



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Τυχαίες διαδικασίες στο πεδίο συχνοτήτων

Σεραφείμ Καραμπογιάς

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Μέχρι τώρα η μελέτη των τυχαίων διαδικασιών έγινε στο πεδίο του χρόνου (μέση τιμή, συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης, αμοιβαίου συσχετισμού και συμμεταβολής).

Στη συνέχεια οι τυχαίες διαδικασίες θα μελετηθούν στο πεδίο συχνότητας.

Για ένα νομοτελειακό σήμα $x(t)$ οι φασματικές ιδιότητες περιγράφονται από το μετασχηματισμό Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$X(f)$ είναι η **φασματική πυκνότητα τάσης** (*voltage density spectrum*)

Το σήμα $x(t)$ μπορεί να ανακτηθεί με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Η περιγραφή τυχαίας διαδικασίας μέσω του φάσματος πυκνότητας τάσης δεν είναι πάντα εφικτή. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τη **φασματική πυκνότητα ισχύος**.

Φασματικά Χαρακτηριστικά Τυχαίας Διαδικασίας

Η **μέση ισχύς** P_{XX} μιας τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ δίνεται

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E[X^2(t)] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(f)|^2]}{2T} df$$

Ορίζουμε τη **Φασματική Πυκνότητας Ισχύος** της τυχαίας διαδικασίας ως

$$S_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(f)|^2]}{2T}$$

οπότε η **μέση ισχύς** της διαδικασίας βρίσκεται με το ολοκλήρωμα

$$P_{XX} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) df$$

Ιδιότητες της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος

- 1 $S_{XX}(f) \geq 0$
- 2 $S_{XX}(-f) = S_{XX}(f)$ όταν η $X(t)$ είναι πραγματική
- 3 Η $S_{XX}(f)$ είναι πραγματική
- 4 $P_{XX} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) df = A [E[X^2(t)]]$
- 5 $A[R_{XX}(t, t + \tau)] \xleftrightarrow{F} S_{XX}(f)$

Αν η $X(t)$ είναι τουλάχιστον στατική (με την ευρεία έννοια τότε)

$$R_{XX}(\tau) \xleftrightarrow{F} S_{XX}(f)$$

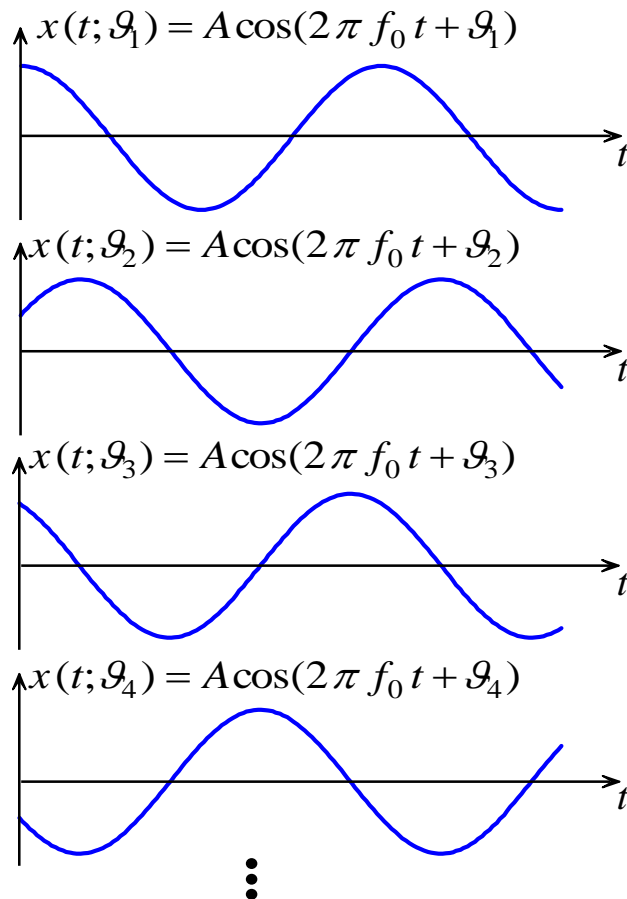
$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

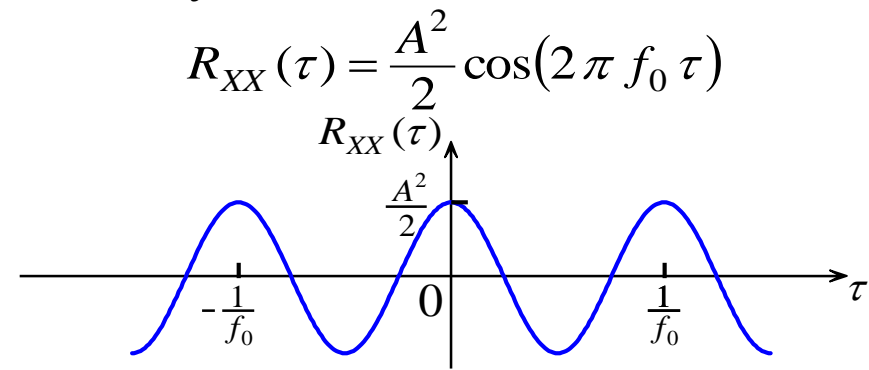
■ Παράδειγμα (συνημιτονοειδές κύμα με τυχαία φάση)

Για τη τυχαία διαδικασία $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ όπου Θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανοημένη στο διάστημα $[0, 2\pi)$ να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και η φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας.

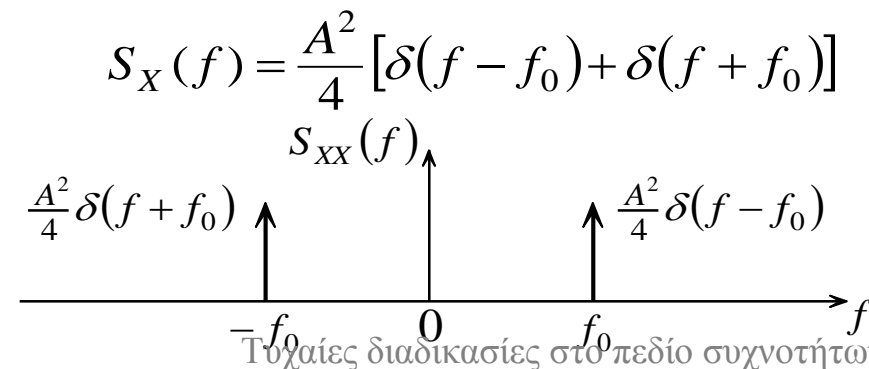
Απάντηση



Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας είναι



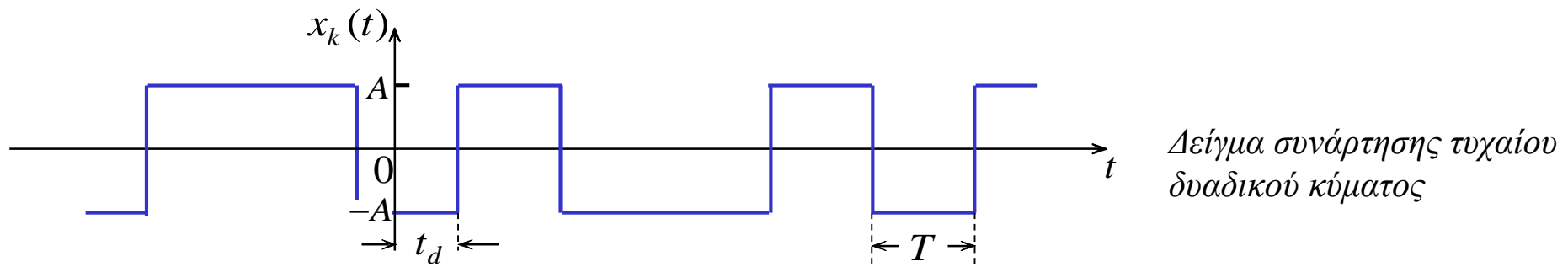
Η φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας είναι



■ **Παράδειγμα** (τυχαίο δυαδικό κύμα)

Δίνεται η τυχαία διαδικασία της οποίας τα δείγματα συνάρτησης είναι η έξοδος ενός ψηφιακού διαμορφωτή ο οποίος στα δυαδικά ψηφία 1 και 0 αντιστοιχεί ορθογώνιους παλμούς με πλάτη A και $-A$ αντίστοιχα και χρονικής διάρκειας T .

Να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και η φασματική πυκνότητα ισχύος της διαδικασίας.



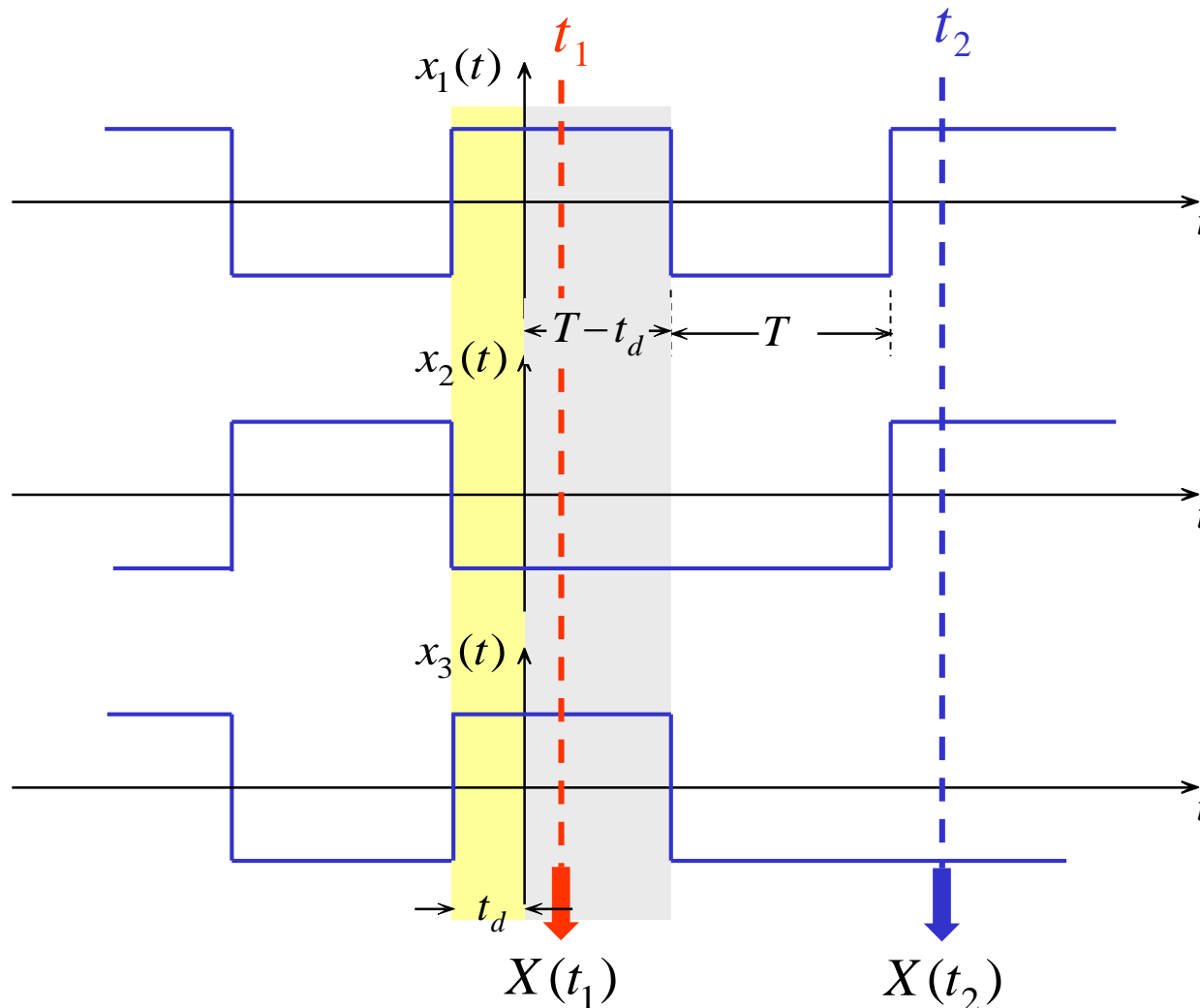
Το χρονικό διάστημα t_d είναι δείγμα τυχαίας μεταβλητής T_d ομοιόμορφα κατανομημένης στο διάστημα $[0, T)$

$$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t_d \leq T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Υποθέτοντας ότι τα δυαδικά ψηφία 0 και 1 είναι ισοπίθανα έχουμε $E[X(t)] = 0$.

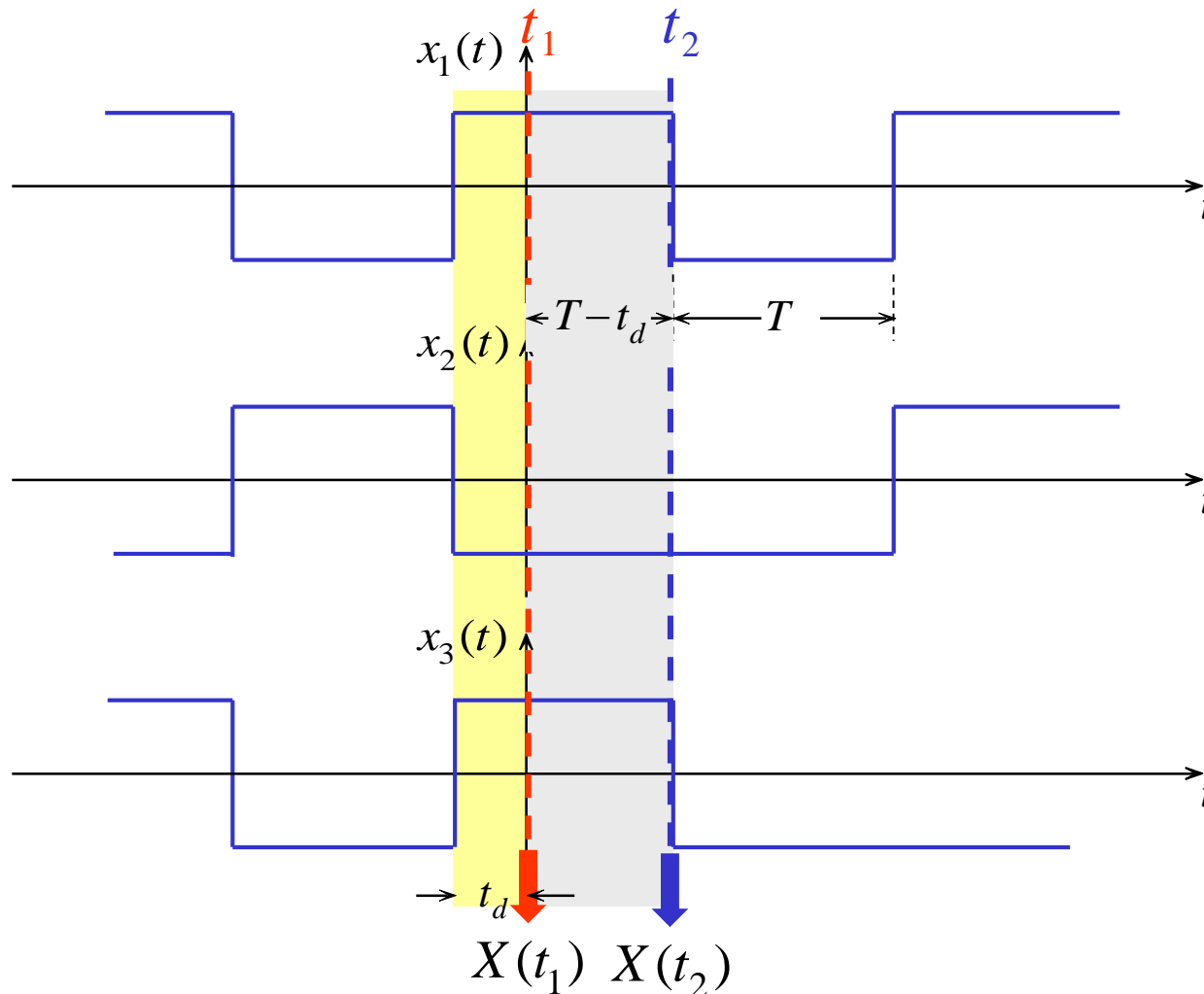
Αν $|t_2 - t_1| > T$ οι τυχαίες μεταβλητές λαμβάνονται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα παλμών και λόγω της ανεξαρτησίας είναι

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)]E[X(t_2)] = 0$$



Αν $|t_2 - t_1| < T$ και $t_1 < t_2$, οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_1)$ και $X(t_2)$ λαμβάνονται στο ίδιο χρονικό διάστημα παλμού αν και μόνο αν το χρονικό διάστημα t_d ικανοποιεί την

$$|t_2 - t_1| < T - t_d \implies t_d < T - |t_2 - t_1| \implies t_d < T - \tau$$



Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας είναι

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

Αν $|t_2 - t_1| > T$ οι τυχαίες μεταβλητές λαμβάνονται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα παλμών και λόγω της ανεξαρτησίας είναι

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)]E[X(t_2)] = 0$$

Αν $|t_2 - t_1| < T$ και $t_1 < t_2$, οι τυχαίες μεταβλητές $X(t_1)$ και $X(t_2)$ λαμβάνονται στο ίδιο χρονικό διάστημα παλμού αν και μόνο αν το χρονικό διάστημα t_d ικανοποιεί την $t_d < T - |t_2 - t_1|$. Η υποσυσθήκη μέση τιμή $E[X(t_1)X(t_2)|t_d]$ δίνεται ως

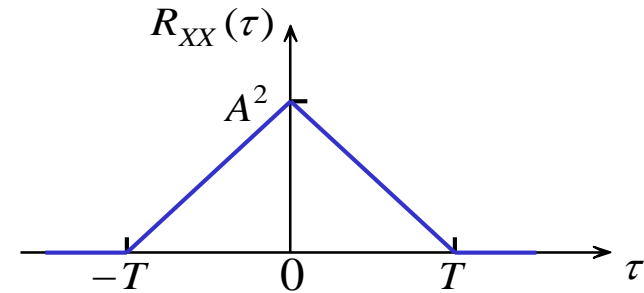
$$E[X(t_1)X(t_2)|t_d] = \begin{cases} A^2, & t_d < T - |t_2 - t_1| \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ολοκληρώνοντας για όλες τις τιμές της μεταβλητής t_d έχουμε

$$E[X(t_1)X(t_2)] = \int_0^{T-|t_2-t_1|} A^2 f_{T_d}(t_d) dt_d = \int_0^{T-|t_2-t_1|} \frac{A^2}{T} dt_d = A^2 \left(1 - \frac{|t_2-t_1|}{T}\right)$$

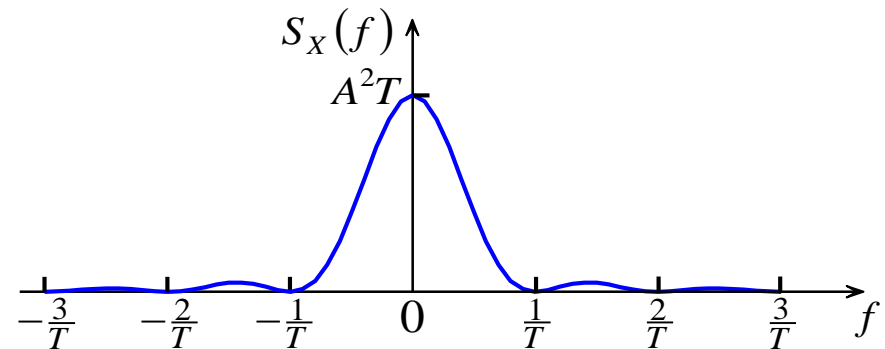
Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας είναι

$$R_{XX}(\tau) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| \geq T \end{cases}$$



Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier του τριγωνικού παλμού η φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας είναι

$$S_X(f) = A^2 T \text{sinc}^2(f T)$$

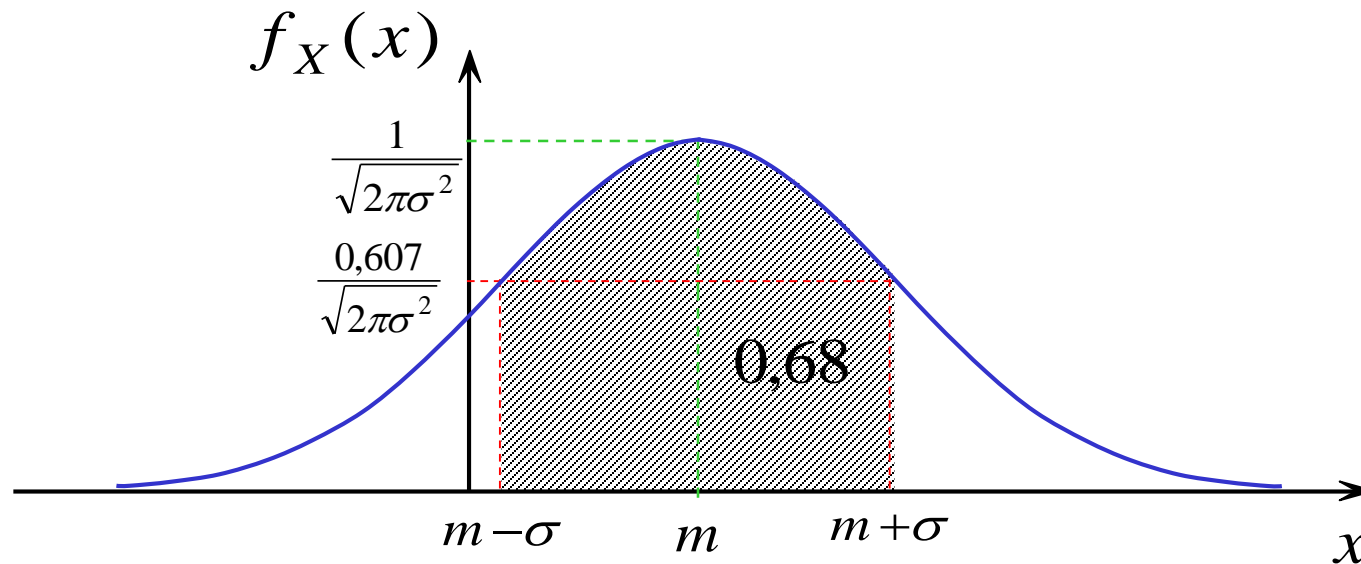


Η Gaussian τυχαία μεταβλητή

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

όπου m είναι η μέση τιμή και σ^2 η διασπορά



Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Gaussian τυχαίας μεταβλητής

Μέσο Τετραγωνικό Εύρος Ζώνης της Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος

Γνωρίζουμε ότι η διασπορά είναι ένα μέτρο του ανοίγματος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.

Η ανάλογη ποσότητα για την κανονικοποιημένη φασματική πυκνότητα ισχύος μίας τυχαίας διαδικασίας είναι το **μέσο τετραγωνικό εύρος ζώνης *rms*** (*root mean squared bandwidth*) η οποία συμβολίζεται ως

$$W_{rms} \text{ (rad/sec)}$$

Αν η διαδικασία είναι βασικής ζώνης το μέσο τετραγωνικό εύρος ζώνης δίνεται από

$$W_{rms}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega}$$

■ Παράδειγμα

Δίνεται η τυχαία διαδικασία που έχει τη φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_{XX}(\omega) = \frac{10}{\left[1 + (\omega/10)^2\right]^2}$$

Να προσδιοριστεί το μέσο τετραγωνικό εύρος ζώνης

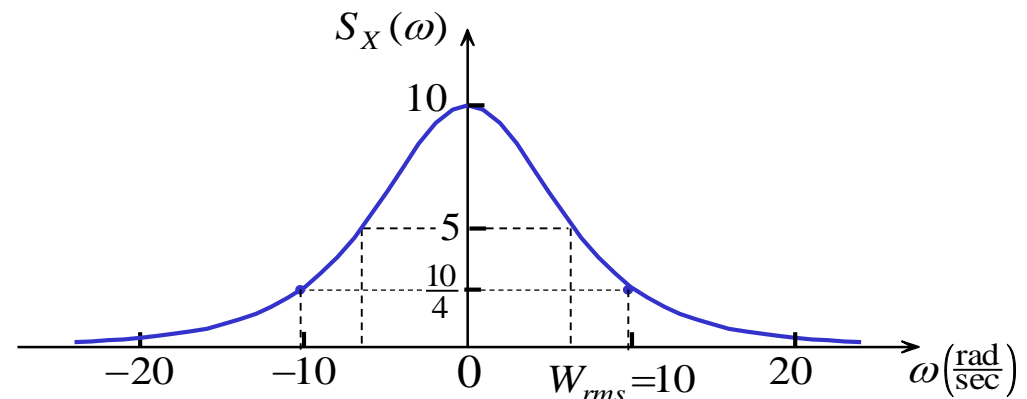
Λύση

$$W_{rms}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{10\omega^2}{\left[1 + (\omega/10)^2\right]^2} d\omega = 5000\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{10}{\left[1 + (\omega/10)^2\right]^2} d\omega = 50\pi$$

$$W_{rms} = \sqrt{\frac{5000\pi}{50\pi}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$



Ορίζουμε ως *διαφασματική πυκνότητα ισχύος* για τις τυχαίες διαδικασίες $X(t)$ και $Y(t)$

$$S_{XY}(f) \equiv F[R_{XY}(\tau)]$$

Επειδή ισχύει $R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$ έχουμε

$$S_{XY}(f) = S_X(f) \cdot H^*(f)$$

Ενώ επειδή ισχύει $R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau)$ έχουμε

$$S_{YX}(f) = S_{XY}^*(f) = S_X(f) \cdot H(f)$$

Τυχαίες Διαδικασίες και Γραμμικά Συστήματα

$$S_X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow S_Y(f)$$

Για τη *μέση τιμή* συνόλου της εξόδου έχουμε

$$m_X \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow m_Y = m_X H(0)$$

Για τις *συναρτήσεις φασματικής πυκνότητας ισχύος* έχουμε

$$\begin{array}{l}
 S_X(f) \longrightarrow \boxed{H^*(f)} \longrightarrow S_{XY}(f) = S_X(f)H^*(f) \\
 \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow S_{YX}(f) = S_X(f)H(f) \\
 \longrightarrow \boxed{|H(f)|^2} \longrightarrow S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2
 \end{array}$$

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του Αθροίσματος Διαδικασιών

Δίνονται οι WSS τυχαίες διαδικασίες $X(t)$ και $Y(t)$ και ορίζεται η τυχαία διαδικασία

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $Z(t)$ είναι

$$R_{ZZ}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{YY}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau)$$

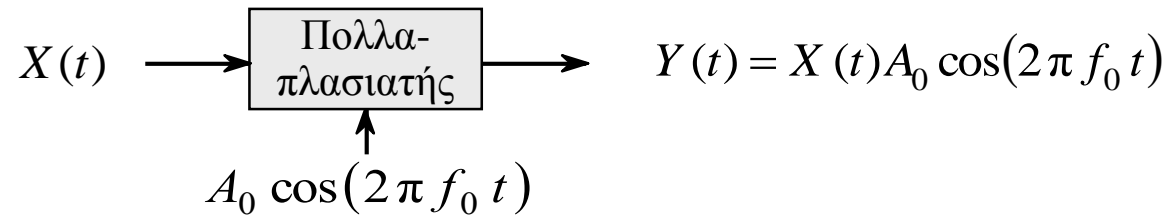
και η φασματική πυκνότητα ισχύος της $Z(t)$ είναι

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f) + 2\Re[S_{XY}(f)]$$

Αν οι δύο διαδικασίες είναι ασυσχέτιστες τότε $R_{XY}(\tau) = m_X \cdot m_Y$ και αν μία τουλάχιστον από τις διαδικασίες έχει μέση τιμή ίση με το μηδέν τότε

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f)$$

Μίξη τυχαίας διαδικασίας με συνημιτονοειδή τυχαία διαδικασία



Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου είναι

$$\begin{aligned} R_{YY}(t, t+\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] \\ &= E\left[A_0^2 X(t)X(t+\tau)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau)\right] \\ &= \frac{A_0^2}{2} R_{XX}(\tau) [\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(22\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau)] \end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι η $R_{XX}(t, t+\tau)$ εξαρτάται από το t έτσι

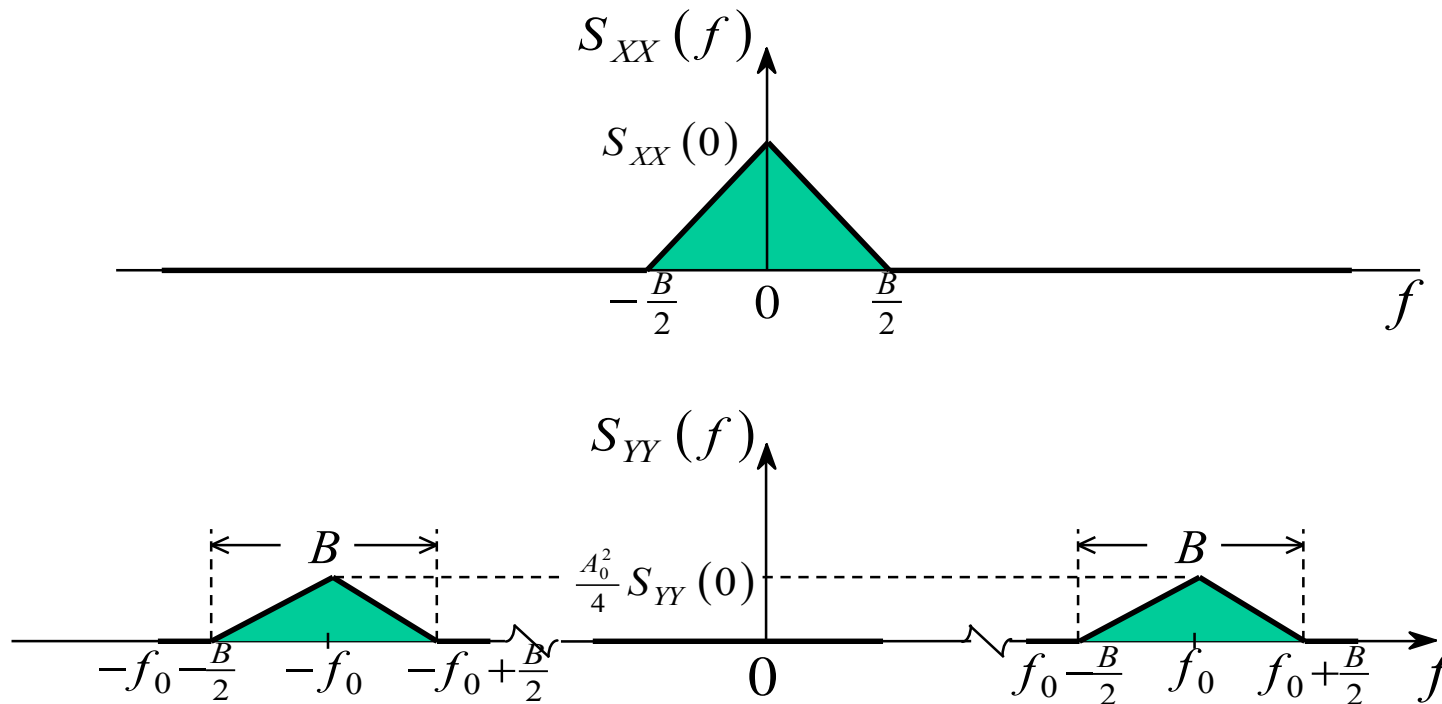
$$\begin{aligned} A[R_{YY}(t, t+\tau)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{A_0^2}{2} \int_{-T}^T R_{YY}(t, t+\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{A_0^2}{2} \int_{-T}^T R_{XX}(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{A_0^2}{2} \int_{-T}^T R_{XX}(\tau) \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) dt \\ &= \frac{A_0^2}{2} R_{XX}(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε για τη φασματική πυκνότητα ισχύος

$$A[R_{YY}(t, t + \tau)] \xleftrightarrow{F} S_{YY}(f)$$

Επομένως η φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου του πολλαπλασιαστή είναι

$$S_{YY}(f) = F \left[\frac{A_0^2}{2} R_{XX}(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) \right] = \frac{A_0^2}{4} [S_{XX}(f - f_0) + S_{XX}(f + f_0)]$$



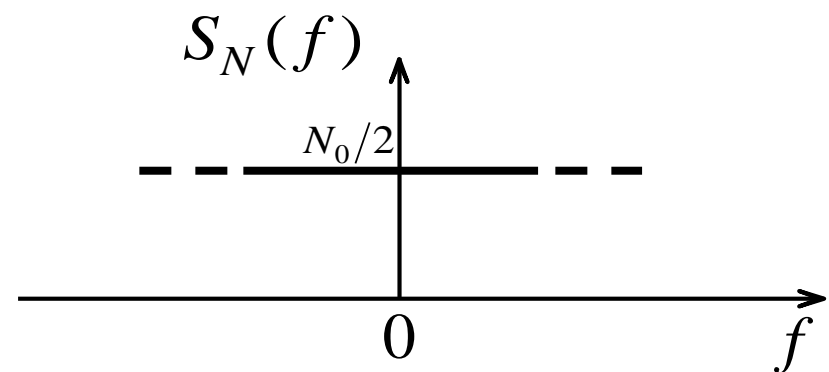
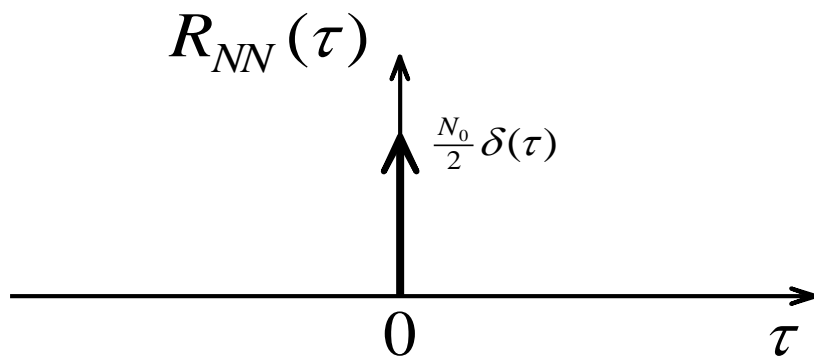
Λευκός Θόρυβος

Μία συνάρτηση δείγματος $n(t)$ μίας WSS τυχαίας διαδικασίας $N(t)$ ονομάζεται *λευκός θόρυβος* αν

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας είναι

$$R_{NN}(\tau) = \left(\frac{N_0}{2}\right) \delta(\tau)$$



Παρατηρούμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) df = \infty$$

Ο θερμικός θόρυβος έχει φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_N(f) = \frac{hf}{2(e^{\frac{hf}{kT}} - 1)} \xrightarrow{e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \approx \frac{hf}{kT}} S_N(f) = \frac{hf}{2 \frac{hf}{kT}} = \frac{kT}{2}$$

Όπου $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ joule \cdot sec είναι η σταθερά του Planck και
 $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ joule/Kelvin η σταθερά του Boltzmann

Ο θερμικός θόρυβος αποτελεί μία καλή προσέγγιση λευκού θορύβου αφού διατηρεί σταθερή τιμή για μία μεγάλη σχετικά περιοχή συχνοτήτων, πράγματι

$$S_N(2 \cdot 10^{12}) = 0,9 \cdot S_N(0) = 0,9 \cdot \frac{N_0}{2}$$

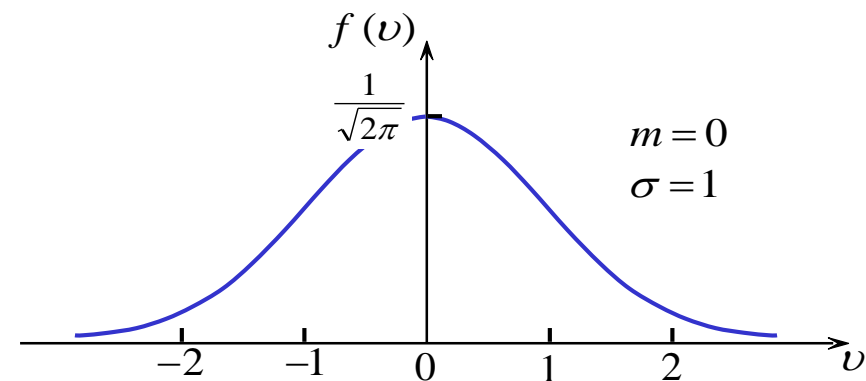
Θερμικός Θόρυβος (Θόρυβος Johnson)

Αν $n(t)$ είναι η στιγμιαία τάση στα άκρα μίας αντίστασης R λόγω θερμικής κίνησης των ηλεκτρονίων, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $n(t)$ ακολουθεί στατιστική Gauss, με μέση τιμή ίση με μηδέν, δηλαδή,

$$f(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

Η διακύμανση του θερμικού θορύβου είναι ίση με

$$\sigma^2 \equiv E[n^2(t)] = \overline{n^2(t)} = 4kTR df \text{ Volts}^2$$



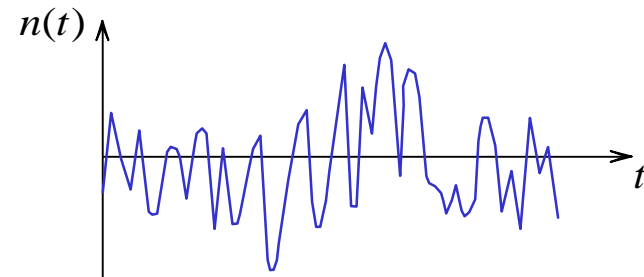
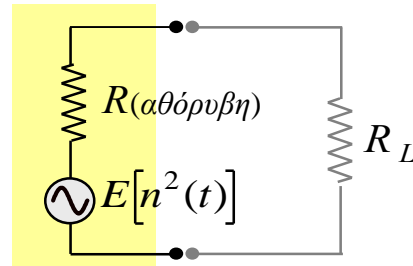
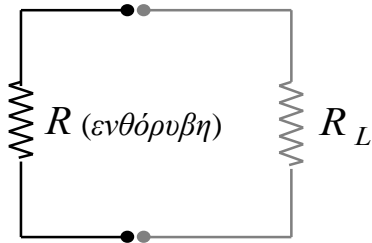
Η $\overline{n^2(t)}$ ισούται αριθμητικά με την ισχύ του θορύβου ανά μονάδα αντίστασης

Έχουμε τα δύο Ισοδύναμα Θορύβου κυκλώματα μίας αντίστασης.

- Ισοδύναμο θορύβου της αντίστασης R κατά Thevenin
- Ισοδύναμο θορύβου της αντίστασης R κατά Norton

Πηγές θερμικού θορύβου

Κάθε φυσική αντίσταση μπορεί να μοντελοποιηθεί με μία πηγή θορύβου σε σειρά με μία “αθόρυβη” αντίσταση.



Η έξοδος $n(t)$ της πηγής θορύβου χαρακτηρίζεται ως δείγμα συνάρτησης της τυχαίας διαδικασίας $N(t)$.

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του θερμικού θορύβου που εμφανίζεται στα άκρα αντίστασης R είναι

$$S_R(f) = \frac{2R h |f|}{e^{\frac{h|f|}{kT}} - 1} \left(\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right)$$

Σε θερμοκρασία δωματίου αποδεικνύεται ότι $e^{\frac{h|f|}{kT}} \approx 1 + \frac{h|f|}{kT}$, επομένως, η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι περίπου

$$S_R(f) = 2kT R \left(\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right)$$

Αν η αντίσταση αυτή συνδεθεί με αντίσταση φόρτου R_L τότε έχουμε μέγιστη μεταφερόμενη ισχύ (προσαρμογή) όταν

$$R = R_L$$

η μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς είναι

$$\frac{E[N^2(t)]}{4R_L}$$

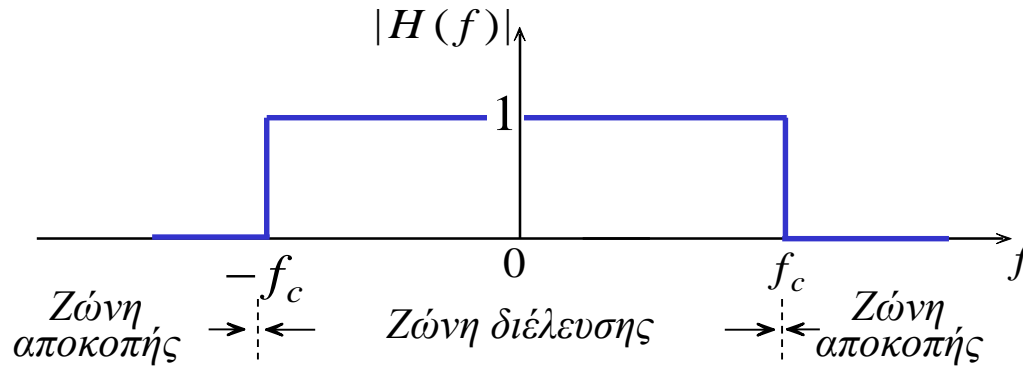
Επομένως η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου στην αντίσταση φόρτου είναι

$$S_n(f) = \frac{kT}{2} \left(\frac{W}{Hz} \right)$$

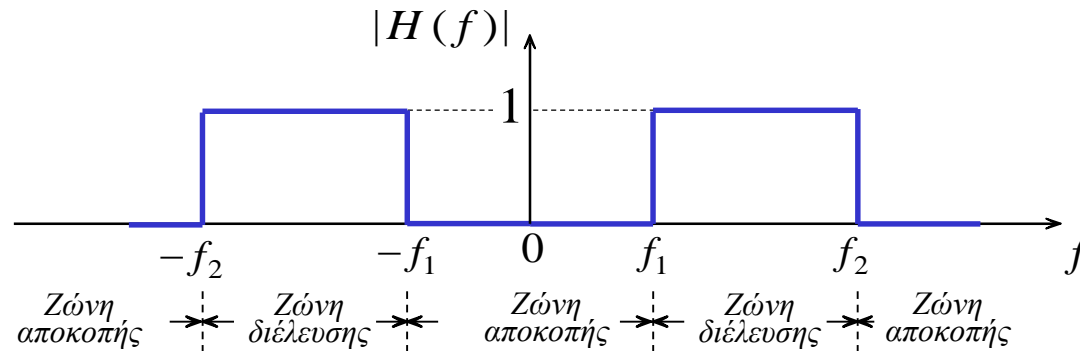
Το kT συμβολίζεται συνήθως με N_0 , επομένως η φασματική πυκνότητα ισχύος του θερμικού θορύβου γενικά εκφράζεται ως

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} \left(\frac{W}{Hz} \right)$$

Ιδανικά φίλτρα



Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο



Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο

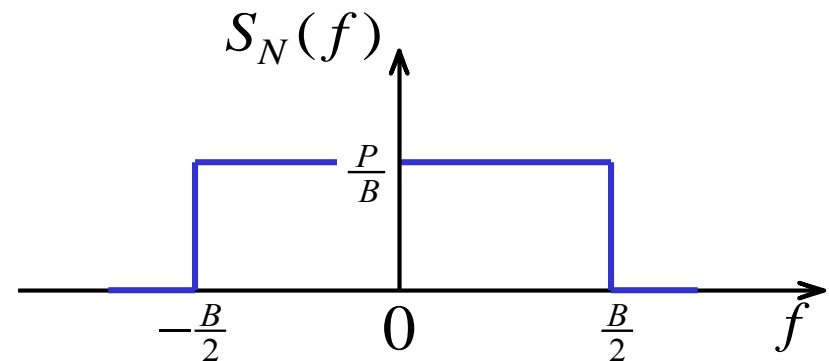
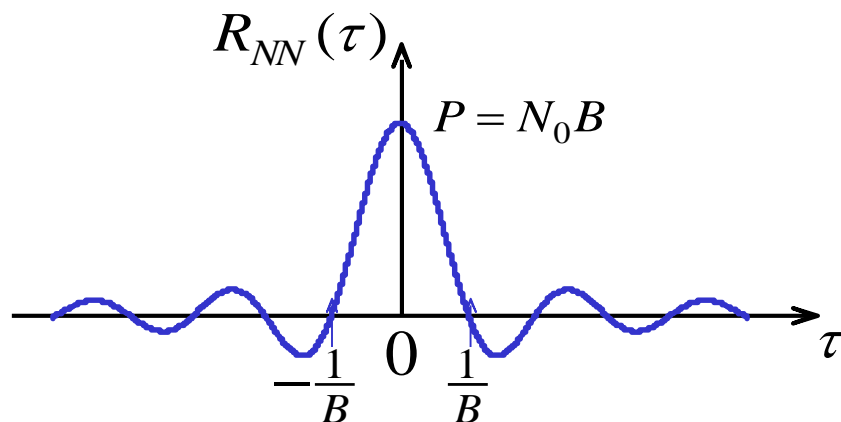
Αν λευκός θόρυβος διέλθει μέσα από ένα ιδανικό φίλτρο βασικής ζώνης (χαμηλοπερατό) η έξοδός του θα είναι **λευκός θόρυβος περιορισμένου εύρους ζώνης** με φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_N(f) = \begin{cases} \frac{P}{B}, & -\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \text{ή} \quad S_N(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & -\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_{NN}(\tau) = \int_{-B/2}^{B/2} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f \tau} df$$

$$R_{NN}(\tau) = P \frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi B \tau}$$

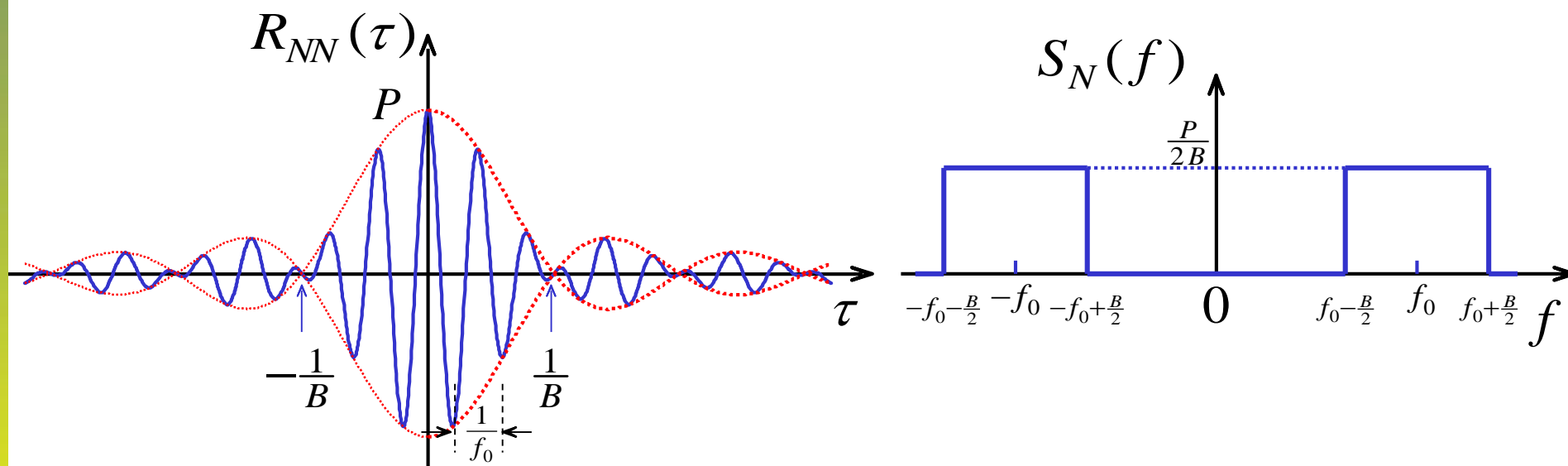


Αν λευκός θόρυβος διέλθει μέσα από ένα ιδανικό φίλτρο διέλευσης ζώνης (ζωνοπερατό) συχνοτήτων η έξοδος θα είναι **λευκός ζωνοπερατός θόρυβος** με φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_N(f) = \begin{cases} \frac{P}{2B}, & f_0 - \frac{B}{2} < |f| < f_0 + \frac{B}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_{NN}(\tau) = P \frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi B \tau} \cos(2\pi f_0 \tau)$$



■ Παράδειγμα

Μία τυχαία διαδικασία θορύβου είναι στατική με την ευρεία έννοια (WSS) και έχει συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_{NN}(\tau) = P e^{-a|\tau|}$$

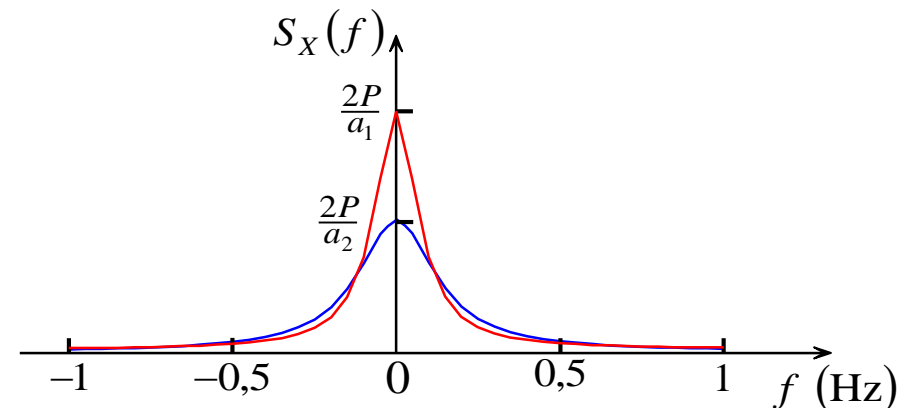
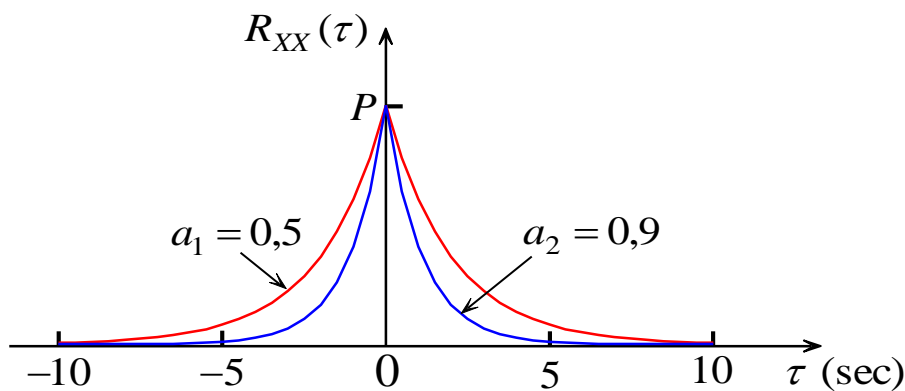
Να προσδιοριστεί η φασματική πυκνότητα ισχύος της τυχαίας διαδικασίας θορύβου.

Λύση

Από το γνωστό ζευγάρι μετασχηματισμού Fourier

$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

$$S_{NN}(f) = \frac{2aP}{a^2 + (2\pi f)^2}$$



Ισοδύναμο Εύρος Ζώνης Θορύβου

Ορίζουμε ως *ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου* το εύρος ζώνης B_{neq} ενός ιδανικού φίλτρου που αφήνει να περάσει την ίδια ολική ισχύ θορύβου με την πραγματική διάταξη, αν στην είσοδό του δεχόταν τον ίδιο λευκό θόρυβο.

Η ισχύς θορύβου στην έξοδο του πραγματικού φίλτρου

$$P_{πραγ} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df = N_0 \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

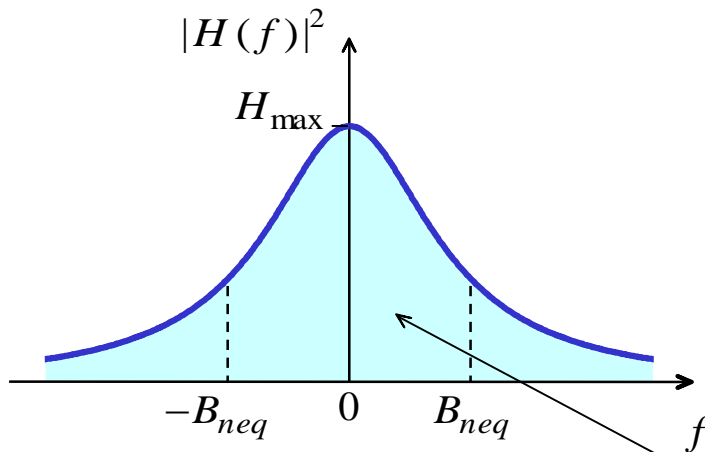
Η ισχύς θορύβου στην έξοδο του ιδανικού φίλτρου

$$P_{ιδαν} = \int_{-B_{neq}}^{B_{neq}} \frac{N_0}{2} |H(0)|^2 df = N_0 |H(0)|^2 B_{neq}$$

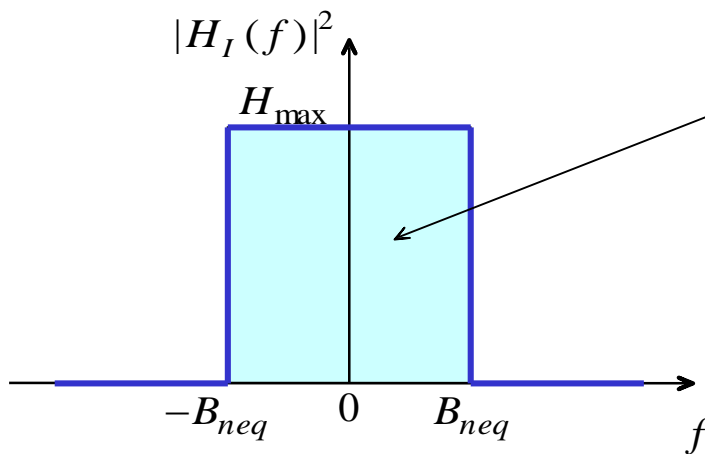
Το ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου

$$B_{neq} = \frac{1}{2 |H(0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

***H* συνάρτηση μεταφοράς ισχύος** (power transfer function) πραγματικού και του ιδανικού του φίλτρου



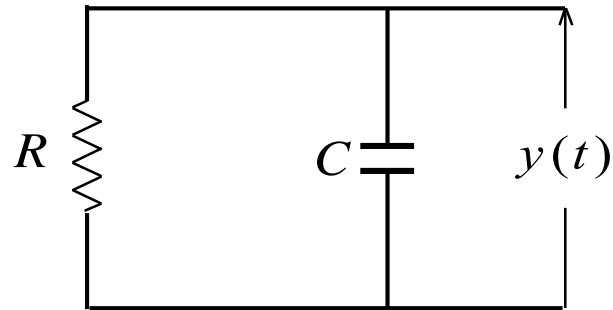
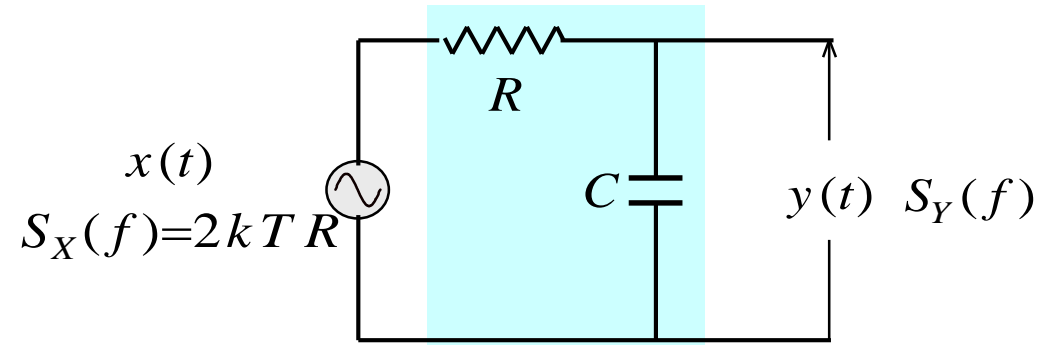
Το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του πραγματικού φίλτρου



Ίσα εμβαδά

Το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του ιδανικού φίλτρου

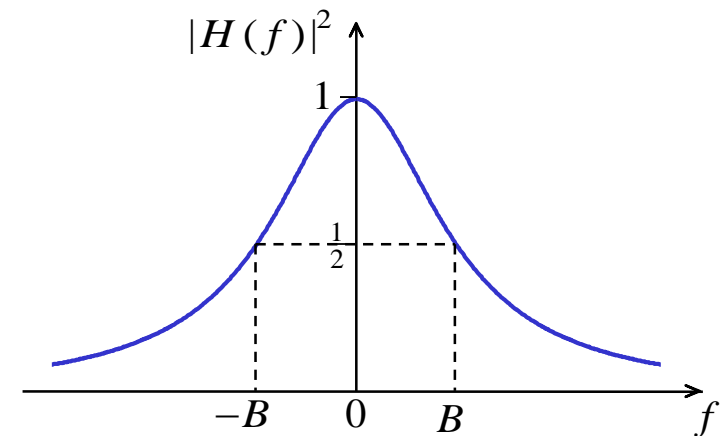
Θερμικός Θόρυβος από κύκλωμα RC

Κύκλωμα RC 

Ισοδύναμο θορύβου

Απόκριση συχνότητας του κυκλώματος RC

$$H(f) = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{B}}$$

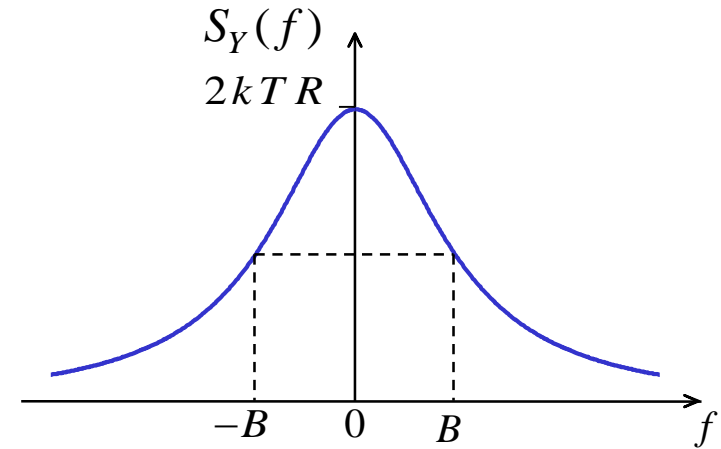


Απόκριση ισχύος του κυκλώματος RC

Η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ισχύος της εξόδου του κυκλώματος

$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2$$

$$S_Y(f) = \frac{2kTR}{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2}$$

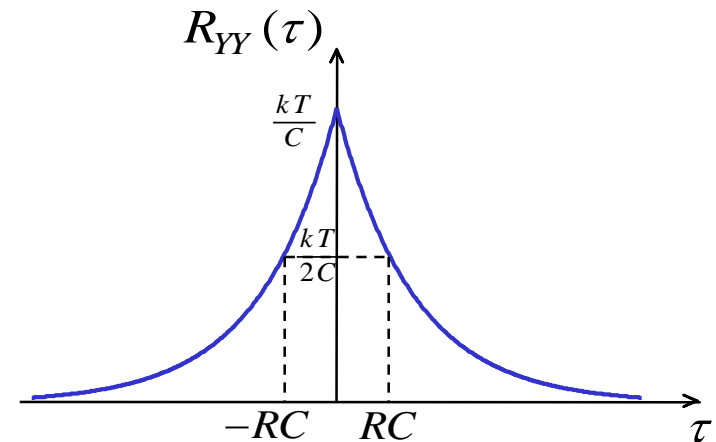


Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης εξόδου

$$R_Y(\tau) = \frac{kT}{C} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

Η ισχύς της έξοδου

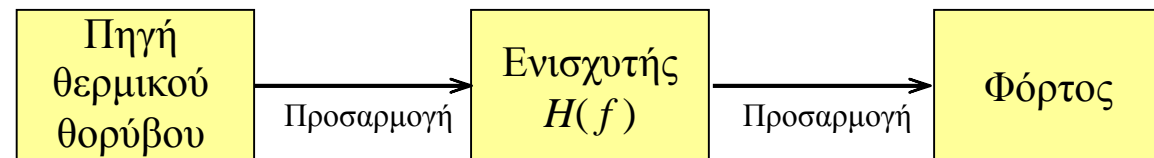
$$\overline{y^2} = R_Y(0) = \frac{kT}{C}$$



Ενεργός θερμοκρασία θορύβου

Στα συστήματα επικοινωνίας, όταν χρησιμοποιούμε ενισχυτές για να ανυψώσουμε τη στάθμη ενός σήματος, ενισχύεται επίσης και ο θόρυβος που διαβρώνει το σήμα.

Επειδή κάθε ενισχυτής έχει πεπερασμένο εύρος-ζώνης, μπορούμε να αναπαραστήσουμε έναν ενισχυτή ως ένα φίλτρο με απόκριση συχνότητας $H(f)$. Ας υπολογίσουμε την έξοδο ενός ενισχυτή όταν στην είσοδό του συνδεθεί πηγή θερμικού θορύβου.



Θερμικός θόρυβος που εφαρμόζεται σε φόρτο μέσω ενισχυτή.

Η ισχύς του θορύβου στην έξοδο του τετραπόλου (ενισχυτής) είναι

$$P_{nos} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_N(f) |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = B_{neq} N_0 |H(f)|_{\max}^2$$

όπου $|H(f)|_{\max}^2$ είναι η **μέγιστη διαθέσιμη απολαβή ισχύος** του τετραπόλου

Κάθε τετράπολο στην πράξη παρέχει επιπρόσθετο θόρυβο στην έξοδό του εξαιτίας θορύβου που δημιουργείται εσωτερικά. Επομένως η ισχύς του θορύβου στην έξοδό του ενισχυτή μπορεί να εκφραστεί ως

$$P_{no} = B_{neq} N_0 |H(f)|_{\max}^2 + P_{noi} = B_{neq} k T_s |H(f)|_{\max}^2 + P_{noi}$$

όπου P_{noi} είναι η ισχύς της εξόδου του ενισχυτή εξαιτίας του θορύβου που παράγεται εσωτερικά. Επομένως,

$$P_{no} = B_{neq} k |H(f)|_{\max}^2 \left(T_s + \frac{P_{noi}}{B_{neq} k |H(f)|_{\max}^2} \right)$$

Ας ορίσουμε την ποσότητα

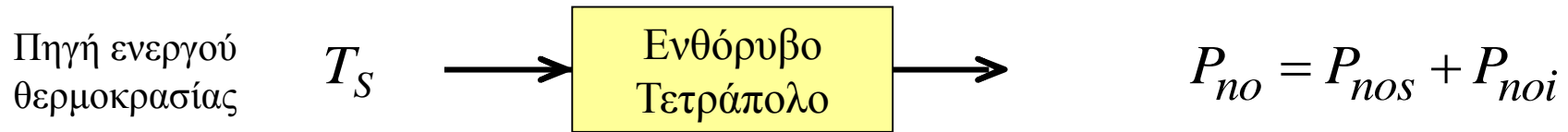
$$T_{\text{ενερ}} = \frac{P_{noi}}{B_{neq} k |H(f)|_{\max}^2}$$

ως **ενεργό θερμοκρασία θορύβου** (*effective noise*) του τετραπόλου (ενισχυτή). Τότε ισχύει

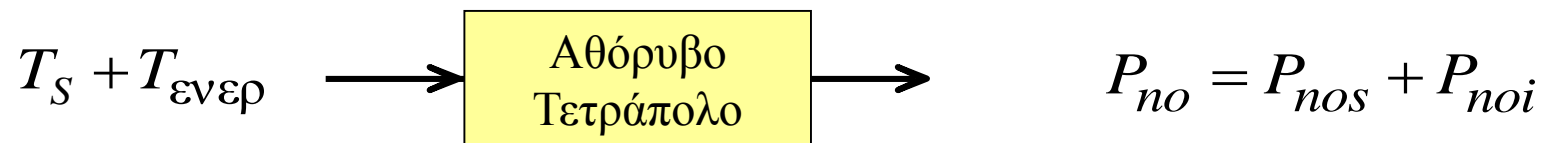
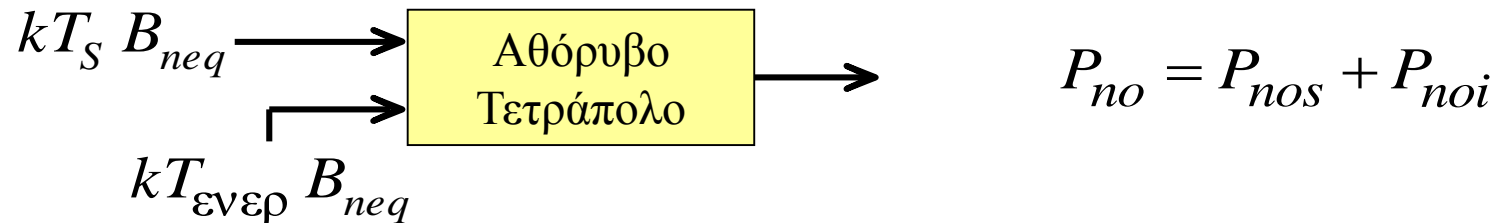
$$P_{no} = B_{neq} k |H(f)|_{\max}^2 (T_s + T_{\text{ενερ}})$$

Έτσι, ερμηνεύουμε το θόρυβο εξόδου ως προερχόμενον από μία πηγή θερμικού θορύβου σε θερμοκρασία $T_s + T_{\text{ενερ}}$ στην είσοδο ενός **ισοδύναμου ιδανικού τετραπόλου**.

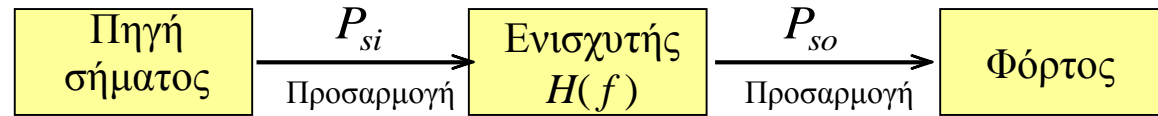
Θερμοκρασία θορύβου ενός τετραπόλου



Ως **ενεργό θερμοκρασία** ενός τετραπόλου, ορίζουμε την θερμοκρασία $T_{ενερ}$ μίας θερμικής πηγής θορύβου που θα έπρεπε να βάλουμε στην είσοδο του τετραπόλου αν ήταν αθόρυβο, για να δώσει στην έξοδό του ισχύ P_{noi} ίση με την πρόσθετη ισχύ του τετραπόλου.



Μία πηγή σήματος με ισχύ P_{si} στην είσοδο ενός ενισχυτή δημιουργεί ισχύ εξόδου



Σήμα που εφαρμόζεται σε φόρτο μέσω ενισχυτή.

$$P_{so} = |H(f)|_{\max}^2 P_{si}$$

Έτσι το SNR της εξόδου του ενισχυτή είναι

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{εξοδ}} &= \frac{P_{so}}{P_{no}} = \frac{|H(f)|_{\max}^2 P_{si}}{N_0 |H(f)|_{\max}^2 B_{neq} (1 + T_{\text{ενερ}}/T_s)} = \frac{P_{si}}{N_0 B_{neq} (1 + T_{\text{ενερ}}/T_s)} \\ &= \frac{1}{(1 + T_{\text{ενερ}}/T_s)} \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{εισοδ}} \end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι το SNR εξόδου υποβαθμίζεται κατά το συντελεστή $(1 + T_{\text{ενερ}}/T_s)$. Έτσι το $T_{\text{ενερ}}$ **είναι ένα μέτρο του θορύβου που εισάγει ο ενισχυτής**. Ιδανικός ενισχυτής είναι εκείνος για τον οποίο ισχύει $T_{\text{ενερ}} = 0$.

Λειτουργική Εικόνα Θορύβου

Λειτουργική εικόνα θορύβου ενός τετραπόλου ορίζεται ο λόγος της ισχύος του θορύβου στην έξοδο P_{no} προς την ισχύ του θορύβου στην έξοδο ενός ιδανικού (αθόρυβου) τετραπόλου.

$$F_{op} \equiv \frac{P_{no}}{P_{nos}}$$

Εναλλακτικός ορισμός της λειτουργικής εικόνας θορύβου τετραπόλου είναι

$$F_{op} \equiv \frac{(S/N)_{\text{εισοδ}}}{(S/N)_{\text{εξοδ}}} \quad F_{op} \geq 1$$

Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της Εξίσωσης, λαμβάνουμε

$$10 \log \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{εξοδ}} = -10 \log F + 10 \log \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{εισοδ}}$$

Επομένως το $10 \log F$ παριστά τις απώλειες στο SNR εξαιτίας του επιπρόσθετου θορύβου που εισάγει ο ενισχυτής. Σε πολλούς ενισχυτές χαμηλού θορύβου, όπως οι λυχνίες διαδιδόμενου κύματος, η εικόνα θορύβου έχει τιμή κάτω από 3dB. Οι συμβατικοί ενισχυτές ολοκληρωμένων κυκλωμάτων παρουσιάζουν εικόνα θορύβου μεταξύ 6 - 7 dB.

Η λειτουργική εικόνα θορύβου και η ενεργός θερμοκρασία τετραπόλου συνδέονται με την

$$F_{op} \equiv \frac{P_{no}}{P_{nos}} = \frac{P_{nos} + P_{noi}}{P_{nos}} = 1 + \frac{P_{noi}}{P_{nos}} = 1 + \frac{T_{\text{ενερ}}}{T_s}$$

Αν υποθέσουμε ότι το τετράπολο οδηγείται από πηγή με ενεργό θερμοκρασία θορύβου $T_0 = 290^\circ\text{K}$ τότε ορίζεται η *εικόνα θορύβου αναφοράς*

$$F_0 = 1 + \frac{T_{\text{ενερ}}}{T_0}$$

Θόρυβος από γραμμή μεταφοράς ή υποβιβαστή

Ορίζουμε ως *απώλεια* L το λόγο της ισχύος εξόδου προς την ισχύ εισόδου

$$G = \frac{1}{L} = \frac{P_{\text{εξοδ}}}{P_{\text{εισοδ}}}$$

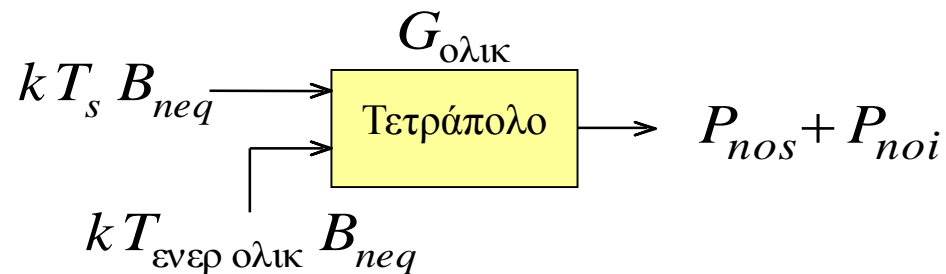
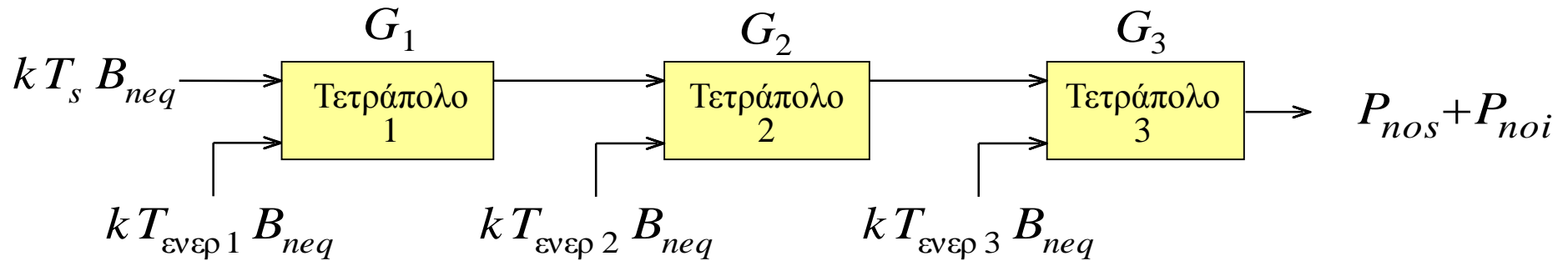
Αποδεικνύεται ότι η *ενεργός θερμοκρασία* προσαρμοσμένης γραμμής μεταφοράς που βρίσκεται σε θερμοκρασία $T_{\text{περ}}$ είναι

$$T_{\text{ενερ}} = (L - 1)T_{\text{περ}}$$

Η *εικόνα θορύβου* της προσαρμοσμένης γραμμής μεταφοράς που βρίσκεται σε θερμοκρασία $T_{\text{περ}}$ είναι

$$F = L$$

Θερμοκρασία Θορύβου Συστήματος Τετραπόλων σε Σειρά



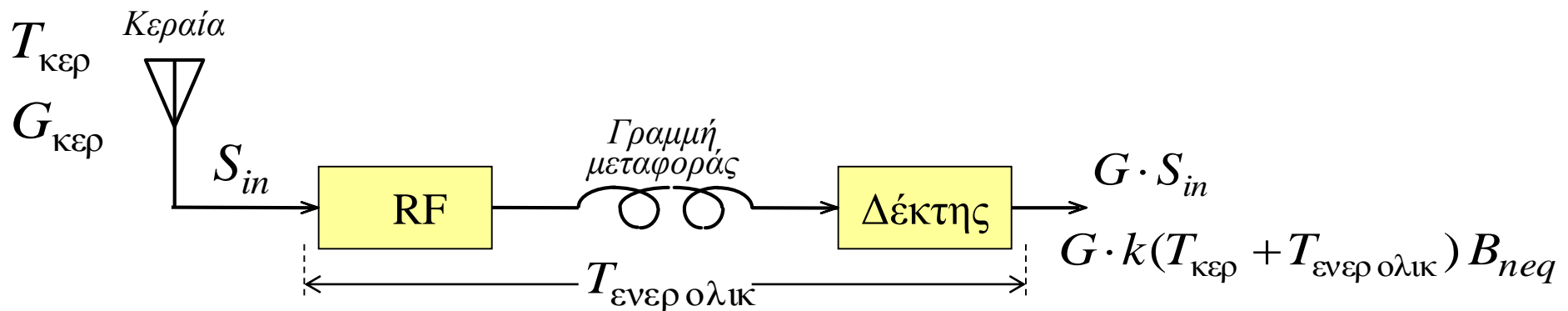
Η συνολική ενεργός θερμοκρασία θορύβου για συνδεδεμένα σε σειρά τετράπολα είναι

$$T_{\text{ενερ}ολ} = T_{\text{ενερ}1} + \frac{T_{\text{ενερ}2}}{G_1} + \frac{T_{\text{ενερ}3}}{G_1 G_2}$$

Θερμοκρασία Συστήματος

Ορίζουμε ως **θερμοκρασία συστήματος** $T_{\Sigma\sigma\varsigma}$ το άθροισμα της ολικής θερμοκρασίας θορύβου $T_{\text{ενερ ολικ}}$ όλου του δέκτη συν την θερμοκρασία θορύβου της κεραίας $T_{\text{κερ}}$

$$T_{\Sigma\sigma\varsigma} = T_{\text{κερ}} + T_{\text{ενερ ολικ}}$$



$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{ολικ}} = \frac{G \cdot S_{in}}{G \cdot k(T_{\text{κερ}} + T_{\text{ενερ ολικ}}) B_{neq}} = \frac{S_{in}}{k T_{\Sigma\sigma\varsigma} B_{neq}}$$

Άσκηση

Σ' ένα σύστημα επικοινωνίας το σήμα λήψης $r(t) = s(t) + n(t)$ διέρχεται μέσα από ένα ιδανικό LPF με εύρος-ζώνης W και μοναδιαία απολαβή. Η συνιστώσα του σήματος $s(t)$ έχει φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_s(f) = \frac{P_0}{1 + (f/B)^2}$$

όπου B είναι το 3-dB εύρος-ζώνης. Η συνιστώσα θορύβου $n(t)$ έχει φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$ για όλες τις συχνότητες.

- α)** Υπολογίστε και σχεδιάστε το SNR ως συνάρτηση του λόγου W/B .
- β)** Ποιο είναι το εύρος-ζώνης W του φίλτρου το οποίο δίνει μέγιστο SNR;

Άσκηση

Η είσοδος στο σύστημα είναι η κυματομορφή του αθροίσματος σήματος και θορύβου

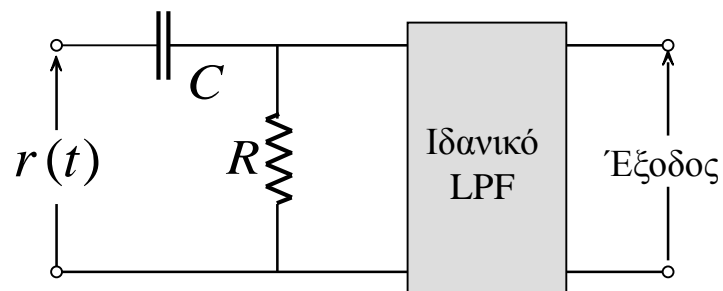
$$r(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + n(t)$$

όπου $n(t)$ είναι συνάρτηση δείγμα μιας διαδικασίας λευκού θορύβου με φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$.

α) Υπολογίστε και σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας του φίλτρου RC.

β) Σχεδιάστε την απόκριση συχνότητας του συνολικού συστήματος.

γ) Υπολογίστε το SNR στην έξοδο του ιδανικού LPF υποθέτοντας ότι $W > f_c$. Σχεδιάστε το SNR ως συνάρτηση του W για σταθερές τιμές των R και C .



Άσκηση

Ένα τηλεφωνικό κανάλι συνεστραμμένου ζεύγους με χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση $Z_c = 300 \Omega$ τερματίζεται σε φορτίο $Z_L = 300 \Omega$. Η τηλεφωνική γραμμή έχει μήκος 200 Km και παρουσιάζει απώλειες 2 dB/Km.

α) Αν η μέση εκπεμπόμενη ισχύς είναι $P_T = 10\text{dBm}$, υπολογίστε την ισχύ λήψης P_R , αν η τηλεφωνική γραμμή δεν περιλαμβάνει επαναλήπτες.

β) Αν χρησιμοποιηθούν επαναλήπτες με απολαβή 20dB για την ενίσχυση του σήματος στο κανάλι και αν κάθε επαναλήπτης απαιτεί στην είσοδο στάθμη ισχύος 10dBm, υπολογίστε τον αριθμό των επαναληπτών και την απόσταση μεταξύ τους.

Η εικόνα θορύβου κάθε επαναλήπτη είναι 6dB.

Άσκηση

Μία κεραία προσανατολισμένη προς μια κατεύθυνση στον ουρανό έχει ενεργό θερμοκρασία θορύβου 50K. Η κεραία οδηγεί το λαμβανόμενο σήμα στον προενισχυτή ο οποίος έχει απολαβή 35dB σ' ένα εύρος-ζώνης 10MHz, και εικόνα θορύβου αναφοράς 2dB.

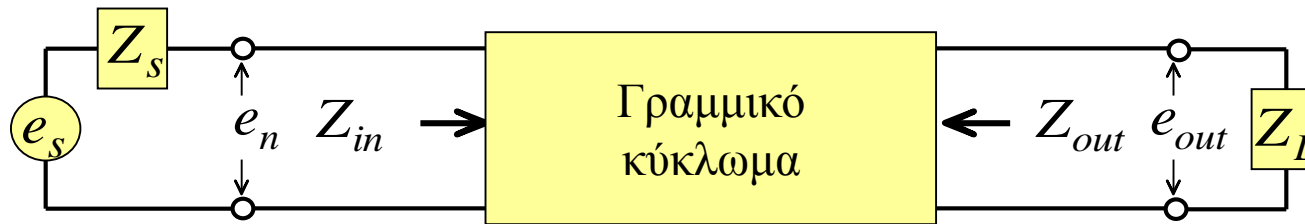
- α) Υπολογίστε την ενεργό θερμοκρασία θορύβου στην είσοδο του προενισχυτή.
- β) Βρείτε την ισχύ θορύβου στην έξοδο του προενισχυτή.

Άσκηση

Μία κεραία έχει ενεργό θερμοκρασία θορύβου 150 K. Η κεραία οδηγεί το λαμβανόμενο σήμα στο δέκτη μέσω γραμμής μεταφοράς η οποία βρίσκεται σε φυσική θερμοκρασία 280 K και έχει απώλεια ίση με 1,76 dB. Ο δέκτης έχει ισοδύναμο εύρος ζώνης θορύβου ίσο με 10^6 Hz και ενεργό θερμοκρασία θορύβου ίση με 700 K. Να υπολογιστούν

- α) η ενεργό θερμοκρασία θορύβου του συστήματος,
- β) η λειτουργική εικόνα θορύβου του συστήματος και
- γ) η ισχύ θορύβου στην έξοδο του συστήματος.

Τετράπολο με προσαρμοσμένη πηγή και φόρτο



Διαθέσιμη ισχύ θορύβου στην είσοδο από την πηγή
Available noise power of the source

$$dP_{as} = \overline{\frac{de_n^2(t)}{4R_S(f)}}$$

Διαθέσιμη ισχύ θορύβου στην έξοδο λόγω της πηγής
Available noise power in the output due to the source

$$dP_{aos} = \overline{\frac{de_o^2(t)}{4R_o(f)}}$$

Διαθέσιμη ισχύ θορύβου στην έξοδο που προέρχεται από το κύκλωμα

$$\Delta P_{ao} = G k T_{\text{ενεργ}} df$$

όπου G είναι η απολαβή ισχύος του κυκλώματος

$$G = \frac{dP_{aos}}{dP_{as}} = \frac{\overline{R_S e_o^2(t)}}{\overline{R_o e_s^2(t)}}$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση διαθέσιμη [εδώ](#).

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Σεραφείμ Καραμπογιάς 2015. Σεραφείμ Καραμπογιάς. «Επεξεργασία στοχαστικών σημάτων. Τυχαίες διαδικασίες στο πεδίο συχνοτήτων.». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/DI23>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.