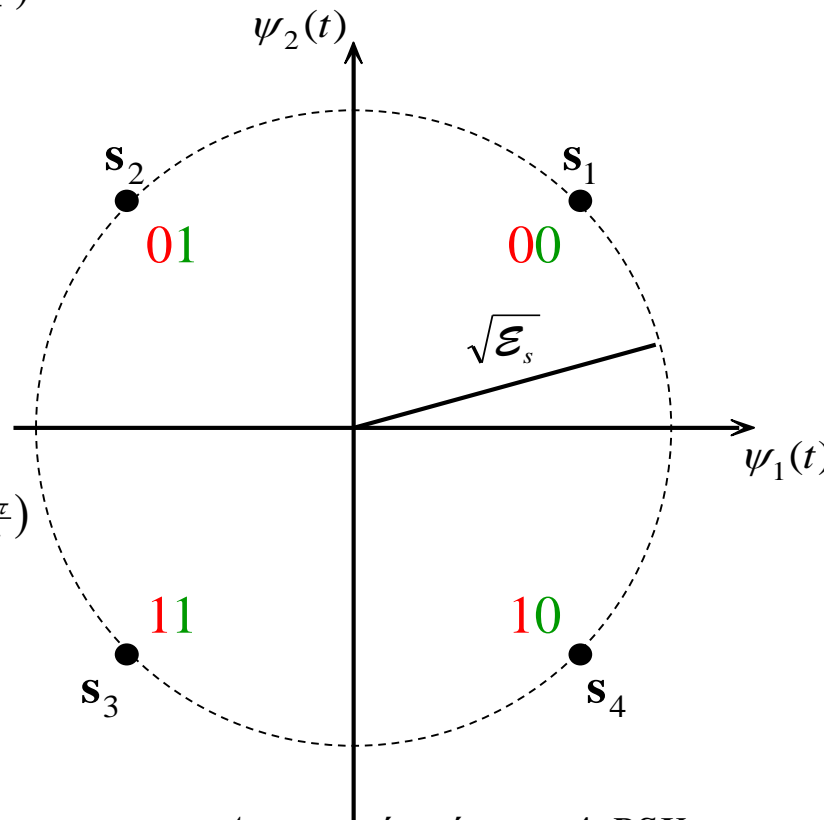
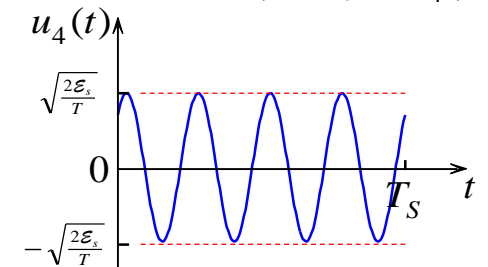
$$u_3(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{5\pi}{4}\right)$$



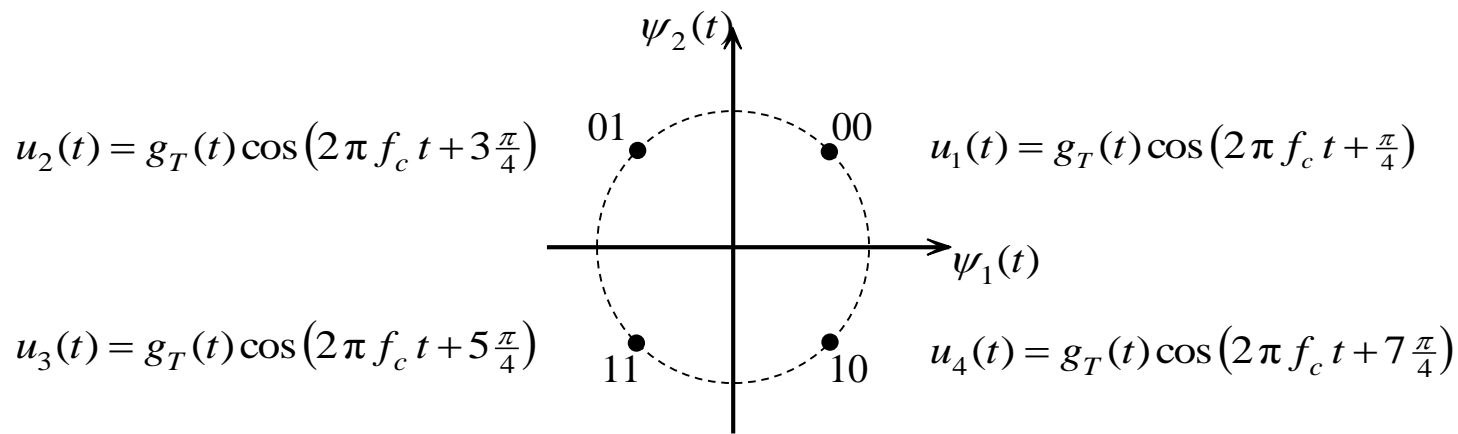
$$u_1(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\pi}{4}\right)$$



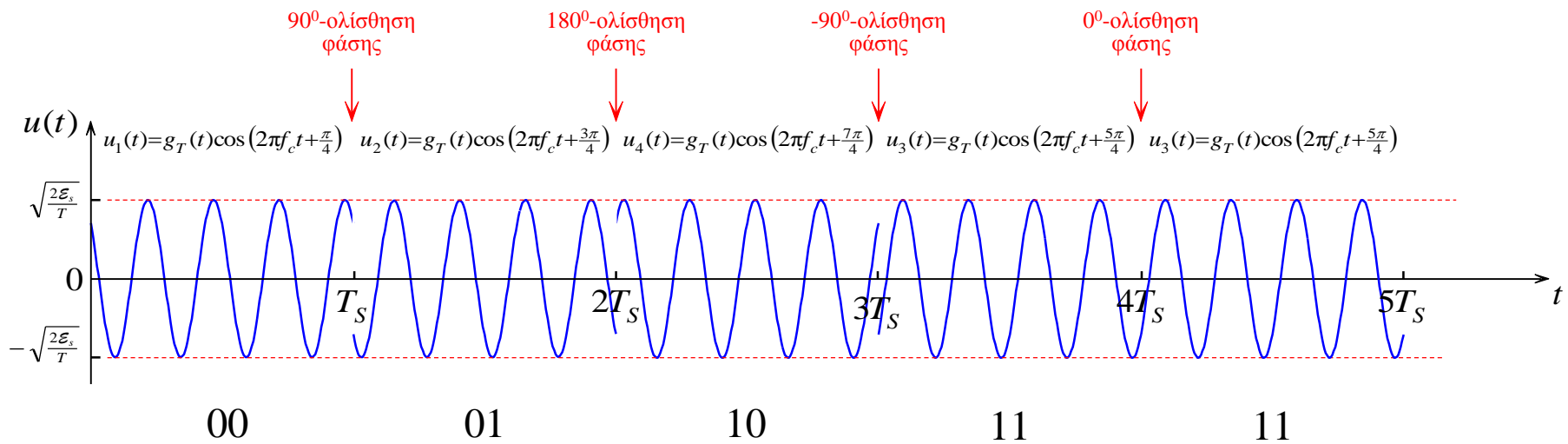
$$u_4(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{7\pi}{4}\right)$$



Αστερισμός σήματος 4-PSK.



Παράδειγμα αστερισμού ενός τετραδικού PSK σήματος.



Παράδειγμα ενός τετραδικού PSK σήματος.

Ένα PSK σήμα τεσσάρων φάσεων ( $M = 4$ ), καλείται συνήθως **ορθογώνιο PSK** (*Quadrature Phase Shift Keying* – (QPSK)) σήμα.

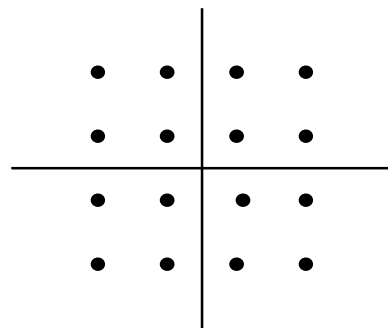
## Δισδιάστατα Ζωνοπερατά Σήματα – Ορθογώνια Διαμόρφωση κατά Πλάτος

Κατά τη διαμόρφωση κατά φάση-φέροντος οι ζωνοπερατές κυματομορφές αναπαρίστανται από την

$$u_m(t) = A_{mc} g_T(t) \cos(2\pi f_c t) - A_{ms} g_T(t) \sin(2\pi f_c t), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Αν καταργήσουμε τον περιορισμό της ίσης ενέργειας έχουμε **την Ορθογώνια Διαμόρφωση κατά Πλάτος** (*Quadrature Amplitude Modulation-QAM*)

Όπου  $\{A_{mc}\}$  και  $\{A_{ms}\}$  είναι τα σύνολα των τιμών πλάτους που λαμβάνονται από την αντιστοίχιση των ακολουθιών των  $k$  bits σε πλάτη σήματος.



Αστερισμός σήματος ενός 16-QAM.

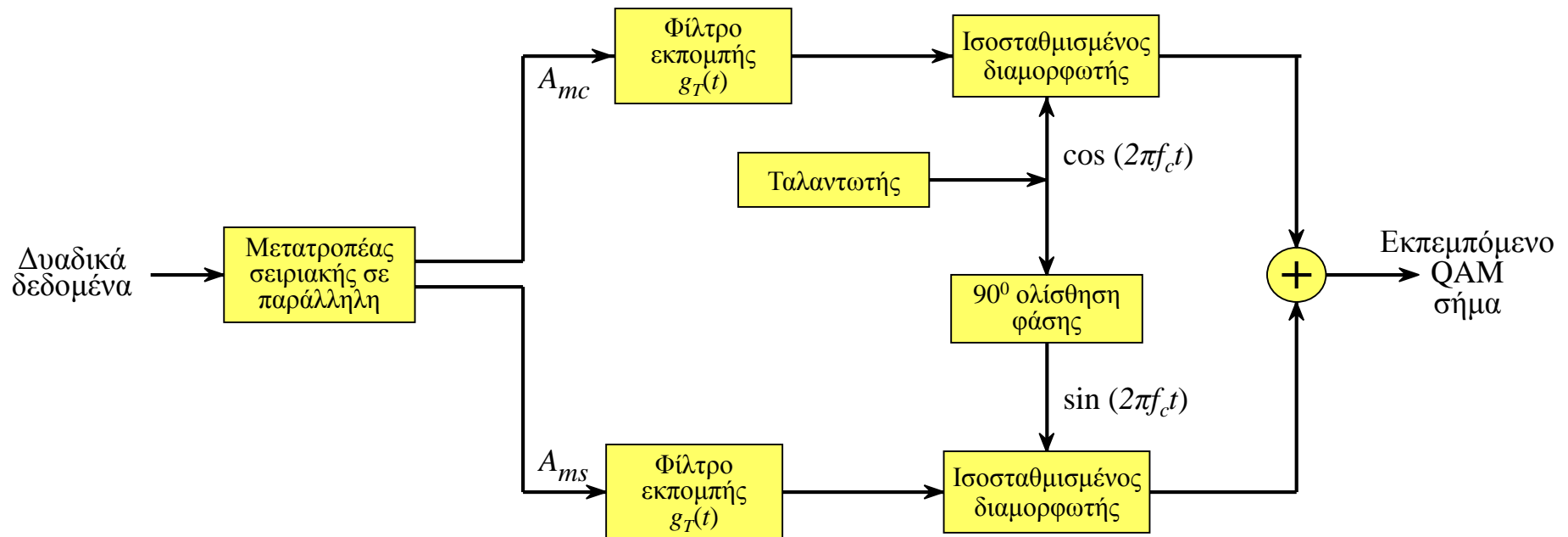
Γενικά οι τετράγωνοι αστερισμοί σήματος είναι αποτέλεσμα της διαμόρφωσης των δύο ορθογώνιων φερουσών από PAM.

Το QAM μπορεί να θεωρηθεί ως μια μορφή συνδυασμού ψηφιακής διαμόρφωσης κατά πλάτος και ψηφιακής διαμόρφωσης κατά φάση.

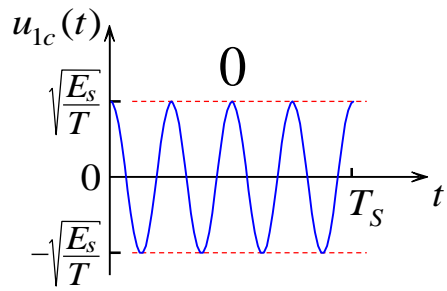
$$u_{mn}(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_n), \quad m = 1, 2, \dots, M_1$$

$$n = 1, 2, \dots, M_2$$

Εάν  $M_1 = 2^{k_1}$  και  $M_2 = 2^{k_2}$ , η μέθοδος συνδυασμού διαμόρφωσης κατά πλάτος και φάση έχει ως αποτέλεσμα την ταυτόχρονη διαβίβαση  $k_1 + k_2 = \log_2 M_1 M_2$  δυαδικών ψηφίων, η οποία επιτυγχάνεται με ρυθμό  $R_b / (k_1 + k_2)$ .

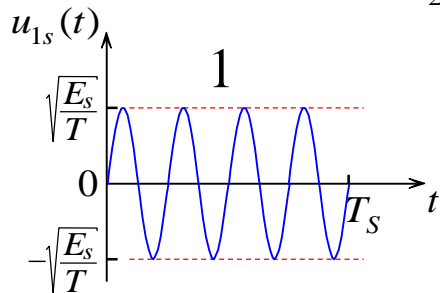


Λειτουργικό διάγραμμα βαθμίδων διαμορφωτή QAM.



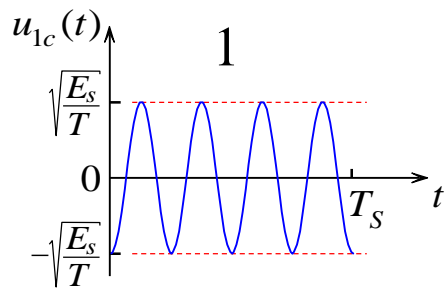
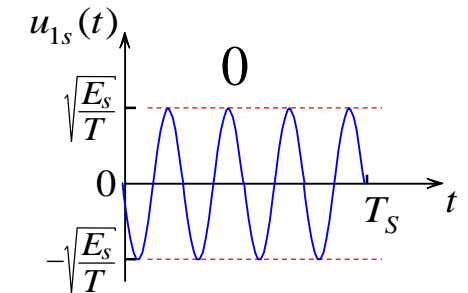
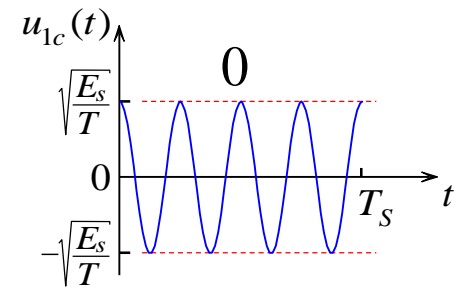
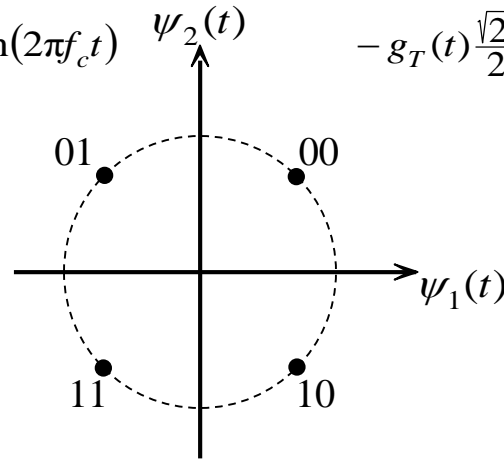
$$u_2(t) = -g_T(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2\pi f_c t)$$

$$u_1(t) = g_T(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2\pi f_c t)$$



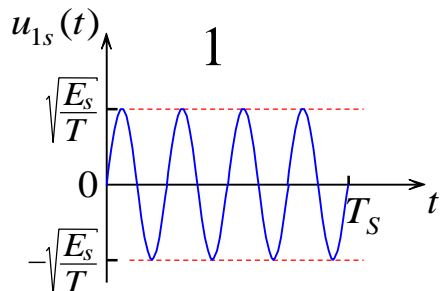
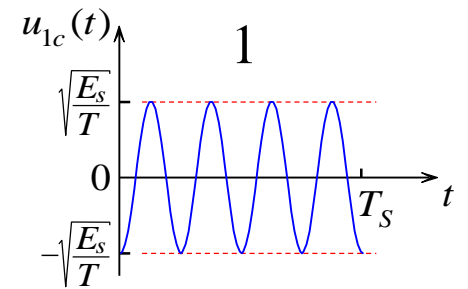
$$-g_T(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\pi f_c t)$$

$$-g_T(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\pi f_c t)$$



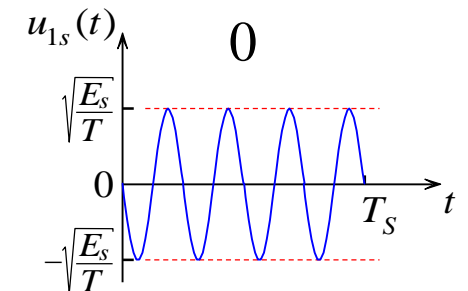
$$u_3(t) = -g_T(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2\pi f_c t)$$

$$u_4(t) = g_T(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2\pi f_c t)$$

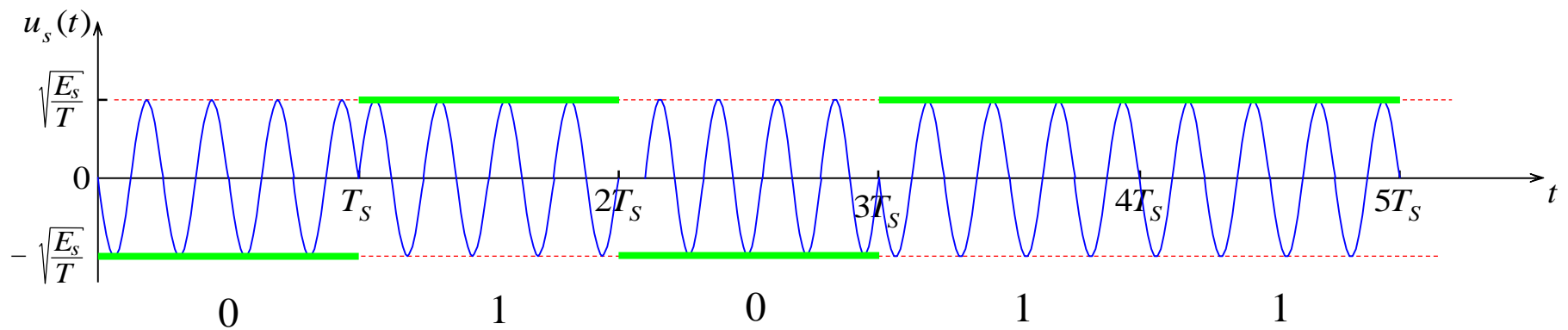
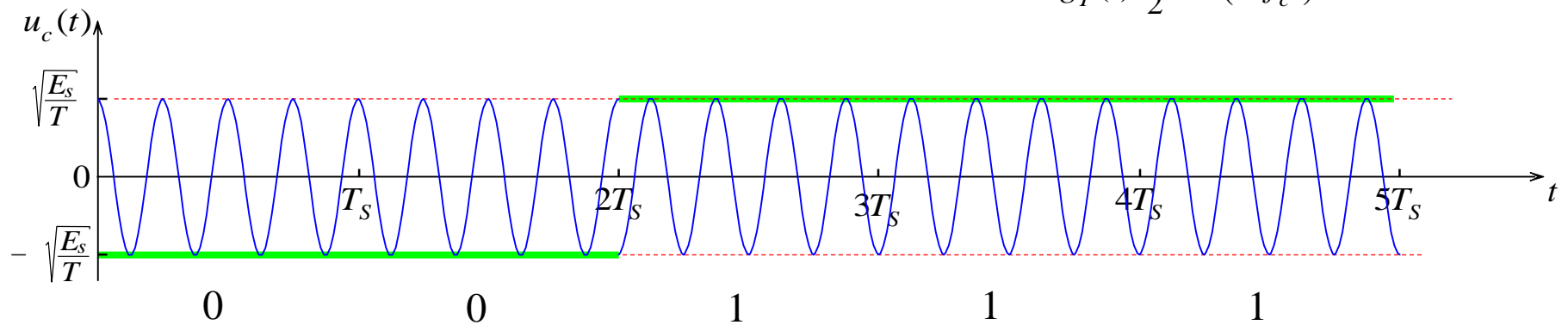
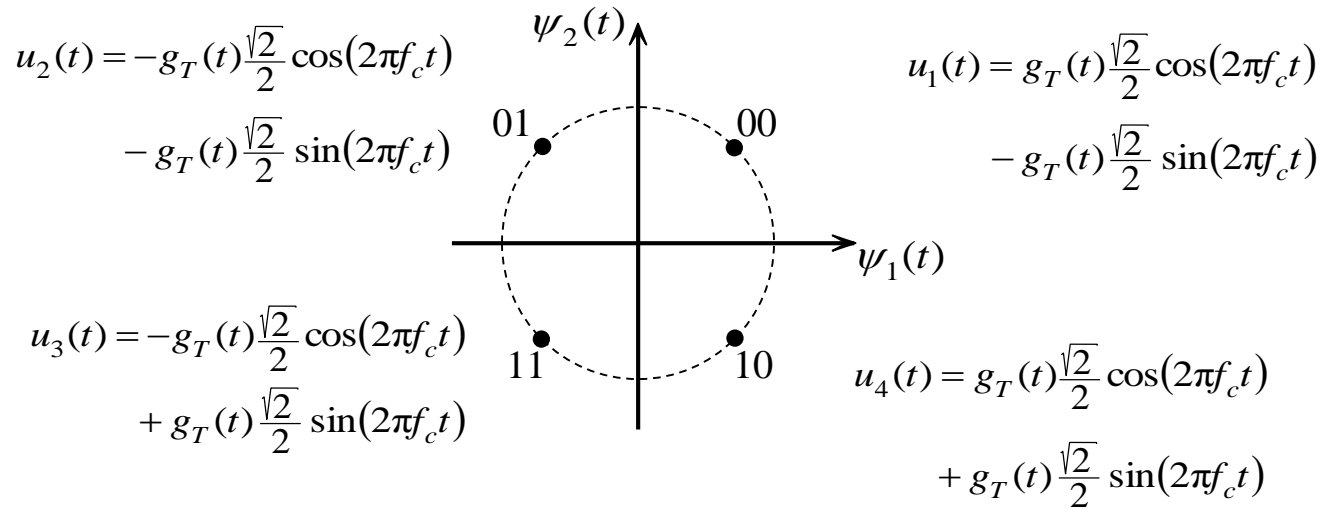


$$+ g_T(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\pi f_c t)$$

$$+ g_T(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\pi f_c t)$$







Η γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων  $u_m(t)$  και  $u_{mn}(t)$  γίνεται με τη βοήθεια δισδιάστατων σημάτων της μορφής

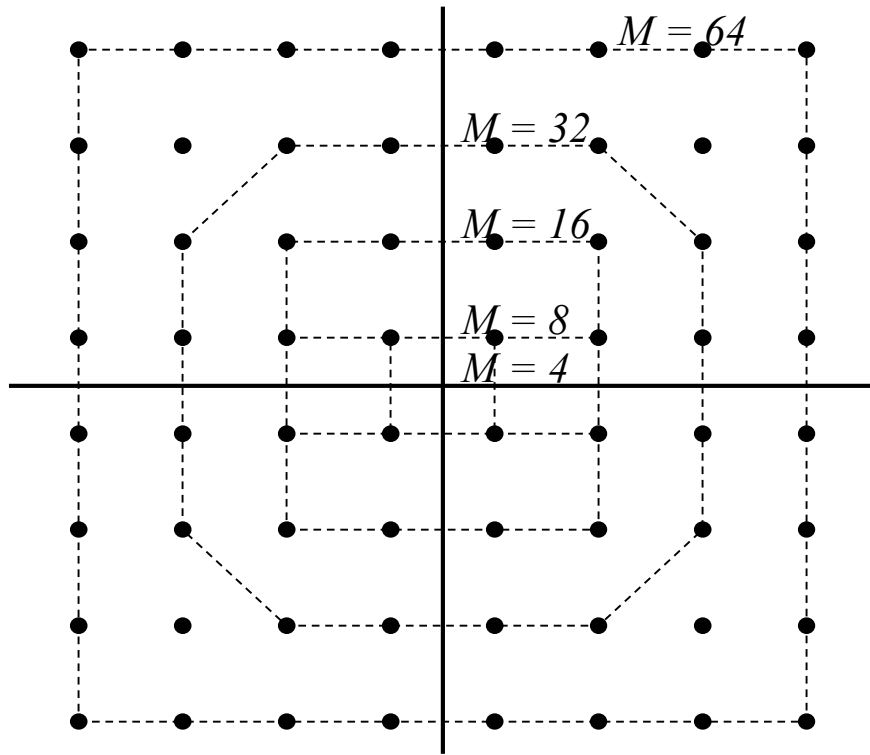
$$\mathbf{s}_m = (\sqrt{E_s} A_{mc}, \sqrt{E_s} A_{ms}), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Για ισοπίθανα σήματα η μέση ενέργεια/σύμβολο είναι

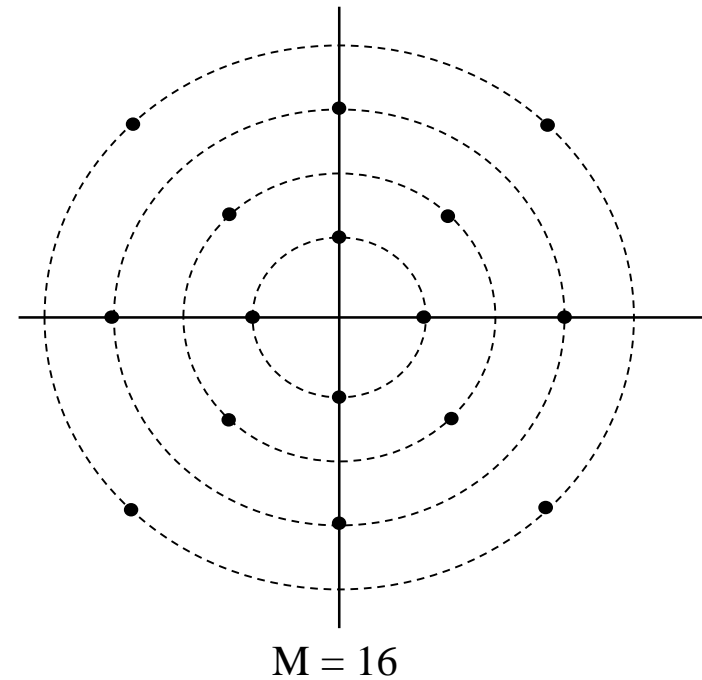
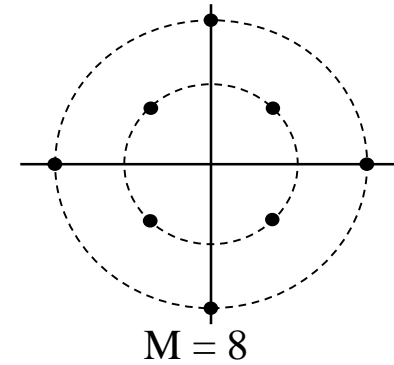
$$E_{av} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{s}_i\|^2$$

Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο σημείων του αστερισμού είναι

$$d_{mn} = \sqrt{\|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n\|^2}$$



Τετράγωνοι αστερισμοί σήματος QAM



Παραδείγματα αστερισμών σήματος συνδυασμού PAM-PSK

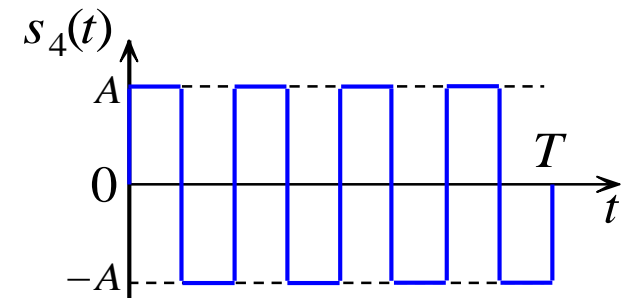
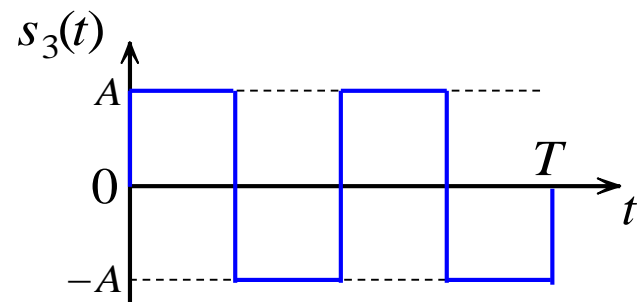
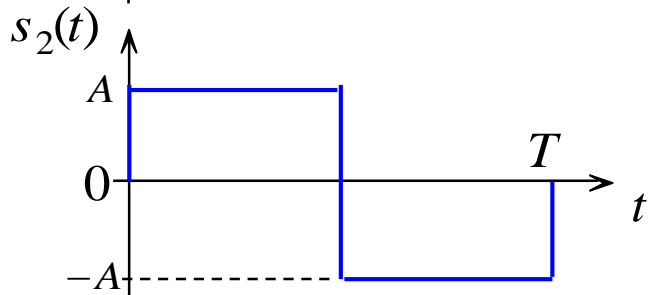
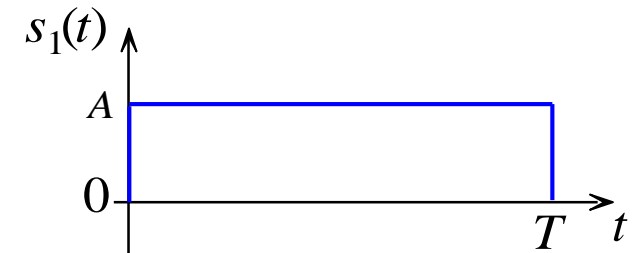
## ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΕΣ ΣΗΜΑΤΟΣ

Έχουμε μελετήσει τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να κατασκευαστεί στις δύο διαστάσεις ένας αριθμός  $M = 2^k$  κυματομορφών σήματος.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το σχεδιασμό ενός συνόλου  $M = 2^k$  κυματομορφές σήματος, οι οποίες έχουν περισσότερες από δύο διαστάσεις και θα δείξουμε τα πλεονεκτήματα της χρήσης των στη διαβίβαση πληροφορίας.

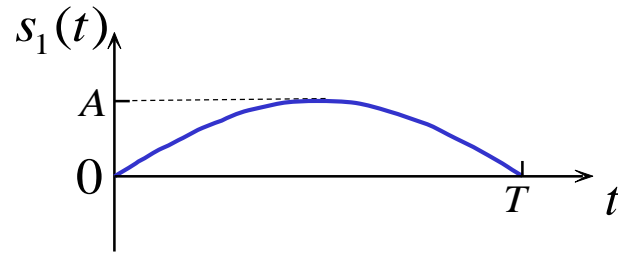
Με άλλα λόγια θα θεωρήσουμε  $M = 2^k$  κυματομορφές σήματος, οι οποίες περιγράφονται από ορθοκανονικές βάσεις με διάσταση μεγαλύτερη του δύο.

Πρώτα εξετάζουμε την κατασκευή ορθογώνιων σημάτων βασικής ζώνης και στη συνέχεια θεωρούμε το σχεδιασμό ζωνοπερατών σημάτων.

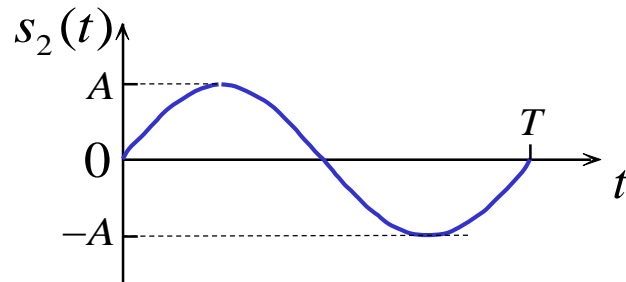


Οι κυματομορφές  $s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , επικαλύπτονται πλήρως στο διάστημα  $(0, T)$ ,

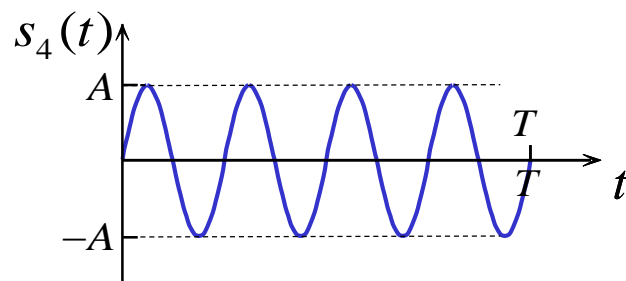
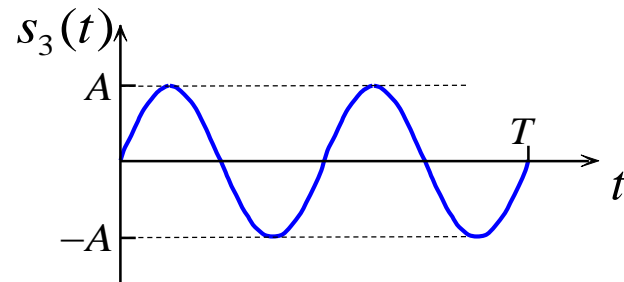
Σύνολο από  $M = 4$  επικαλυπτόμενες ορθογώνιες κυματομορφές σήματος



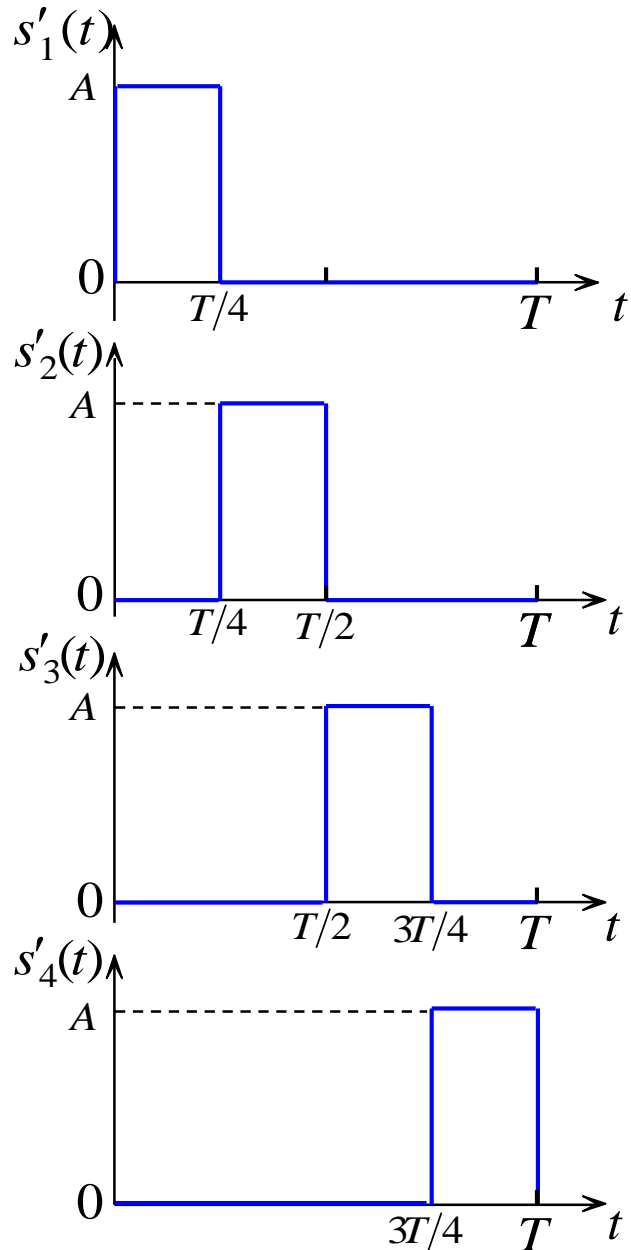
Οι κυματομορφές  $s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , επικαλύπτονται πλήρως στο διάστημα  $(0, T)$ ,



Η διαβιβαζόμενη ψηφιακή πληροφορία αποτυπώνεται από τη συχνότητα. Ο τύπος αυτός σηματοδότησης καλείται **διαμόρφωση παλμών κατά συχνότητα (FSK)**.



Σύνολο από  $M = 4$  επικαλυπτόμενες ορθογώνιες κυματομορφές σήματος FSK.



Οι κυματομορφές  $s'_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , δεν έχουν χρονική επικάλυψη

Η διαβιβαζόμενη ψηφιακή πληροφορία αποτυπώνεται από τη χρονική θέση στην οποία τοποθετείται ο παλμός. Ο τύπος αυτός σηματοδοσίας καλείται *διαμόρφωση παλμών κατά θέση (Pulse Position Modulation – PPM)*.

Οι  $M$  κυματομορφές σήματος βασικής ζώνης εκφράζονται ως

$$s'_m(t) = A g_T \left( t - (m-1) \frac{T}{M} \right), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$(m-1) \frac{T}{M} \leq t \leq m \frac{T}{M}$$

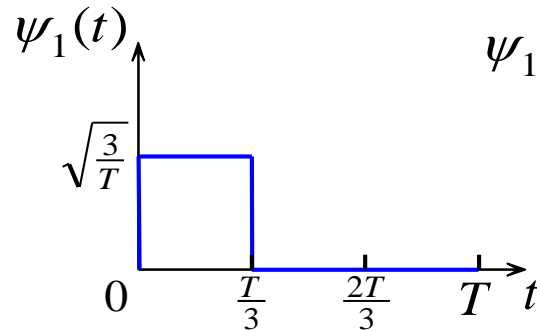
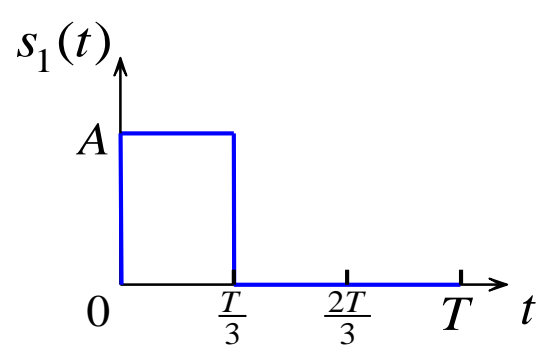
Όπου  $g_T(t)$  είναι παλμός διάρκειας  $T/M$  και αυθαίρετου σχήματος.

Σύνολο από  $M = 4$  μη επικαλυπτόμενες ορθογώνιες κυματομορφές σήματος PSK.

Αν στην περίπτωση των  $M$  PPM σημάτων (μη επικαλυπτόμενοι παλμοί διάρκειας  $T/M$ ), όλες οι κυματομορφές έχουν το ίδιο πλάτος  $A$  τότε έχουν και την ίδια ενέργεια

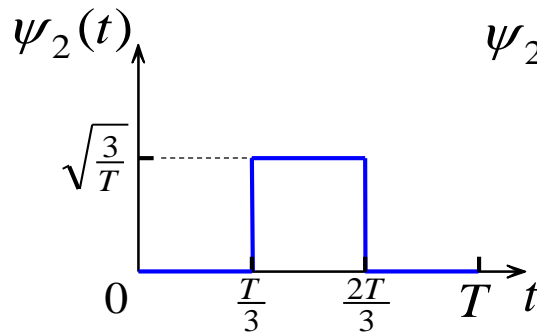
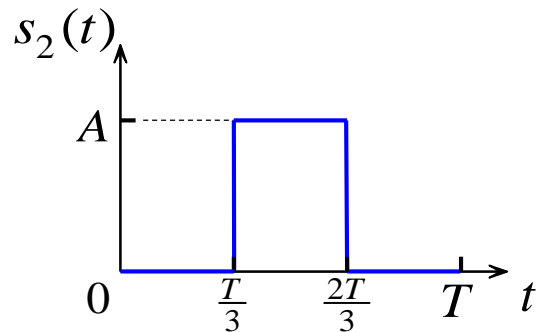
$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^T s_m'^2(t) dt = A^2 \int_{(m-1)T/M}^{mT/M} g_T^2\left(t - (m-1)\frac{T}{M}\right) dt \\ &= A^2 \int_0^{T/M} g_T^2(t) dt, \quad \text{για όλα τα } m \end{aligned}$$





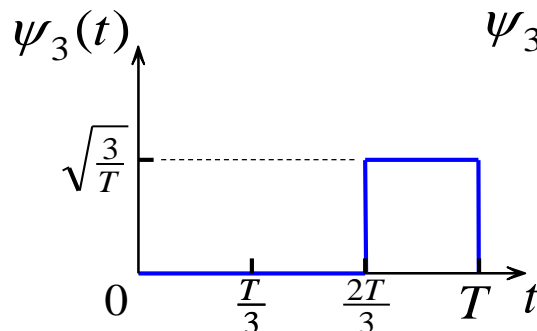
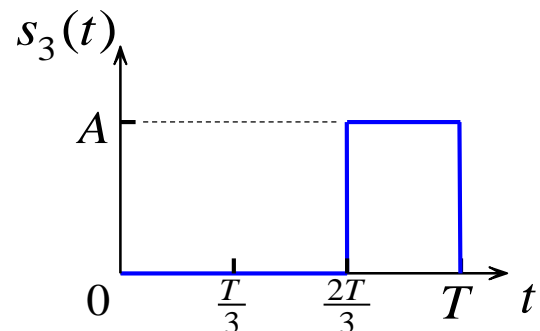
$$\psi_1(t) = \frac{g_T(t)}{\sqrt{E_g}}$$

$$\mathbf{s}_1 = (\sqrt{E_s}, 0, 0)$$



$$\psi_2(t) = \frac{g_T(t-T/3)}{\sqrt{E_g}}$$

$$\mathbf{s}_2 = (0, \sqrt{E_s}, 0)$$



$$\psi_3(t) = \frac{g_T(t-2T/3)}{\sqrt{E_g}}$$

$$\mathbf{s}_3 = (0, 0, \sqrt{E_s})$$

Ορίζουμε τις  $M$  συναρτήσεις βάσης οι

$$\psi_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{E_s}} g_T \left( t - (m-1) \frac{T}{M} \right), & (m-1) \frac{T}{M} \leq t \leq m \frac{T}{M} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για  $m = 1, 2, \dots, M$ . Επομένως οι  $M$ -αδικές PPM κυματομορφές παριστάνονται γεωμετρικά από τα  $M$ -διάστατα διανύσματα

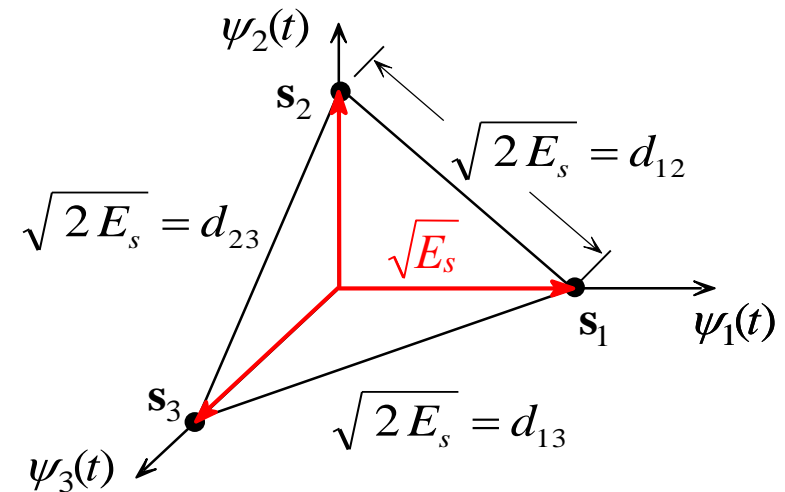
$$\mathbf{s}_1 = (\sqrt{E_s}, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{s}_2 = (0, \sqrt{E_s}, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{s}_M = (0, 0, 0, \dots, \sqrt{E_s})$$

Είναι προφανές ότι τα διανύσματα αυτά είναι ορθογώνια, δηλαδή,  $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j = 0$ , όταν  $i \neq j$ .



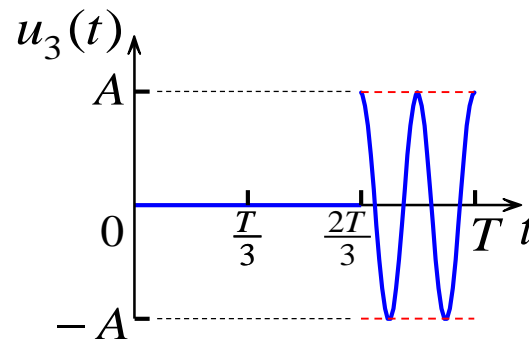
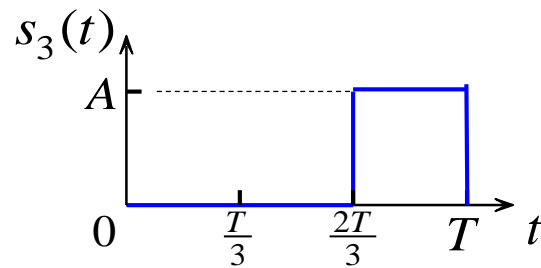
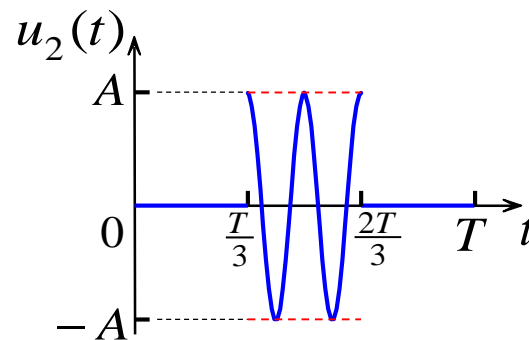
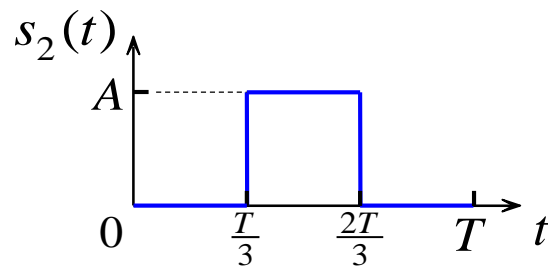
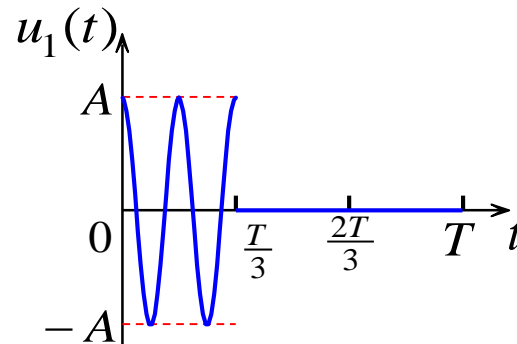
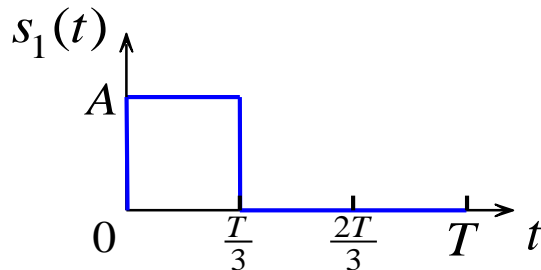
Ορθογώνια σήματα PPM για  $M = N = 3$ .

Τα  $M$  διανύσματα ισαπέχουν στο χώρο σημάτων, δηλαδή,

$$d_{mn} = \sqrt{\|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n\|^2} = \sqrt{2E_s}, \quad \text{για όλα τα } m \neq n$$

## Ζωνοπερατά ορθογώνια σήματα

$$u_m(t) = s_m(t) \cos(2\pi f_c t), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad 0 \leq t \leq T$$



Οι ζωνοπερατές κυματομορφές  
είναι ορθογώνιες

$$\int_0^T u_m(t) \cdot u_m(t) dt = 0$$

## Μεταλλαγή ολίσθησης συχνότητας (*Frequency Shift Keying – FSK*)

Τα  $M$ -αδικά PPM σήματα επιτυγχάνουν την ορθογωνιότητα στο πεδίο του χρόνου με τη χρήση μη επικαλυπτόμενων παλμών.

Τα  $M$  σήματα διαμορφωμένου φέροντος επιτυγχάνουν την ορθογωνιότητα στο πεδίο συχνοτήτων. Ο τύπος αυτός διαμόρφωσης καλείται ενγένει **διαμόρφωση κατά συχνότητα φέροντος**. Η απλούστερη μορφή αυτής της διαμόρφωσης είναι η **μεταλλαγή ολίσθησης συχνότητα** (*Frequency Shift Keying - FSK*).

Η απλούστερη μορφή ψηφιακής διαμόρφωσης κατά συχνότητα είναι το δυαδικό FSK. Στο δυαδικό FSK χρησιμοποιούμε δύο συχνότητες, έστω  $f_1$  και  $f_2 = f_1 + \Delta f$ , για τη διαβίβαση της δυαδικής πληροφορίας. Οι δύο κυματομορφές σήματος μπορούν να εκφραστούν ως

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t), \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$u_2(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_2 t), \quad 0 \leq t \leq T_b$$

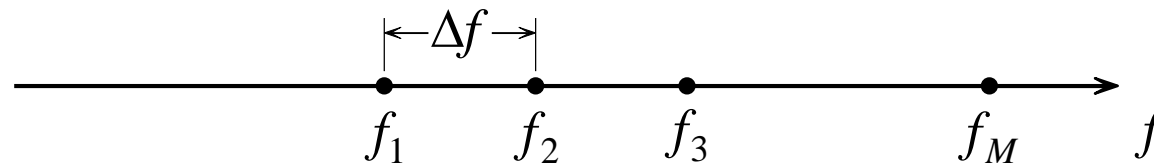
Όπου  $E_b$  είναι η ενέργεια ανά bit και  $T_b$  η διάρκεια του bit.

Γενικότερα, το  $M$ -αδικό FSK μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μεταδίδουμε ένα μπλοκ από  $k = \log_2 M$  bits ανά κυματομορφή σήματος. Σ' αυτή την περίπτωση οι  $M$  κυματομορφές σήματος μπορούν να εκφραστούν ως

$$u_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_m t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t)$$

$$m = 1, 2, \dots, M \quad 0 \leq t \leq T$$

Όπου  $E_s = k E_b$  είναι η ενέργεια ανά σύμβολο,  $T = T_s = k T_b$  η διάρκεια συμβόλου και  $\Delta f$  η συχνοτική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών συχνοτήτων, δηλαδή,  $\Delta f = f_m - f_{(m-1)}$  όπου  $f_m = f_c + m \Delta f$ .



Οι  $M$  FSK κυματομορφές έχουν την ίδια ενέργεια  $E_s$

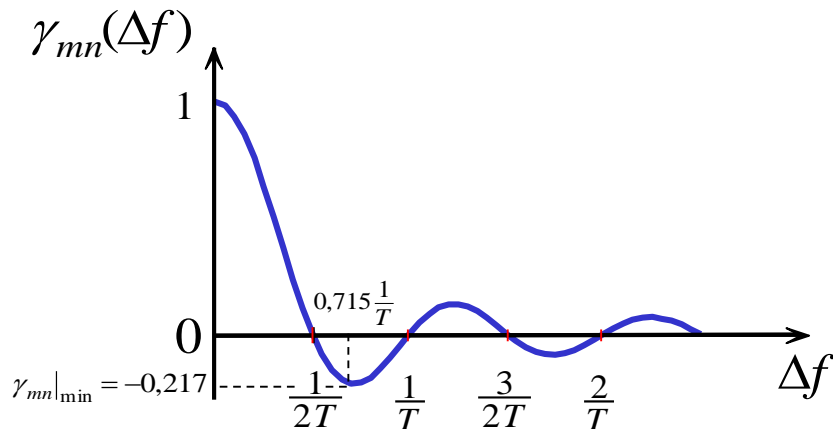
Το  $M$ -αδικό FSK μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μεταδώσουμε ένα μπλοκ από  $k = \log_2 M$  bits ανά κυματομορφή σήματος.

Η απόσταση συχνότητας  $\Delta f$  καθορίζει το βαθμό στον οποίο μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ τους τα  $M$  πιθανά μεταδιδόμενα σήματα. **Ο συντελεστής διασυσχέτισης** αποτελεί ένα μέτρο ομοιότητας δύο κυματομορφών σήματος.

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{E_s} \int_0^{T_s} u_m(t) u_n(t) dt$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\gamma_{mn} = \frac{\sin(2\pi(m-n)\Delta f T)}{2\pi(m-n)\Delta f T}$$



Συντελεστής διασυσχέτισης συναρτήσεως της συχνοτικής απόστασης  $\Delta f$  μεταξύ διαδοχικών FSK σημάτων

Η ελάχιστη συχνοτική απόσταση μεταξύ διαδοχικών συχνοτήτων ώστε να επιτύχουμε ορθογωνιότητα είναι  $1/2T$ . Επίσης η ελάχιστη τιμή του συντελεστή διασυσχέτισης είναι  $\gamma_{mn}|_{\min} = -0,217$ , η οποία επιτυγχάνεται για  $\Delta f = 0,715/T$ .

Οι  $M$ -αδικές ορθογώνιες FSK κυματομορφές αναπαριστώνται γεωμετρικά από τα  $M$ -διάστατα ορθογώνια διανύσματα

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= (\sqrt{E_s}, 0, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{s}_2 &= (0, \sqrt{E_s}, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{s}_M &= (0, 0, 0, \dots, \sqrt{E_s}) \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις βάσης είναι

$$\psi_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi (f_c + m\Delta f)t)$$

Η απόσταση μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι

$$d = \sqrt{2E_s}$$

για όλα τα  $m$  και  $n$ , που είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των  $M$  σημάτων.

Τέλος Ενότητας



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Σεραφείμ Καραμπογιάς 2015. Σεραφείμ Καραμπογιάς. «Αναλογικές και Ψηφιακές Επικοινωνίες. Γεωμετρική αναπαράσταση κυματομορφών σήματος - διαμόρφωση παλμών». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/DI41/>.

# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.